объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-684

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

Направлено в журнал "Letters in Mathematical Physics"

1982

Недавно было показано[1], что ряд важных с прикладной точки зрения нелинейных эволюционных уравнений допускает операторное представление

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + [\,\mathfrak{A}\,,\ \mathfrak{L}\,] = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{L}, \qquad /1/$$

если использовать оператор $\mathfrak{L}$ со следующей матричной структурой:

$$\mathfrak{L} = \left| \begin{array}{cccc} L-\lambda\partial_y & v_1 & \cdots & v_{\mu_1} \\ w_1 & \partial_x & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ w_{\mu_1} & 0 & & \partial_x \end{array} \right| , \quad \mu_1 \geq 1, \qquad /2/$$

где

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y},$$

оператор L имеет вид

$$L = \partial_x^{m_o+2} + \sum_{m=o}^{m_o} u_m \partial_x^m, \quad m_o \geq 0, \qquad /3/$$

функции $u_o, \ldots, u_{m_o}$, $v_1, \ldots, v_{\mu_1}$, $w_1, \ldots, w_{\mu_1}$ зависят от пространственных переменных x, y и времени t, λ - подходящим образом выбираемая константа, а $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ - дифференциальные по x, , y операторы, точный вид которых будет указан ниже.

Соотношение /1/ может быть переписано в следующем виде:

$$\mathfrak{L}\cdot T = \hat{T}\cdot\mathfrak{L},$$

где

$$T = \partial_t + \mathfrak{A}, \quad \hat{T} = \partial_t + \hat{\mathfrak{A}}, \quad \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что оператор T переводит любое решение ϕ уравнения $\mathfrak{L}\phi = 0$ в решение этого же уравнения. Этот факт имеет принципиальное значение в применении метода обратной задачи к исследованию нелинейных эволюционных уравнений, как это было впервые продемонстрировано в[2]. В понимании природы этого явления важную роль сыграли работы[3,4]. За прошедшее после опубликования этих работ время рядом авторов было получено существенное продвижение в развитии метода обратной задачи и в его применении к исследованию различных нелинейных задач. В частности, с помощью метода обратной задачи был получен ряд важных результатов в исследовании нелинейных систем, зависящих от двух и более пространственных переменных[5,6].

В настоящей работе с помощью соотношения /1/ найдены четыре новые нелинейные эволюционные системы, описывающие взаимодействие волн на плоскости x, y. Волны с такого рода взаимодействием встречаются в гидродинамике и в физике плазмы. В действительности приведенный здесь список нелинейных эволюционных систем, интегрируемых с помощью метода обратной задачи для оператора $\mathfrak{L}$ вида /2/, может быть существенно пополнен путем рассмотрения других вариантов выбора операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, входящих в соотношение /1/. Отметим, что использованный в настоящей работе метод получения операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ основан на опубликованных ранее результатах автора[7-9]. Рассмотрению прикладных аспектов статьи будет посвящена отдельная работа.

Укажем теперь явный вид операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, входящих в соотношение /1/, и явный вид получаемых с их помощью нелинейных эволюционных уравнений для различных операторов L вида /3/, т.е. для различных значений m_o. Нами будут рассмотрены случаи $m_o=0$ и $m_o=1$.

I. Начнем с простейшего случая. Пусть

$$\mathfrak{A} = cA, \qquad \hat{\mathfrak{A}} = c\hat{A},$$

где c - константа, а операторы A и $\hat{A}$ имеют следующую матричную структуру:

$$A = \left| \begin{array}{cc} P & \\ q_1 & \\ \vdots & 0 \\ q_{\mu_1} & \end{array} \right| \qquad \hat{A} = \left| \begin{array}{cccc} P & p_1 & \cdots & p_{\mu_1} \\ & & 0 & \\ & & & \end{array} \right| .$$

Полагая $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \hat{\mathfrak{A}}$ и подставляя в /1/, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[P, L] + c\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + c\sum_{\mu=1}^{\mu_1} (p_\mu \cdot w_\mu - v_\mu q_\mu) = 0,$$

$$\dot{v}_\mu + c(P\cdot v_\mu + p_\mu\,\partial_x) = 0, \quad \dot{w}_\mu = c(w_\mu P + \partial_x\cdot q_\mu), \qquad /4/$$

$$\mu = 1, \ldots, \mu_1,$$

где точкой, как и всюду в дальнейшем, обозначена производная по t. Пусть, далее, P - произвольный дифференциальный по x оператор вида

$$P = \partial_x^{n_0+2} + \sum_{n=0}^{n_0} P_n \partial_x^n , \quad n_0 \geq 0 . \qquad /5/$$

Определим операторы $p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ и $q_1, \ldots, q_{\mu_1}$ исходя из условия, чтобы операторы

$$\hat{p}_\mu = P \cdot v_\mu + p_\mu \partial_x , \quad \hat{q}_\mu = w_\mu P + \partial_x \cdot q_\mu ,$$

$$\mu = 1, \ldots, \mu_1 ,$$

имели нулевой порядок, т.е. были операторами умножения на функцию. Очевидно, что это всегда возможно и притом единственным образом. Далее, нетрудно видеть, что определенные так операторы $p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ и $q_1, \ldots, q_{\mu_1}$ имеют вид

$$p_\mu = -v_\mu \partial_x^{n_0+1} + \alpha_\mu , \quad q_\mu = -w_\mu \partial_x^{n_0+1} + \beta_\mu ,$$

где операторы α_μ и β_μ имеют порядок не выше n_0, $\mu = 1, \ldots, \mu_1$. Отсюда следует, что порядок оператора

$$\gamma = \sum_{\mu=1}^{\mu_1} (p_\mu \cdot w_\mu - v_\mu q_\mu)$$

не превосходит n_0. Таким образом, если $m_0 \geq n_0$, а оператор P вида /5/ выбран так, что порядок оператора

$$\delta = [P, L]$$

не превосходит m_0, то при таком определении операторов P, $p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ и $q_1, \ldots, q_{\mu_1}$ равенства /4/ определяют корректным образом некоторую нелинейную эволюционную систему.

Проиллюстрируем сказанное на нескольких примерах.

1. При $m_0 = 0$ положим

$$P = L, \quad p_\mu = -\partial_x \cdot v_\mu - v'_\mu ,$$

$$q_\mu = -w_\mu \partial_x + w'_\mu , \quad \mu = 1, \ldots, \mu_1 ,$$

где штрих, как и всюду в дальнейшем, означает производную по x.

В этом случае системы /4/ принимает вид

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + c\lambda \frac{\partial u_0}{\partial y} = 2c \sum_{\mu=1}^{\mu_1} \frac{\partial}{\partial x}(v_\mu w_\mu),$$

$$\dot{v}_\mu + c(u_0 v_\mu + v''_\mu) = 0, \quad \dot{w}_\mu = c(u_0 w_\mu + w''_\mu), \quad \mu = 1, \ldots, \mu_1 . \qquad /6/$$

При $c = \lambda = -i$ система /6/ имеет 2^{μ_1} инвариантных многообразия, определяемых условиями

$$u_0 = \bar{u}_0 = u, \quad w_\mu = i\epsilon_\mu \bar{v}_\mu , \quad \epsilon_\mu = \pm 1, \quad \mu = 1, \ldots, \mu_1 ,$$

где чертой, как и всюду в дальнейшем, обозначено комплексное сопряжение. Движение на этих многообразиях подчиняется уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \sum_{\mu=1}^{\mu_1} \epsilon_\mu \frac{\partial}{\partial x} |v_\mu|^2 ,$$

$$i \frac{\partial v_\mu}{\partial t} + \frac{\partial^2 v_\mu}{\partial x^2} + u v_\mu = 0, \quad \mu = 1, \ldots, \mu_1 . \qquad /7/$$

2. При $m_0 = 1$ положим

$$P = \partial_x^2 + \frac{2}{3} u_1 , \quad p_\mu = -\partial_x \cdot v_\mu - v'_\mu , \quad q_\mu = -w_\mu \partial_x + w'_\mu ,$$

$$\mu = 1, \ldots, \mu_1 .$$

В силу равенства

$$[P, L] = f'_1 \partial_x + f'_0 ,$$

где

$$f_1 = 2u_0 - u'_1 , \quad f_0 = u'_0 - \frac{2}{3} u''_1 - \frac{1}{3} u_1^2 ,$$

вытекающая из /4/ система уравнений в данном случае имеет вид

$$\dot{u}_1 + c f'_1 = 0, \quad \dot{u}_0 + c f'_0 + \frac{2}{3} c\lambda \frac{\partial u_1}{\partial y} = 2c \sum_{\mu=1}^{\mu_1} \frac{\partial}{\partial x}(v_\mu w_\mu) , \qquad /8/$$

$$\dot{v}_\mu + c\left(\frac{2}{3} u_1 v_\mu + v''_\mu\right) = 0, \quad \dot{w}_\mu = c\left(\frac{2}{3} u_1 w_\mu + w''_\mu\right),$$

$$\mu = 1, \ldots, \mu_1 .$$

Положим теперь

$$u_1 = \frac{3}{2} u , \quad u_0 = \frac{3}{4} u' + ip . \qquad /9/$$

В результате этой замены первые два уравнения системы /8/ примут вид

$$\dot{u} + \frac{4i}{3} c p' = 0,$$

$$\dot p + \frac{ic}{4}(3u^2 + u'')' - ic\lambda\frac{\partial u}{\partial y} + 2ic\sum_{\mu=1}^{\mu_1}\frac{\partial}{\partial x}(v_\mu w_\mu) = 0 .$$

Исключив отсюда p, получим уравнение

$$\ddot u + \frac{c^2}{3}(3u^2 + u'')'' - \frac{4c^2}{3}\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{8}{3}c^2\sum_{\mu=1}^{\mu_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_\mu w_\mu) = 0 .$$

Таким образом, после замены /9/ система /8/ приняла вид

$$\ddot u + \frac{c^2}{3}(3u^2 + u'')'' - \frac{4c^2}{3}\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{8}{3}c^2\sum_{\mu=1}^{\mu_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_\mu w_\mu) = 0 ,$$

$$\dot v_\mu + c(uv_\mu + v''_\mu) = 0, \quad \dot w_\mu = c(uw_\mu + w''_\mu), \qquad /10/$$

$$\mu = 1,\dots,\mu_1 .$$

При $c=-i$, $\lambda=-\frac{1}{4}$ система /10/ имеет 2^{μ_1} инвариантных многообразия, определяемых равенствами

$$u=\bar u, \quad w_\mu = \epsilon_\mu \bar v_\mu , \quad \epsilon_\mu = \pm 1, \quad \mu = 1,\dots,\mu_1 .$$

Движение на этих многообразиях описывается уравнениями

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) =$$

$$= 8\sum_{\mu=1}^{\mu_1}\epsilon_\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}|v_\mu|^2 , \qquad /11/$$

$$i\frac{\partial v_\mu}{\partial t} + \frac{\partial^2 v_\mu}{\partial x^2} + uv_\mu = 0, \quad \mu = 1,\dots,\mu_1 .$$

Заменим теперь в системе /11/ t на y, а y на t. В результате получим следующую важную систему:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) =$$

$$= 8\sum_{\mu=1}^{\mu_1}\epsilon_\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}|v_\mu|^2 ,$$

$$i\frac{\partial v_\mu}{\partial y} + \frac{\partial^2 v_\mu}{\partial x^2} + uv_\mu = 0, \quad \mu = 1,\dots,\mu_1 . \qquad /12/$$

3. Возвращаясь к случаю $m_0=1$, положим

$$P = L, \quad p_\mu = -\partial_x^2\cdot v_\mu - \partial_x\cdot v'_\mu - v''_\mu - u_1 v_\mu ,$$

$$q_\mu = -w_\mu\partial_x^2 + w'_\mu\partial_x - w''_\mu - u_1 w_\mu , \quad \mu = 1,\dots,\mu_1 .$$

В этом случае система /4/ может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + c\lambda\frac{\partial u_1}{\partial y} = 3c\sum_{\mu=1}^{\mu_1}\frac{\partial}{\partial x}(v_\mu w_\mu),$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + c\lambda\frac{\partial u_0}{\partial y} = 3c\sum_{\mu=1}^{\mu_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x}w_\mu\right),$$

$$\dot v_\mu + c(u_0 v_\mu + u_1 v'_\mu + v'''_\mu) = 0 , \qquad /13/$$

$$\dot w_\mu + c(-u_0 w_\mu + (u_1 w_\mu)' + w'''_\mu) = 0, \quad \mu = 1,\dots,\mu_1 .$$

При $c=\lambda=1$ система /13/ имеет 2^{μ_1} инвариантных многообразия, определяемых условиями $u_1 = 2u$, $u_0 = u'$, $w_\mu = \epsilon_\mu v_\mu$, $\epsilon_\mu = \pm 1$, $\mu=1,\dots,\mu_1$. Движение на этих многообразиях задается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} = 3\sum_{\mu=1}^{\mu_1}\epsilon_\mu v_\mu\frac{\partial v_\mu}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}v_\mu + 2u\frac{\partial v_\mu}{\partial x} + \frac{\partial^3 v_\mu}{\partial x^3} = 0, \quad \mu = 1,\dots,\mu_1 . \qquad /14/$$

II. Система /4/ пригодна для получения нелинейных эволюционных уравнений и в случае $m_0 < n_0$, т.е. в случае, когда порядок оператора P вида /5/ больше порядка оператора L вида /3/. Не вдаваясь в этом случае в подробное описание алгоритма для нахождения операторов $P, p_1,\dots,p_{\mu_1}$ и $q_1,\dots,q_{\mu_1}$, приведем один пример, относящийся к случаю $m_0=0$. Пусть

$$u = u_o, \quad P = \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u' - \frac{3}{2}\sigma + f,$$

$$p_\mu = -\partial_x^2 \cdot v_\mu - \partial_x \cdot v'_\mu - v''_\mu - \frac{3}{2}uv_\mu, \qquad /15/$$

$$q_\mu = -w_\mu \partial_x^2 + w'_\mu \partial_x - w''_\mu - \frac{3}{2}uw_\mu, \quad \mu = 1,\dots,\mu_1,$$

где f - неизвестная пока функция, а

$$\sigma = \sum_{\mu=1}^{\mu_1} v_\mu w_\mu .$$

Полагая

$$\rho = \sum_{\mu=1}^{\mu_1} (v_\mu w'_\mu - v'_\mu w_\mu),$$

получаем, что в рассматриваемом случае вытекающая из /4/ система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4}\frac{\partial}{\partial x}(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \frac{3c}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{3c}{2}\lambda\frac{\partial \sigma}{\partial y} + c\lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\dot v_\mu + c(v'''_\mu + \frac{3}{2}uv'_\mu + \frac{3}{4}u'v_\mu - \frac{3}{2}\sigma v_\mu + fv_\mu) = 0, \qquad /16/$$

$$\dot w_\mu + c(w'''_\mu + \frac{3}{2}uw'_\mu + \frac{3}{4}u'w_\mu + \frac{3}{2}\sigma w_\mu - fw_\mu) = 0,$$

$$\mu = 1,\dots,\mu_1,$$

если выбор функции f в равенстве /15/ подчинить условию

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3\lambda}{4}\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad /17/$$

При $c=4$, $\lambda = i$, $f = \frac{3i}{4}p$ система уравнений /16/, /17/ имеет 2^{μ_1} инвариантных многообразия, определяемых равенствами

$$u = \bar u, \quad p = \bar p, \quad w_\mu = i\epsilon_\mu \bar v_\mu, \quad \epsilon_\mu = \pm 1, \quad \mu = 1,\dots,\mu_1 .$$

Движение на этих многообразиях удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6\frac{\partial R}{\partial x} + 6\frac{\partial S}{\partial y} - 3\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x}v_\mu + 6u\frac{\partial v_\mu}{\partial x} + 4\frac{\partial^3 v_\mu}{\partial x^3} = 6iSv_\mu - 3ipv_\mu,$$

$$\mu = 1,\dots,\mu_1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

где

$$S = \sum_{\mu=1}^{\mu_1} \epsilon_\mu |v_\mu|^2, \quad R = i\sum_{\mu=1}^{\mu_1} \epsilon_\mu (v_\mu \frac{\partial \bar v_\mu}{\partial x} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x}\bar v_\mu).$$

Исключив отсюда p, получим следующую систему:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}) = \bar 6\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}, \qquad /18/$$

$$\dot v_\mu + 3u'v_\mu + 6uv'_\mu + 4v'''_\mu = 6iSv_\mu - 3iv_\mu \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}dx',$$

$$\mu = 1,\dots,\mu_1 .$$

В заключение отметим, что при $v_1 = \dots = v_{\mu_1} \equiv 0$ системы /12/ и /18/ сводятся к одному хорошо известному уравнению Кадомцева-Петвиашвили [10]. Пара Лакса для этого уравнения впервые была найдена в работе [11]. Далее, не зависящие от y решения системы /7/ при $\mu_1 = 1$ удовлетворяют найденной ранее системе [12], а не зависящие от y решения системы /14/ при $\mu_1 = 1$ удовлетворяют системе, полученной независимо в работах [8,13]. Наконец, не зависящие от y решения системы /11/ при $\mu_1 = 1$ удовлетворяют системе, приведенной в работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В.К. Матем.сборник, 1979, 108, №3, 378-392.
2. Gardner C.S. et al. Phys.Rev.Lett., 1967, 19, No.19, p. 1095-1097.
3. Lax P. Comm.Pure Appl. Math., 1968, 21, No.5, p. 467-490.

4. Ablowitz M.J. et al. Phys.Rev.Lett., 1973, 31, No.2, p. 125-127.
5. Solitons (ed. by R.K.Bullough, P.J.Caudrey). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.
6. Теория солитонов /под ред. С.П.Новикова/. "Наука", М., 1980.
7. Мельников В.К. Функц.анализ, 1981, 15, вып. 1, с. 43-60.
8. Мельников В.К. ОИЯИ, Р2-82-129, Дубна, 1982.
9. Мельников В.К. ОИЯИ, Р2-82-337, Дубна, 1982.
10. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, 192, №4, с. 753-756.
11. Дрюма В.С. Письма в ЖЭТФ, 1974, 19, №2, с. 753-755.
12. Мельников В.К. УМН, 1982, 37, вып. 4, с. 111.
13. Wilson G. Phys.Lett., 1982, 89A, No.7, p. 332-334.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1982 года.

Мельников В.К. Р2-82-684

Об уравнениях, описывающих взаимодействие волн

Найдено несколько новых нелинейных эволюционных уравнений, описывающих взаимодействие волн на плоскости x, y. Показано, что для исследования этих уравнений применим метод обратной задачи.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Mel'nikov V.K. P2-82-684

On Equations for the Wave Interactions

A number of new nonlinear evolution equations for the interaction of waves on the x, y - plane is found. It is shown that these equations may be investigated by the inverse scattering method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод автора.