ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-82-720

С.Н.Николаев, А.В.Радюшкин

КВАНТОВО-ХРОМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ ЧАРМОНИЯ С УЧЕТОМ $O(G^4)$ ВКЛАДОВ

Направлено в журнал "Physics Letters B"

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод КХД правил сумм [1] в настоящее время пользуется все большей популярностью среди теоретиков, занимающихся приложениями КХД к физическим процессам. Эта техника, хотя она и мало отличается в вычислительном аспекте от методов пертурбативной КХД, позволяет исследовать свойства адронов /массы, лептонные ширины/, которые связаны с /непертурбативными/ взаимодействиями на больших расстояниях. Это достигается включением в теорию ненулевых вакуумных средних /ВС/ локальных операторов типа $<\bar{\psi}\psi>$, $<g^2 G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu}>$, которые играют роль фундаментальных констант, характеризующих структуру КХД вакуума.

Для проверки надежности теоретического базиса метода КХД правил сумм он был применен к точно решаемым моделям - нерелятивистской потенциальной теории [2-4] и двумерной хромодинамике [5-6]. Было установлено, что хотя в целом картина в этих моделях согласуется с предположениями работ [1], однако степенной ряд по $1/m_c^2$ для аналогов чармония сходится довольно медленно, и вследствие этого оценки на параметр ϕ /аналогичный $\frac{<g^2G^2>}{m_c^4}$/, полученные фитированием точного результата /"экспериментальных данных"/, с помощью формул низшего нетривиального /т.е., $O(\phi)$/ приближения, являются довольно грубыми. Как правило, величина ϕ занижается в 2-3 раза. Поэтому представляется важным выяснить, с какой именно ситуацией - быстрой или медленной сходимостью ряда по $1/m_c^2$ - мы имеем дело в реальном случае 4-мерной хромодинамики.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ПОРЯДКЕ $O(G^4)$

Чтобы проанализировать сходимость низших членов разложения по $1/m_c^2$ для КХД правил сумм [1], мы вычислили $O(m_c^{-6}) \equiv O(G^3)$ и $O(m_c^{-8}) \equiv O(G^4)$ поправки * к соответствующим поляризационным операторам $\Pi(Q^2, m^2)$. Использованный при этом алгоритм описан в [7,8] и реализован на ЭВМ с помощью программы аналитических

---

* Поскольку $O(G^3)$ - вклад имеет дополнительное подавление фактором $1/15$ [3,10], отсутствующим для $O(G^4)$-вклада, при оценке сходимости необходимо учитывать эти вклады одновременно.

вычислений SCHOONSCHIP [9]. В настоящей работе мы ограничимся обсуждением векторного /т.е. J/ψ/ канала. Для моментов

$$M_n^V(m_c^2) = \frac{1}{n!}\left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^n \Pi^V(Q^2, m_c^2)\Big|_{Q^2=0} \qquad /1/$$

в векторном канале нами было получено следующее выражение:

$$M_n^V = \frac{3}{4\pi^2}\,\frac{(n+1)(n-1)!}{(2n+3)!!\,(2m_c^2)^n}\Big\{1 + a_n\alpha_s - \frac{(n+3)!}{(n-1)!\,(2n+5)}\,\frac{\langle g^2 G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}\rangle}{9(4m_c^2)^2} +$$

$$+\frac{2}{45}\,\frac{(n+4)!\,(3n^2+8n-5)}{(n-1)!\,(2n+5)(2n+7)}\,\frac{\langle g^3 f_{abc}G^a_{\mu\nu}G^b_{\nu\lambda}G^c_{\lambda\mu}\rangle}{9(4m_c^2)^3} -$$

$$-\frac{8(n+2)!\,(n+4)(3n^3+47n^2+244n+405)}{135(n-1)!\,(2n+5)(2n+7)}\,\frac{\langle g^4 j^a_\mu j^a_\mu\rangle}{9(4m_c^2)^3} +$$

$$+\frac{4n(n+1)(n+2)(n+3)}{81(2n+5)(2n+7)(2n+9)(4m_c^2)^4}\times \qquad /2/$$

$$\times\Big[\Big(-\frac{1}{56}n^6+\frac{1511}{840}n^5+\frac{4639}{168}n^4+\frac{4657}{40}n^3-\frac{4297}{210}n^2-\frac{15307}{14}n-1752\Big)\times$$

$$\times\langle g^4\,\mathrm{Sp}(\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\alpha\beta}\hat G_{\alpha\beta})\rangle +$$

$$+\Big(\frac{1}{56}n^6+\frac{169}{840}n^5+\frac{233}{168}n^4-\frac{1811}{120}n^3-\frac{17491}{70}n^2-\frac{14793}{14}n-1416\Big)\times$$

$$\times\langle g^4\,\mathrm{Sp}(\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\alpha\beta}\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\alpha\beta})\rangle +$$

$$+\Big(\frac{23}{140}n^6+\frac{4283}{420}n^5+\frac{64747}{420}n^4+\frac{12595}{12}n^3+\frac{77234}{21}n^2+\frac{226383}{35}n+4512\Big)\times$$

$$\times\langle g^4\,\mathrm{Sp}(\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\nu\alpha}\hat G_{\alpha\beta}\hat G_{\beta\mu})\rangle +$$

$$+\Big(-\frac{23}{140}n^6-\frac{2603}{420}n^5-\frac{28291}{420}n^4-\frac{10399}{60}n^3+\frac{106756}{105}n^2+\frac{213301}{35}n+8592\Big)\times$$

$$\times\langle g^4\,\mathrm{Sp}(\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\alpha\beta}\hat G_{\nu\alpha}\hat G_{\beta\mu})\rangle +$$

$$+\Big(\frac{3}{280}n^6+\frac{1367}{840}n^5+\frac{8157}{280}n^4+\frac{27883}{120}n^3+\frac{35121}{35}n^2+\frac{161939}{70}n+2232\Big)\times$$

$$\times\langle g^5 f_{abc}G^a_{\mu\nu}j^b_\nu j^c_\mu\rangle -$$

$$-n(n+4)\Big(\frac{3}{70}n^4+\frac{253}{210}n^3+\frac{1093}{105}n^2+\frac{255}{7}n+\frac{1586}{35}\Big)\times$$

$$\times\langle g^3 f_{abc}G^a_{\mu\nu}G^b_{\nu\lambda}G^c_{\lambda\mu,\alpha\alpha}\rangle +$$

$$+(n+5)\Big(\frac{9}{280}n^5+\frac{101}{140}n^4+\frac{1331}{168}n^3+\frac{10583}{210}n^2+\frac{2337}{14}n+216\Big)\langle g^4 j^a_\mu j^a_{\mu;\alpha\alpha}\rangle\Big]\Big\},$$

где $\hat G = G^a\lambda^a/2$, λ^a - матрицы Гелл-Манна, $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc}A^b_\mu A^c_\nu$, а цветной векторный ток легких кварков (u, d, s) j^a_μ появился в результате применения уравнений движения $G^a_{\mu\nu;\nu} = g j^a_\mu$. Для ковариантной производной $D^{ab}_\mu O^b$ используется обозначение $O^a_{;\mu}$. В рамках метода КХД правил сумм анализируется разложение в ряд по $O(G^N)$ отношения $r_n = M_n/M_{n-1}$. Напомним, что экспериментальная кривая для r_n при $n\to\infty$ стремится к $m^{-2}_{J/\psi} = 0{,}104$, где $m_{J/\psi}$ - масса J/ψ мезона. Таким образом, если удалось вычислить теоретически величину r_n в области, где экспериментальное значение r_n уже близко к асимптотическому /практически, при $n \geq 6$/, можно оценить соответствующие ВС, используя известное значение $m_{J/\psi}$, и наоборот - можно оценить $m_{J/\psi}$ и массы низших состояний чармония в других каналах, если известны значения ВС. В соответствии с этим, когда мы говорим о сходимости ряда по $1/m_c^2$, всегда подразумевается область $n \sim 6$, в которой r_n^{exp} выходит на асимптотический режим. Для удобства читателей приведем явный вид теоретического предсказания для r_6:

$$r_6 = \frac{7}{36m_c^2}\Big\{1 - 0{,}40\,\alpha_s(2m_c) - 0{,}46\,\frac{\langle g^2 G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}\rangle}{m_c^4} + \frac{1}{m_c^6}\Big[0{,}59\langle g^3 f_{abc}G^a_{\mu\nu}G^b_{\nu\lambda}G^c_{\lambda\mu}\rangle -$$

$$-2{,}08\langle g^4 j^a_\mu j^a_\mu\rangle\Big] + \frac{1}{m_c^8}\Big[3{,}63\langle g^4\,\mathrm{Sp}(\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\alpha\beta}\hat G_{\alpha\beta})\rangle -$$

$$-0{,}49\langle g^4\,\mathrm{Sp}(\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\alpha\beta}\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\alpha\beta})\rangle + 33{,}13\langle g^4\,\mathrm{Sp}(\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\nu\alpha}\hat G_{\alpha\beta}\hat G_{\beta\mu})\rangle -$$

$$-7{,}08\langle g^4\,\mathrm{Sp}(\hat G_{\mu\nu}\hat G_{\alpha\beta}\hat G_{\nu\alpha}\hat G_{\beta\mu})\rangle - 7{,}07\langle g^5 f_{abc}G^a_{\mu\nu}j^b_\mu j^c_\nu\rangle$$

$$-2{,}92\langle g^3 f_{abc}G^a_{\mu\nu}G^b_{\nu\lambda}G^c_{\lambda\mu;\alpha\alpha}\rangle + 3{,}03\langle g^4 j^a_\mu j^a_{\mu;\alpha\alpha}\rangle - 0{,}36\langle g^2 G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}\rangle^2\Big]\Big\},$$

где вклад $<g^2G^2>^2$ обусловлен тем фактом, что r_n есть отношение двух величин, разлагаемых в ряд по $<O(G^N)>$.

3. Оценки величины вакуумных средних

Сама структура выражений /2/, /3/ свидетельствует о том, что рассматриваемое разложение имеет более сложную структуру, чем простой ряд по степеням какого-то одного параметра типа $\frac{<g^2G^2>}{m_c^4}$. На самом деле величина высших степенных поправок зависит от плохо известных на сегодняшний день деталей структуры КХД вакуума, или, с более практической точки зрения, - от оценок, используемых при фиксации величины ВС, имеющихся в /2/.

Кривые, изображенные на рисунке, получены в рамках следующей системы оценок для ВС:

а/ Для $<g^2G^2>$ взято значение /0,83 ГэВ/^{4}, найденное в [1] путем фитирования экспериментальных данных кривой, полученной с учетом только $O(\alpha_s)$ и $O(G^2)$ вкладов /см. рис./.

б/ Для $<jj>$ и $<fGjj>$ мы воспользовались гипотезой доминантности промежуточного вакуумного состояния [1] /гипотезой вакуумной доминантности, ГВД/:

$$<j^a_\mu j^a_\mu> = -\frac{4}{3}<\bar{u}u>^2 ,$$

$$<f_{abc}G^a_{\mu\nu}j^b_\mu j^c_\nu> = -\frac{3}{4}<\bar{u}u><\bar{u}\sigma_{\mu\nu}\hat{G}_{\mu\nu}u> .$$

Согласно оценкам различных авторов [1,11], ГВД для 4-кварковых операторов работает с точностью не хуже 50%.

в/ Все ВС нормированы при $\mu^2=-4m_c^2$, $m_c=1,26$ ГэВ, и комбинации $<g^2G^2>$, $<g^3fG^3>$ и $g<\bar\psi\psi>$ трактуются как ренорм-инварианты.

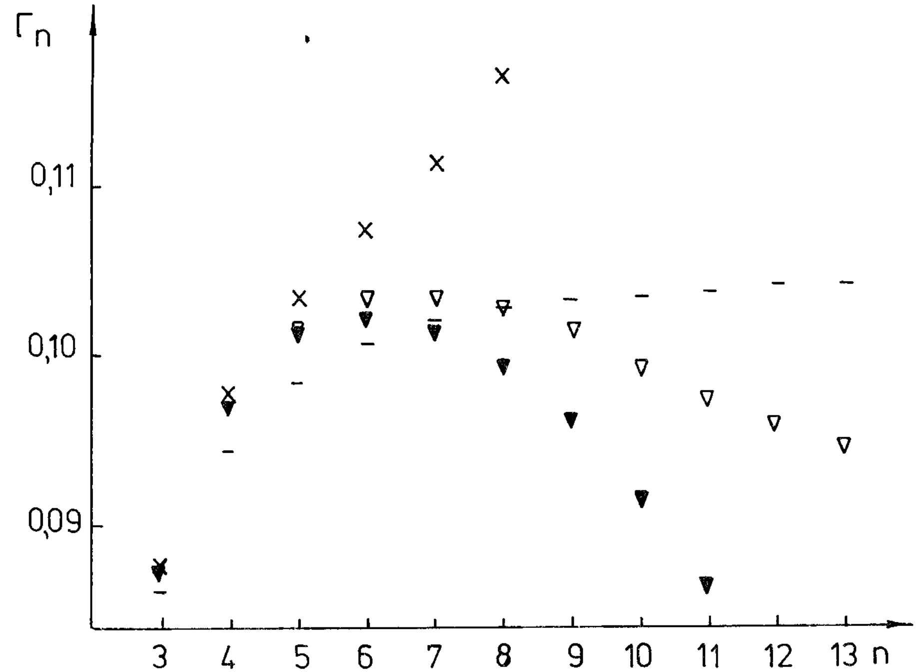
г/ Для параметра Λ мы берем $\Lambda=100$ МэВ, что соответствует $\alpha_s(2m_c)=0,2$, а $\alpha_s(\mu_0)=0,7$, где μ_0 есть точка ренормировки, в которой $<\bar{u}u>$имеет значение $<\bar{u}u>=-$/0,24 ГэВ/^{3}, предписываемое алгеброй токов [1].

д/ $<g^3fG^3>$ вычислено в приближении разреженного инстантонного газа /ПРИГ/. Если принять, что $<g^2G^2>=$/0,83 ГэВ/^{4}, то ПРИГ дает значение [1] $<g^3fG^3>=$/0,60 ГэВ/^{6}, отлично согласующееся с результатами расчетов этой величины на решетке [12]*.

е/ Для ВС операторов, содержащих комбинацию $D_\alpha D^\alpha$, мы приняли, что

---

* Необходимо помнить о том, что $<g^3fG^3>$, вычисленное в евклидовом пространстве, отличается знаком от физической величины $<g^3fG^3>$,относящейся к пространству Минковского.



Отношение $r_n=M_n/M_{n-1}$. /-/ - эксперимент; (▼) - теоретическая кривая с учетом $O(\alpha_s)$ и $O(G^2)$ вкладов; (∇) - то же, с добавлением $O(G^3)$-вклада; (×) - то же, с добавлением $O(G^3)$ и $O(G^4)$-вкладов.

$$<fGGG_{;\alpha\alpha}> = M^2<fGGG>,$$

$$<jj_{;\alpha\alpha}> = M^2<jj>,$$

где $M^2\equiv<GG_{;\alpha\alpha}>/<GG>$ - параметр, характеризующий среднюю виртуальность вакуумных глюонов. Используя соотношение

$$<GG_{;\alpha\alpha}> = 2<gfG^3> - 2<g^2j^2>$$

и рецепты а/-д/, получаем значение $M=0,52$ ГэВ, согласующееся с физической интерпретацией данного параметра. Аналогично, используя

$$<g\bar{u}(\sigma\hat{G})u> = 2<u\hat{D}_\alpha\hat{D}_\alpha u>$$

и предполагая, что кварки и глюоны в вакууме имеют одинаковую среднюю виртуальность, получаем оценку

$$\langle g\bar{u}(\sigma\hat{G})u\rangle = 2M^2\langle\bar{u}u\rangle ,$$

согласующуюся с более ранней оценкой [13], выведенной другим способом.

ж/ Для ВС, имеющих структуру $\langle g^4\,\mathrm{Sp}(G^4)\rangle$, мы также воспользовались ГВД, которая дает следующие значения:

$$\langle g^4\mathrm{Sp}(\hat{G}_{\mu\nu}\hat{G}_{\mu\nu}\hat{G}_{\alpha\beta}\hat{G}_{\alpha\beta})\rangle = \frac{110}{1152}\langle g^2G^2\rangle^2 ,$$

$$\langle g^4\mathrm{Sp}(\hat{G}_{\mu\nu}\hat{G}_{\alpha\beta}\hat{G}_{\mu\nu}\hat{G}_{\alpha\beta})\rangle = \frac{20}{1152}\langle g^2G^2\rangle^2 ,$$

$$\langle g^4\mathrm{Sp}(\hat{G}_{\mu\nu}\hat{G}_{\nu\alpha}\hat{G}_{\alpha\beta}\hat{G}_{\beta\mu})\rangle = \frac{47}{1152}\langle g^2G^2\rangle^2,$$

$$\langle g^4\mathrm{Sp}(\hat{G}_{\mu\nu}\hat{G}_{\alpha\beta}\hat{G}_{\nu\alpha}\hat{G}_{\beta\mu})\rangle = \frac{29}{1152}\langle g^2G^2\rangle^2$$

для этих ВС. В литературе, однако, существуют утверждения [11,14], что ГВД неприменима к оценке ВС операторов, составленных из глюонных полей. Согласно [11,14], ГВД занижает отношение $\langle g^4G^4\rangle/\langle g^2G^2\rangle^2$ в 5-10 раз.

4. Большие $O(G^4)$ поправки в КХД правилах сумм для чармония

Используя для ВС значения, полученные в рамках приведенной выше системы оценок, находим для r_6:

$$r_6 = 0{,}1225\{1 - 0{,}080 - [0{,}086] + [0{,}007 + 0{,}003] + [0{,}012 - 3\times10^{-4} + 0{,}048 - 0{,}006 + 0{,}002 - 0{,}006 - 8\times10^{-4} - 0{,}013]\} . \qquad /4/$$

Из /3/, /4/ ясно, что, во-первых, $O(G^4)$ поправка при $n=6$ велика, а во-вторых, что наибольший вклад в нее связан с одним единственным ВС $\langle g^4\mathrm{Sp}(\hat{G}_{\mu\nu}\hat{G}_{\nu\alpha}\hat{G}_{\alpha\beta}\hat{G}_{\beta\mu})\rangle \equiv O_4^{(3)}$, перед которым в /3/ стоит коэффициент, примерно на порядок превышающий остальные *. Заметим также, что ощутимые отрицательные вклады, во-первых, существенно меньше, чем вклад, обусловленный $O_4^{(3)}$, во-вторых, соответствующие ВС $\langle fGGG_{;aa}\rangle$, $O_4^{(4)}$ и $\langle g^2G^2\rangle^2$ в любой разумной модели КХД не могут быть увеличены без одновременного увеличения $O_4^{(3)}$. Далее, если ВС типа $\langle g^4G^4\rangle$ увеличить на фактор порядка 10 /т.е. принять модель [11]/, то $O(G^4)$ - поправка при $n=6$ будет раз в пять больше, чем $O(G^2)$-вклад. Однако, если даже принять умеренную оценку $O_4^{(3)}$ по ГВД, учет $O(G^4)$-вкладов радикально меняет теоретическую кривую для r_n /см. рис./. В частности, результирующая кривая не имеет даже намека на плато и может быть согласована с экспериментальными данными лишь при низших $n=2,3,4$. Значение $\langle g^2G^2\rangle$, найденное при таком фитировании /при фиксированном значении массы $m_c=1{,}26$ ГэВ/, примерно в 2 раза превосходит оценку, данную в [1], что согласуется с прогнозами работ [4-6].

* Здесь необходимо подчеркнуть, что в рамках нашей системы оценок все ВС, дающие вклад в $O(m_c^{-8})$ поправку, близки по порядку величины.

5. Заключение

Таким образом, в области, где доминирует вклад низшего состояния чармония, ряд по $1/m_c^2$ в реальной хромодинамике сходится довольно медленно.

В частности, для получения стабильного по отношению к следующим степенным поправкам плато функции r_n необходимо учесть, по крайней мере, $O(G^5)$ и $O(G^6)$-поправки. В такой ситуации предложенная в [1] процедура определения $\langle g^2G^2\rangle$ сводится к нахождению эффективного параметра $\langle g^2G^2\rangle_{\text{эфф.}}$, вбирающего в себя /при $n=5$-7/ наиболее важные степенные поправки более высоких порядков, вплоть до $O(G^6/m_c^{12})$ или даже $O(G^8/m_c^{16})$. С учетом того, что $(G^2/m^4)^k$ - члены имеют чередующиеся знаки, следует ожидать, что значение $\langle g^2G^2\rangle_{\text{эфф.}}$ для Υ- частиц должно быть большим, чем для чармония, как это и было обнаружено Волошиным [10].

Более того, не исключено, что величина $\langle g^2G^2\rangle_{\text{эфф.}}$ в канале η_c может отличаться от соответствующего значения в J/ψ канале, хотя успешное предсказание массы η_c-мезона [15] указывает, по-видимому, на близость этих двух величин. Однако в свете обнаруженной нами медленной сходимости ряда по $1/m_c^2$ успехи метода КХД правил сумм для чармония выглядят скорее удивительными, чем закономерными, и необходим дальнейший детальный анализ структуры этих правил сумм.

Мы признательны В.А.Бейлину, А.В.Ефремову и Б.М.Барбашову за обсуждение результатов, В.А.Мещерякову - за интерес к данной работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl.Phys., B, 1979, 147, p. 385, 447.
2. Вайнштейн А.И. и др. ЯФ, 1980, 32, с. 1622. Novikov V.A. et al. Nucl.Phys.B, 1981, 191, p. 301.
3. Voloshin M.B. Nucl.Phys.B, 1979, 154, p. 365.
4. Bell J.S., Bertlmann R.A. Nucl.Phys.B, 1981, 177, p. 218, 187, 285.
5. Bradley A., Langensiepen C.S., Shaw G. Phys. Lett. B, 1981, 102, p. 359.
6. Ditsas P., Shaw G. Preprint MXC-TH-82-09, Manchester University, 1982.

7. Nikolaev S.N., Radyushkin A,V, Phys.Lett. B, 110, p. 476.
8. Nikolaev S.N., Radyshkin A.V. JINR, E2-82-521, Dubna, 1982.
9. Strubbe H. Comp. Phys.Comm., 1974, 8, p. 1.
10. Voloshin M.B. Preprint ITEP-21, M., 1980.
11. Shuryak E.V. Nucl.Phys., 1982, 203, p. 93, 116, 140.
12. Di Giacomo A. et al. Preprint IFUP-TH 13/82, Pisa, 1982.
13. Novikov V.A. et al. Proc. Int.Cont. "Neutrino 78". Lafayette, 1978, p. C278.
14. Baier V.N., Pinelis Yu.F. Preprint IYaF 81-141, Novocibirsk, 1981.
15. Shifman M.A. et al. Phys.Lett. B, 1980, &&, p. 80.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1982 года.

Николаев С.Н., Радюшкин А.В. P2-82-720

Квантово-хромодинамические правила сумм для чармония с учетом $O(G^4)$ вкладов

Показано, что учет $O(G^4)$-поправок радикально меняет вид теоретической кривой для отношения r_n, используемого при анализе низших состояний чармония методом КХД правил сумм, что ставит под сомнение надежность теоретической базы для существующих приложений этого метода.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Nikolaev S.N., Radyushkin A.V. P2-82-720

QCD Charmonium Sum Rules Up to $O(G^4)$ Order

It is shown that inclusion of the $O(G^4)$ terms radically changes the theoretical curve for the ratio r_n used to analyze the lowest charmonium states within the QCD sum rule approach. This casts a doubt on the soundness of the theoretical basis underlying the existing applications of the QCD sum rules to charmonium states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.