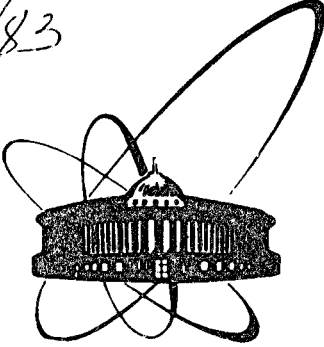


177/83



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

10/1-83

P2-82-672

А.В.Ефремов, В.А.Нестеренко, А.В.Радюшкин

ФОРМФАКТОР ПИОНА В СКАЛЯРНОЙ МОДЕЛИ

Направлено в журнал "Nuovo Cimento, A"

1982

## I. ВВЕДЕНИЕ

Пертурбативная квантовая хромодинамика, как хорошо известно, применима к анализу поведения электромагнитного формфактора пиона  $F_\pi(Q^2)$  при асимптотически больших пространственно-подобных передачах импульса  $Q^2$  ( $Q^2 \geq 0$ ) /см.<sup>1-3</sup>/. Вопрос, однако, в том, при каких  $Q^2$  начинается асимптотика. С одной стороны, экспериментально установлено, что  $Q^2 F_\pi^{\text{exp}}(Q^2) \approx 0,4$  в области  $2 \leq Q^2 \leq 4$  /ГэВ<sup>2</sup>/, а КХД предсказывает, что при достаточно больших  $Q$  произведение  $Q^2 F_\pi(Q^2)$  представляет собой функцию, слабо /логарифмически/ зависящую от  $Q^2$ . В связи с этим может создаться впечатление, что уже при передачах  $Q^2 \leq 2$  /ГэВ<sup>2</sup>/, которые в лучшем случае можно считать "умеренно большими" /наступает асимптотический режим. Однако как раз в области не слишком больших  $Q^2$  имеющаяся в теоретической формуле  $Q^2 F_\pi^{\text{th}}(Q^2) \sim \alpha_s(Q^2)$  логарифмическая зависимость оказывается довольно сильной. Более того,  $\alpha_s(Q^2)$  представляет собой функцию, убывающую с ростом  $Q^2$ , тогда как произведение  $Q^2 F_\pi^{\text{exp}}(Q^2)$  в области  $1 \leq Q^2 \leq 4$  /ГэВ<sup>2</sup>/ растет. Вследствие этого экспериментальная кривая либо вообще не пересекается с теоретическими кривыми /отличающимися друг от друга выбором волновой функции пиона и масштабом  $\Lambda$  / в области  $0 < Q^2 < 4$  /ГэВ<sup>2</sup>/, либо пересекается чуть ли не под прямым углом.

В работе<sup>5</sup> отмечалось, что в области экспериментально доступных передач импульса нельзя пренебрегать вкладом операторов твиста 3 ( $\bar{\psi} \gamma_5 D^n \psi$ ,  $\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} D^m \psi$ ), поскольку параметр, задающий масштаб связанных с ними степенных поправок  $0(\mu^2/Q^2)$ , аномально велик:  $M = m_\pi^2 / (m_u + m_d) \approx 1,8$  /ГэВ. Однако последовательный учет таких вкладов в значительной мере затрудняется появлением в диаграммах высших порядков /начиная с 1 петли/ "ненормированных" /или "экзотических" / логарифмов<sup>1,3,5</sup>, которые нельзя абсорбировать в перенормировку волновой функции пиона. С аналогичной проблемой приходится иметь дело и при анализе нуклонных формфакторов<sup>3,6</sup>. В работе<sup>6</sup> утверждается, что "экзотические" вклады подавлены судаковским формфактором и в асимптотике, следовательно, ими можно пренебречь. Неизвестно, однако, при каких  $Q^2$  эта асимптотика наступает, и поэтому задача учета экзотических /и связанных с ними/ логарифмов не снята пока с повестки дня.

Исследование "обсуждаемой проблемы в КХД затрудняется, в первую очередь, сложной структурой самой теории. Известно, однако, что экзотические логарифмы появляются и в более простых скалярных моделях типа  $\phi^3$ . Поэтому для уяснения специфики задачи имеет смысл проанализировать сначала формфактор простейшей двухчастич-

ной системы в скалярной модели. Эта задача в качестве одного из примеров обсуждалась вкратце в нашей работе<sup>1</sup>. Затем появилась работа Чао<sup>7</sup>, целиком посвященная анализу  $F_\pi(Q^2)$  в рамках главного логарифмического приближения /ГЛП/ модели  $\phi^3$ . Однако в<sup>7</sup> /как и в более ранней работе<sup>8</sup>/ неявно используются упрощающие предположения, которые, как показывает более детальный анализ, неверны. В частности, в<sup>7</sup> пропущена целая серия ведущих в ГЛП вкладов, учет которой радикально меняет структуру конечного результата. "В оправдание" автора<sup>7</sup> можно, однако, отметить, что необходимость учета этой серии вкладов далеко не очевидна в рамках использованного в<sup>7</sup> подхода, основанного на судаковской параметризации, но совершенно естественна с точки зрения метода анализа асимптотик диаграмм в  $\alpha$ -представлении<sup>1,9,10</sup>. К сожалению, большинство теоретиков, занимающихся КХД, практически незнакомо с этим методом. Исходя из этого, мы строим изложение в настоящей работе следующим образом. В разделе II анализируются простейшие древесные диаграммы и формулируются основные принципы анализа в  $\alpha$ -представлении. В разделе III на примере простейшей 1-петлевой диаграммы излагается наш метод анализа логарифмических вкладов, который обобщается в разделе IV на диаграммы произвольного порядка. В разделе V проводится параллель между суммированием в  $\alpha$ -представлении и более привычным для большинства теоретиков методом, основанным на операторных разложениях и ренормгруппе. В разделе VI, пользуясь приемами, изложенными в предыдущих разделах, мы исследуем диаграммы, содержащие экзотические вклады, и приводим их суммирование в рамках ГЛП. В разделе VII сформулированы некоторые выводы, которые сохраняют свою силу и для таких сложных теоретико-полевых моделей, как КХД.

## II. БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим модель, в которой "пион" состоит из двух скалярных "кварков",  $\psi_1$ ,  $\psi_2^*$ , взаимодействующих друг с другом /в 6-мерном пространстве-времени/ посредством обмена вещественным скалярным "глюонным" полем  $\phi$ :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g(\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2) \phi. \quad /1/$$

Эта модель, как хорошо известно, является перенормируемой и, более того, асимптотически свободной. Эффективная константа связи  $\bar{g}(Q)$ , следовательно, мала при достаточно больших импульсах  $Q$  и /предположительно/ велика при импульсах порядка энергии связи кварков в адронах. Это означает, что стандартные методы анализа свойств связанных состояний, основанные на формализме Бете-Солпитера<sup>11</sup>, в данном случае неприменимы. Поэтому мы не будем даже пытаться решать уравнение типа Бете-Солпитера, а начнем наше ис-

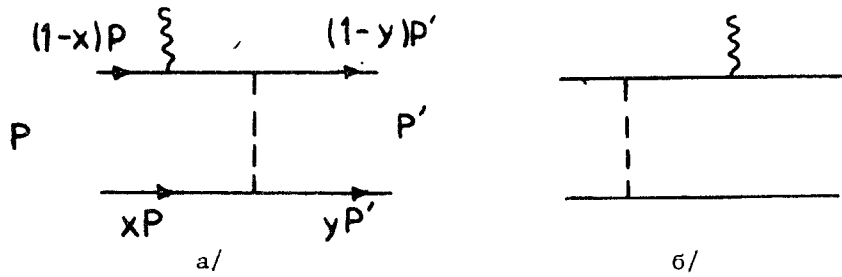


Рис.1. Борновское приближение.

следование с анализа асимптотики формфактора модельной системы  $|x, P\rangle$ , образованной двумя параллельно движущимися кварками,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , имеющими импульсы

$$p_1 = (1-x)P, \quad p_2 = xP, \quad p_1^2 = p_2^2 = P^2 = 0 \quad /2/$$

/рис.1/. Для упрощения анализа мы рассмотрим скалярный формфактор, соответствующий взаимодействию с током

$$j = e \psi_1^* \psi_1, \quad /3/$$

где  $e$  - "электрический" заряд кварка  $\psi_1$ . Амплитуда перехода  $\langle y, P' | j | x, P \rangle$  в низшем порядке по  $g$  дается двумя диаграммами /рис.1/:

$$T^{(1)}(x, y, Q^2) = eg^2 \left\{ \frac{1}{xyQ^2 + m^2} \frac{1}{xQ^2 + m_1^2} + (x \rightarrow y) \right\}, \quad /4/$$

где  $Q^2 = -(P' - P)^2$ ,  $m(m_1)$  - масса глюона /кварка  $\psi_1$ /. Если функции  $x, y$  отличны от нуля, тогда при больших  $Q^2$  можно пренебречь массами в /4/ и получить, что в асимптотике  $T^{(1)} \sim 1/Q^4$ .

Конечно, вряд ли кварки в реальном пионе всегда имеют фиксированные импульсы  $xP, (1-x)P$ , поэтому рассмотрим более сложную систему  $|P\rangle$ , представляющую собой суперпозицию состояний  $|x, P\rangle$  с некоторым весом  $\Phi_0(x)$ :

$$|P\rangle = \int_0^1 dx \Phi_0(x) |x, P\rangle. \quad /5/$$

Используя /4/, нетрудно найти формфактор такой системы в низшем порядке по  $g^2$ :

$$F^{(1)}(Q^2) = eg^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \Phi_0^*(y) \Phi_0(x) \left\{ (xyQ^2 + m^2)^{-1} (xQ^2 + m_1^2)^{-1} + (x \rightarrow y) \right\}. \quad /6/$$

Казалось бы, и в этом случае при  $Q^2 \rightarrow \infty$  можно пренебречь массами в /6/ и получить, что в асимптотике также имеет место поведение  $1/Q^4$ :

$$F_{as}^{(1)}(Q^2) = \frac{eg^2}{Q^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \Phi_0^*(y) \Phi_0(x) \left\{ \frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{xy^2} \right\}. \quad /7/$$

Это справедливо, однако, лишь в том случае, если интеграл

$$I[\Phi_0] = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \Phi_0(x) \quad /8/$$

сходится. Сходимость /8/ может быть обеспечена, в частности, выполнением следующих условий: а/  $\Phi_0(x)$  представляет собой некоторую гладкую функцию, конечную на отрезке  $[0,1]$ , б/ при  $x \rightarrow 0$  функция  $\Phi_0(x)$  ведет себя, как  $x^\Delta$ , причем  $\Delta > 1$ . Первое требование очень естественно для системы, имитирующей связанное состояние, и в дальнейшем мы всегда будем считать, что оно выполняется. С другой стороны, нет никаких очевидных причин, запрещающих показателю  $\Delta$  быть меньше 1. В последнем случае, однако, асимптотика  $F^{(1)}(Q^2)$  будет определяться интегрированием по малым  $x, y$  и степенной закон поведения соответствующего вклада будет зависеть от  $\Delta$ :

$$F_{as}^{(1)}(Q^2) \sim (Q^2)^{-1-\Delta} \quad (0 < \Delta < 1). \quad /9/$$

В этом нетрудно убедиться непосредственным вычислением интеграла /6/, но мы дадим вывод /9/ с помощью более рафинированного метода, который весьма эффективен и при анализе высших порядков ТВ.

В основе метода лежит  $\alpha$ -представление для пропагатора

$$(m_\sigma^2 - k_\sigma^2 - i\epsilon)^{-1} = i \int_0^\infty d\alpha_\sigma e^{i\alpha_\sigma (k_\sigma^2 - m_\sigma^2 + i\epsilon)} \quad /10/$$

где  $m_\sigma$  и  $k_\sigma$  - масса и импульс, соответствующие линии  $\sigma$ . Отметим, что согласно /10/ поведение пропагатора при больших  $k^2$  дается интегрированием по области "малых"  $\alpha$  ( $\alpha \lesssim 1/k^2$ ).

В нашем случае все внутренние импульсы пространственно-подобны, поэтому можно сделать виковский поворот и использовать формулу, в которой факторы  $i$  отсутствуют. В частности, /6/ можно записать в виде

$$F^{(1)}(Q^2) = eg^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \Phi_0(y) \Phi_0(x) \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \times \\ \times \left\{ \exp[-xQ^2(\alpha_1 + \alpha_2 y) - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m^2] + (x \rightarrow y) \right\}. \quad /11/$$

Другим краеугольным камнем нашего подхода является представление Меллина

$$T(Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\kappa-i\infty}^{-\kappa+i\infty} dJ \Gamma(-J) (Q^2)^J M(J), \quad /12/$$

которое полезно тем, что анализ поведения  $T(Q^2)$  при больших  $Q^2$  сводится к поиску самой правой /"ведущей"/ из особенностей  $M(J)$ , лежащих /в комплексной  $J$ -плоскости/ слева от контура интегрирования по  $J$ . В нашем случае

$$M^{(1)}(J) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \Phi_0^*(y) \Phi_0(x) \int_0^\infty da_1 da_2 [x^J (a_1 + a_2 y)^J e^{-a_1 m_1^2 - a_2 m_2^2 + (x \rightarrow y)}], \quad /13/$$

Интегрируя по  $\lambda = (a_1 + a_2)$ , получаем

$$M^{(1)}(J) = \Gamma(J+2) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \Phi_0^*(y) \Phi_0(x) \int_0^\infty da_1 da_2 \times \{ x^J [1-y(1-y)]^J [m_1^2(1-y) + m_2^2 y]^{-J-1} + (x \rightarrow y) \}, \quad /14/$$

где  $\gamma \equiv a_1 / \lambda = 1 - a_2 / \lambda$ .

Следовательно, при  $J=-2$  функция  $M(J)$  имеет полюс, обусловленный как раз интегрированием по области  $\lambda \rightarrow 0$ , где одновременно малы  $a_1$  и  $a_2$ . Если оставшиеся интегралы по  $x$ ,  $y$  и  $\gamma$  не дают особенностей, лежащих правее прямой  $\text{Re} J = -2$ , то асимптотика дается вычетом в точке  $J = -2$ . Если, однако,  $\Phi_0(x) \sim x^\Delta$  при малых  $x$ , то интегрирование по  $x$  дает полюс  $(J+1+\Delta)^{-1}$ . При  $\Delta < 1$  этот полюс лежит правее точки  $J = -2$ , а именно, он /а не  $J = -2$  - полюс, обусловленный интегрированием по малым  $a_1$  и  $a_2$  /ответствен за асимптотику  $\mathcal{F}^{(1)}(Q^2)$ , и мы приходим к /9/. Если же  $\Delta = 1$ , обе рассматриваемые особенности совпадают и полюс второго порядка дает

$$\mathcal{F}_{as}^{(1)}(Q^2) \sim \left(\frac{1}{Q^2}\right)^2 \ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right). \quad /15/$$

Таким образом, асимптотика формфактора зависит от характера распределения полного импульса  $P$  между составляющими: для узкого распределения ( $\Delta > 1$ ) мы получаем масштабный результат  $\mathcal{F} \sim 1/Q^4$ , а широкое распределение ( $\Delta < 1$ ) дает дополнительный множитель  $(Q^2/m^2)^{1-\Delta}$ . В последнем случае, однако, доминирующий вклад в  $\mathcal{F}_{as}^{(1)}(Q^2)$  обусловлен областью малых импульсов  $xuQ^2$ ,  $xQ^2 = m^2$  /т.е. больших расстояний/ и полагаться на теорию возмущений в такой ситуации нельзя. Поскольку на сегодняшний день мы вынуждены ограничить наше исследование рамками ТВ, мы примем, что  $\Delta > 1$ , и

проанализируем, сохраняется ли в этом случае доминантность малых расстояний и в высших порядках ТВ.

### III. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШЕЙ ОДНОПЕТЛЕВОЙ ДИАГРАММЫ

Рассмотрим диаграмму, показанную на рис.2. Используя  $a$ -представление /10/ и вычисляя стандартным образом интегралы по виртуальному импульсу, получаем

$$T^{(2)}(x, y, Q^2) = \frac{eg^4}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \prod_{i=1}^5 da_i \mathcal{D}^{-3}(a) \times \exp\left\{-xQ^2\left(a_1 + \frac{a_2(a_3+a_4)}{\mathcal{D}(a)}\right) - \sum_{\sigma=1}^5 m_\sigma^2 a_\sigma\right\}, \quad /17/$$

где  $\mathcal{D}(a) = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ . Из представления /17/ следует, в частности, что степенные /при больших  $Q^2$  / вклады в  $T^{(2)}(Q^2)$  могут быть обусловлены только интегрированием по такой области пространства  $a$ -параметров, внутри которой коэффициент перед  $Q^2$  в экспоненте выражения /17/ /т.е.  $a_1 + a_2(a_3 + a_4)/\mathcal{D}(a)$  / обращается в нуль - в противном случае соответствующий вклад будет экспоненциально подавлен. Нетрудно установить, что этот коэффициент обращается в нуль в следующих случаях:

- (1)  $\lambda_1 \equiv a_1 + a_2 = 0$ ,
- (2)  $\lambda_2 \equiv a_1 + \dots + a_5 = 0$ ,
- (3)  $\lambda_3 \equiv a_1 + a_3 + a_4 = 0$ ,
- (4)  $a_1 = 0, \quad 1/a_5 = 0$ .

Одновременное обращение в нуль нескольких  $a$ -параметров удобно описывать с помощью замены

$$a_1 + \dots + a_k = \lambda, \quad a_i = \beta_i \lambda. \quad /18/$$

Используя /18/, легко установить, что интегрирование по областям, в которых  $\lambda$ -параметры, соответствующие возможностям /1/-/3/,

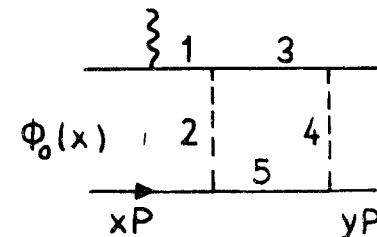


Рис.2. Простейшая однопетлевая диаграмма.

малы, генерирует полюса меллиновского образа

$$\mathbb{M}^{(2)}(J, x, y) = \frac{eg^4}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \prod_{i=1}^5 da_i \mathcal{D}^{-3}(a) x^J \left( a_1 + \frac{a_2(a_3+a_4y)}{\mathcal{D}(a)} \right)^J \exp \left\{ -\sum_{\sigma=1}^5 \alpha_\sigma m_\sigma^2 \right\} \quad /19/$$

при  $J=-2$  для /1/, /2/ и при  $J=-3$  для /3/. Если  $m_5=0$ , то возможности /4/ также соответствует полюс при  $J=-3$ . Поскольку мы интересуемся ведущим степенным вкладом, нам достаточно учесть полюса по  $J$ , обусловленные режимами 1/, 2/. Отметим также, что при  $m_5 \neq 0$  интегрирование по области  $a_5 \rightarrow \infty$ , благодаря экспоненциальному обрезающему фактору  $\exp\{-\alpha_5 m_5^2\}$ , не дает полюсов по  $J$  и режим /4/ можно не рассматривать вообще. В дальнейшем мы будем считать, что массы всех частиц модели отличны от нуля, и для простоты положим их все равными друг другу.

Применяя замену /18/ ко всем линиям рассматриваемой диаграммы и вычисляя интеграл по  $\lambda_2$ , получаем

$$\mathbb{M}^{(2)}(J, x, y) = \left(\frac{1}{m^2}\right)^{J+2} \Gamma(J+2) \int_0^1 \prod_{i=1}^5 d\beta_i \delta(1 - \sum_{i=1}^5 \beta_i) \times \quad /20/$$

$$\times x^5 (1-\beta_1)^{-3} [\beta_1 + \beta_2(\beta_3 + y\beta_4)/(1-\beta_3)]^J$$

Далее, интегрирование по области  $\beta_1 + \beta_2 \ll 1$  также дает полюс при  $J=-2$  и, следовательно, в асимптотике  $T^{(2)}(Q^2) \sim (1/Q^4) \ln(Q^2/m^2)$ . Заметим, что уже сама структура логарифма  $\ln(Q^2/m^2)$  свидетельствует о том, что соответствующий вклад связан с интегрированием по области, включающей как малые ( $\sim 1/Q$ ), так и большие ( $\sim 1/m$ ) расстояния.

Введем процедуру разбиения вкладов больших и малых расстояний. Для этого выделим подобласть  $\lambda_2 < 1/\mu^2$ , в которой применима ТВ. Заметим далее, что в разложении множителя  $\exp(-\lambda_2 m^2)$  по степеням параметра  $\lambda_2$  только первый член дает полюс при  $J=-2$ . Соответствующий вклад, отличающийся от /20/ только заменой  $(1/m^2)^{J+2} \Gamma(J+2) \rightarrow (1/\mu^2)^{J+2} / (J+2)$ , обозначим  $\mathbb{M}_{pole}^{(2)\lambda_2}(J, \mu^2)$ . Вклад  $\mathbb{M}^{(2)}(J) - \mathbb{M}_{pole}^{(2)\lambda_2}(J, \mu^2)$ , не имеющий полюсов при  $J=-2$  за счет интегрирования по  $\lambda_2$ , обозначим  $\mathbb{M}_{reg}^{(2)\lambda_2}(J, \mu^2, m^2)$ . Этот вклад имеет, однако, полюс при  $J=-2$ , обусловленный интегрированием по  $\lambda_1 = a_1 + a_2$ . Интегрируя в  $\mathbb{M}_{reg}^{(2)\lambda_2}$  по области  $\lambda_1 < 1/\mu^2$  и удерживая при этом лишь полюсную /при  $J=-2$ / вклад /т.е. только первый член разложения подынтегрального выражения в ряд по  $\lambda_1$  /, находим вклад

$$\mathbb{M}_{reg\ pole}^{(2)\lambda_2\lambda_1}(J, \mu^2, x, y) = \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^{J+2} \frac{x^J}{J+2} \int_0^1 d\beta_1 d\beta_2 \delta(1-\beta_1-\beta_2) \times \quad /21/$$

$$\times \int \frac{da_3 da_4 da_5}{(a_3+a_4+a_5)} (\beta_1 + \beta_2 \frac{a_3+ya_4}{a_3+a_4+a_5})^J \exp\{-\alpha_3 m^2 - \theta(a_3+a_4+a_5 > 1/\mu^2)\}$$

Обозначив  $(a_3+a_4y)/(a_3+a_4+a_5)$  через  $y'$ , после очевидных преобразований получаем представление, аналогичное /14/:

$$\mathbb{M}_{reg\ pole}^{(2)\lambda_2\lambda_1}(J, \mu^2, m^2) = \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^{J+2} \frac{eg^2}{J+2} \int_0^1 dx x^J \Phi_0(x) \times \quad /22/$$

$$\times \int_0^1 dy' \Phi_1(y', \mu^2) \int_0^1 d\beta_1 d\beta_2 \delta(1-\beta_1-\beta_2) (\beta_1 + \beta_2 y')^J$$

где функция  $\Phi_1(y', \mu^2)$  имеет следующее  $\alpha$ -представление:

$$\Phi_1(y', \mu^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dy \Phi_0(y) \int_0^\infty \prod_{i=3}^5 da_i \delta(y' - \frac{a_3+a_4y}{a_3+a_4+a_5}) \times \quad /23/$$

$$\times (a_3+a_4+a_5)^{-3} \exp\{-(a_3+a_4+a_5)m^2\} - \theta(a_3+a_4+a_5 > 1/\mu^2) \}$$

Заметим, что если бы не было члена с  $\theta$ -функцией, интеграл по  $\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_1 = a_3 + a_4 + a_5$  расходился бы на нижнем пределе, т.е. в ультрафиолетовой области.

Вычитая из  $\mathbb{M}_{reg}^{(2)\lambda_2}$  вклад  $\mathbb{M}_{reg\ pole}^{(2)\lambda_2\lambda_1}$ , получаем вклад  $\mathbb{M}_{reg\ reg}^{(2)\lambda_2\lambda_1}$ , не имеющий полюсов при  $J=-2$ , поскольку все возможности получить такой полюс уже исчерпаны.

Переход к обычной переменной  $Q^2$  дает

$$T^{(2)}(Q^2, m^2) = \int_0^1 dx \Phi_0(x) \left\{ \int_0^1 \Phi_0(y) dy E^{(1)}(x, y; Q^2, \mu^2) + \int_0^1 dy' \Phi_1(y', \mu^2) E^{(0)}(x, y; Q^2) \right\} \{1 + O(1/Q^2)\} \quad /24/$$

где  $E^{(0)}(x, y; Q^2) = eg^2/x^2yQ^4$  - простейшая амплитуда, а  $E^{(1)}(x, y; Q^2, \mu^2)$  - 2-петлевая амплитуда взаимодействия на малых расстояниях.

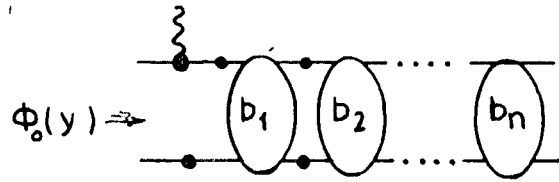
Таким образом, с точностью до степенных поправок,  $T^{(2)}$  представляет собой сумму членов, в каждом из которых вклады малых и больших расстояний отделены друг от друга /"расфакторизованы"/. Отметим также, что сумму вкладов  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  с точностью до членов  $Q(g^6)$  можно схематически представить в виде

$$T^{(1)} + T^{(2)} \sim \Phi_0(x) \{E^{(0)} + E^{(1)}\} \otimes (\Phi_0(y) + \Phi_1(y)) \quad /25/$$

#### IV. АНАЛИЗ В АЛЬФА-ПРЕДСТАВЛЕНИИ И ФАКТОРИЗАЦИЯ ВКЛАДОВ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЙ

Чтобы обобщить анализ 1-петлевого вклада на случай произвольной "односторонней" диаграммы /рис.3/, необходимо, во-первых,

Рис.3. Произвольная "односторонняя" диаграмма.



найти наборы  $\alpha_{\sigma_i}$ -параметров, одновременное обращение которых в нуль приводит к занулению коэффициента перед  $Q^2$  в  $\alpha$ -представлении рассматриваемого вклада  $T^{(n)}$ . Сопоставим набору  $\{\alpha_{\sigma_i}\}$  подграф  $V = \{\sigma_i\}$ , образованный соответствующими линиями.

Существует простое правило, гласящее, что необходимо рассматривать только такие подграфы  $V$ , сжатие которых в точку ликвидирует зависимость исходной диаграммы от  $Q^2$ .

Это правило легко понять, заметив, что предел  $\alpha_{\sigma} \rightarrow 0$  соответствует малым расстояниям между концами /т.е. "сжатию"/ линии  $\sigma$ , а обращение коэффициента перед  $Q^2$  в нуль как раз и означает, что зависимость от  $Q^2$  исчезла.

После того как найдены все подграфы  $V$ , обладающие сформулированным выше свойством, для каждого из них необходимо определить положение полюса по  $J$ , возникающего в результате интегрирования по области  $\lambda(V) < 1/\mu^2$  /где  $\lambda$  есть сумма  $\alpha$ -параметров всех линий, входящих в  $V$ /. Здесь мы приведем лишь конечный результат /вывод можно найти в /10/, сводящийся к тому, что в рассматриваемой задаче область  $\lambda(V) < 1/\mu^2$  дает полюс при  $J = 3 - l_{ext}$ . где  $l_{ext}(V)$  - число внешних линий подграфа  $V$ . За ведущую особенность при  $J = -2$  ответственны, таким образом, подграфы  $V$  с минимальным возможным числом внешних линий, равным в данном случае пяти. Будем называть такие подграфы "существенными" /ср. /13/ /.

Для "односторонних" диаграмм /рис.3/ число существенных подграфов  $V_1, \dots, V_n$  определяется, очевидно, числом двухчастичных делений в канале  $P'$ . Поэтому имеет смысл представлять себе каждую из исследуемых диаграмм в виде обобщенной лестницы, составленной из двухчастично-неприводимых блоков  $b_1, \dots, b_n$ . По определению,  $V_k$  есть подграф, образованный первыми  $k$  блоками  $b_1, \dots, b_k$ .

Разбиение вкладов больших и малых расстояний производится для такой диаграммы следующим образом. Сначала выделяется полюс  $(J+2)^{-1}$ , обусловленный интегрированием по области  $\lambda_n < 1/\mu^2$  /здесь и далее  $\lambda_n \equiv \lambda(V_n)$ /. Соответствующую операцию обозначим  $M_n(\mu^2)$ , а возникающий в результате ее применения вклад -  $T_n^{(n)}(Q^2, \mu^2) \equiv M_n(\mu^2)T^{(n)}(Q^2)$ . Затем для вклада  $T^{(n)} - T_n^{(n)} \equiv R_n(\mu^2)T^{(n)}(R_n = I - M_n)$  необходимо выделить полюс, обусловленный интегрированием по области  $\lambda_{n-1} < 1/\mu^2$  /т.е. применить операцию  $M_{n-1}$  / и т.д., пока все возможности не будут исчерпаны. В результате

$$T^{(n)}(Q^2) = \sum_{k=1}^n M_k R_{k+1} \dots R_n T^{(n)} + R_1 \dots R_n T^{(n)} \equiv \sum_{k=1}^n T_k^{(n)} + R^{(n)}. \quad /26/$$

По построению вклад  $R^{(n)}(Q^2)$  не имеет /в меллиновском представлении/ полюсов при  $J = -2$  и является поэтому степенной поправкой к вкладам  $T_k^{(n)}$ :  $R^{(n)} = O(1/Q^6)$ .

Действие операции  $M_k$  в общем случае задается выражением

$$M_k \int_0^\infty \lambda_k^{J+1} \phi(\lambda_k, \dots) d\lambda_k = \frac{1}{J+2} \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^{J+2} \phi(0, \dots). \quad /27/$$

Для дальнейшего видно, что операция  $M_k$  соответствует учету только первого члена тейлоровского разложения функции  $\phi(\lambda_k)$  при  $\lambda_k = 0$ . Это приводит к тому, что операции  $R_{k+1} \dots R_n$  в /26/ действуют только на  $\alpha$ -параметры линий  $\sigma$ , лежащих вне подграфа  $V_k$ . Следовательно, операция  $M_k R_{k+1} \dots R_n$  представляет собой

произведение операции  $M_k \equiv \text{Reg}_{\mu^2}^{\text{IR}}(V_k)$ , соответствующей инфракрасному обрезанию интеграла по  $\lambda_k$ , и операции  $\text{Reg}_{\mu^2}^{\text{UV}}(\bar{V}_k)$ . /где  $\bar{V}_k$  -

подграф, дополняющий  $V_k$  до всей диаграммы, обеспечивающей сходимость интегралов по  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  в ультрафиолетовой области /ср. /23//. Таким образом, во вкладе  $T_k^{(n)}$  блоки  $b_1, \dots, b_k$  соответствуют "малым расстояниям" ( $\lambda_k < 1/\mu^2$ ), а блоки  $b_{k+1}, \dots, b_n$  - "большим расстояниям" /ср. /21//. Для  $T_k^{(n)}$ , как и для  $T_k^{(2)}$  в /24/, имеет место факторизация вкладов малых и больших расстояний:

$$T_k^{(n)}(Q^2, \mu^2, m^2) = \int_0^1 dx \Phi_0(x) \int_0^1 dy \Phi_{n-k}(y, \mu^2) E_k(x, y, Q^2, \mu^2). \quad /28/$$

Чтобы показать это, запишем  $T_k^{(n)}$  в координатном представлении /см. рис.4/:

$$T_k^{(n)}(Q^2, m^2) = \int_0^1 dx \Phi_0(x) \int d^6 \xi d^6 \eta \times \\ \times \text{Reg}_{\mu^2}^{\text{IR}} \{ C_k(q, x, P, \xi, \eta) \} \text{Reg}_{\mu^2}^{\text{UV}} \{ f_{n-k}(\xi, \eta; P') \}. \quad /29/$$

Заметим далее, что  $f_{n-k}(\xi, \eta; P')$  представляет собой некоторый вклад в матричный элемент  $\langle P' | \psi_1(\xi) \psi_2(\eta) | 0 \rangle$ . Разлагая  $f_{n-k}$  в ряд Тейлора по  $(\xi - \eta)$  и пользуясь трансляционной инвариантностью, получаем

$$f_{n-k}(\xi, \eta; P') = e^{-i\eta P'} \sum_{N=0}^{\infty} \langle P' | \psi_1(0) \vec{\partial}_{\mu_1} \dots \vec{\partial}_{\mu_N} \psi_2(0) | 0 \rangle_{(n-k)} \times \\ \times \frac{(\xi - \eta)^{\mu_1} \dots (\xi - \eta)^{\mu_N}}{N!}. \quad /30/$$

Отождествляя матричные элементы локальных операторов  $\psi_1 \vec{\partial}^N \psi_2$  с моментами некоторой функции  $\Phi_{n-k}(z, \mu^2)$ ,

$$\text{Reg}_{\mu^2}^{UV, N} \langle P' | \psi_1(0) \vec{\partial}_{\mu_1} \dots \vec{\partial}_{\mu_N} \psi_2(0) | 0 \rangle_{n-k} =$$

$$= 2(P'_{\mu_1} \dots P'_{\mu_N}) a_{n-k}^i(N, \mu^2) = 2(P'_{\mu_1} \dots P'_{\mu_N}) \int_0^1 dz z^n \Phi_{n-k}(z, \mu^2), \quad /31/$$

получаем представление /28/, в котором  $E_k(x, z, Q^2, \mu^2)$  дается  $k$ -блочным вкладом в амплитуду перехода  $\langle P', z; \mu^2 | j | P, x \rangle$ . Как мы видели ранее на конкретном примере /см. /22/, /23//, интегрирование по  $z$ , действительно, ограничено областью  $0 \leq z \leq 1$ . Пользуясь  $\alpha$ -представлением, можно показать, что это спектральное свойство сохраняется и в самом общем случае /1/.

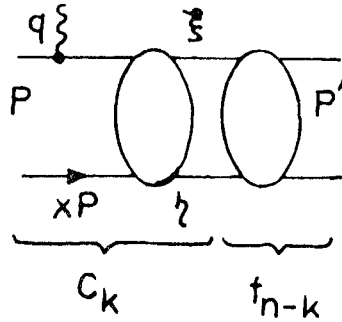


Рис.4. Структура факторизации вкладов в координатном представлении.

Выражения /26/, /29/ справедливы для любых односторонних диаграмм /и при всех  $n$  и  $k$  /, поэтому, суммируя по всем таким диаграммам, получаем представление

$$T(Q^2, m^2) = \int_0^1 dx \Phi_0(x) \int_0^1 dz \Phi^*(z, \mu^2, \mu_R^2, -m^2, \bar{g}(\mu_R)) \times$$

$$\times E(x, z, Q^2, \mu^2, \mu_R^2, g(\mu_R)) + R(Q^2, m^2), \quad /32/$$

в котором  $\Phi(z, \mu^2)$  есть полная /т.е. просуммированная по всем порядкам ТВ/ амплитуда вероятности найти исследуемую систему в состоянии  $\langle P', z; \mu^2 |$ , когда кварки  $\psi_1, \psi_2$  находятся на малом ( $< 1/\mu$ ) расстоянии друг от друга, а  $E(x, z, Q^2, \mu^2)$  есть полная амплитуда перехода  $\langle P', z; \mu^2 | j | x, P \rangle$  за счет взаимодействий на малых расстояниях. Остаток  $R(Q^2, m^2)$  в каждом порядке ТВ ведет себя, как  $1/Q^6$ .

Несколько слов об обычных ультрафиолетовых/у.ф./расходимостях. Диаграммы, дающие вклад в  $T$  и  $E$ , не расходятся как целое /по-скольку имеют 5 внешних линий/, следовательно,  $R$ -операция для каждого из вкладов  $T_k^{(n)}$  факторизуется:  $R(V_k + \bar{V}_k) = R(V_k)R(\bar{V}_k)$ . Параметр  $R$ -операции в /32/ обозначен  $\mu_R$ . Процедура разбиения

вкладов малых и больших расстояний приводит, очевидно, к разбиению связанных с у.ф. расходимостями /"ренормгрупповых"/ логарифмов на  $\ln(Q^2/\mu^2)$ ,  $\ln(m^2/\mu^2)$  и  $\ln(\mu^2/\mu_R^2)$ . Чтобы не усложнять анализ учетом  $\ln(\mu^2/\mu_R^2)$ -вкладов, обычно полагают  $\mu = \mu_R$ . В настоящей работе мы также воспользуемся этим приемом, хотя иногда имеет смысл считать  $\mu$  и  $\mu_R$  независимыми параметрами /см. /14/ /.

#### V. СУММИРОВАНИЕ "ОДНОСТОРОННИХ" ВКЛАДОВ В ГЛАВНОМ ЛОГАРИФИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Ситуация, когда некоторая величина  $T(Q^2)$  представима в виде /обобщенного/ произведения двух других величин,  $E(Q^2, \mu^2)$  и  $\Phi(\mu^2)$ , каждая из которых зависит от дополнительного параметра  $\mu$ , но так, что  $E \otimes \Phi$  от  $\mu$  не зависит, является классическим объектом ренормгруппового анализа /13/. Стандартное решение уравнений РГ сводится, по сути дела, к тому, что параметр  $\mu$  /от частного выбора которого физические величины, например формфактор пиона, зависят не должны/ выбирается равным  $Q$ . При этом  $E$  представляет собой ряд по  $\bar{g}(Q)$ , а все логарифмы  $\ln(Q^2/\mu^2)$ , не вошедшие в  $\bar{g}(Q)$ , "поглощаются" волновой функцией  $\Phi(x, \mu^2) \rightarrow \Phi(x, Q^2)$ . Так что основная задача - найти зависимость  $\Phi(x, \mu^2)$  от  $\mu^2$ .

Заметим, что зависимость от  $\mu$  появляется только начиная с  $\Phi_1(\mu^2)$ , т.е. в порядке  $g^2$ . При этом, кроме "перенормировки"  $\Phi_0$ , выражаемой формулой /23/, необходимо учитывать также и собственные энергетические вставки во внешние и внутренние линии. Дифференцируя сумму всех  $O(g^2)$ -вкладов, нетрудно найти, что

$$-\frac{d}{d(\ln \mu^2)} \Phi_1(y, \mu^2) = \int_0^1 dz V(y, z) \Phi_0(z) - \frac{1}{6} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \Phi_0(y). \quad /33/$$

Вид ядра  $V(y, z)$  определяется из выражения /23/:

$$V(y, z) = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 \prod_{i=1}^3 d\beta_i \delta(y - (\beta_1 + z\beta_2)) \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \beta_i). \quad /34/$$

Явное вычисление дает

$$V(y, z) = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left\{ \frac{y}{z} \theta(y < z) + \frac{1-y}{1-z} \theta(z < y) \right\}. \quad /35/$$

Из выражений /33/, /35/ следует, в частности, что поведение функции  $\Phi_1(y, \mu^2)$  при малых  $y$  в нашем случае полностью определяется видом ядра  $V(y, z)$ :

$$\Phi_1(y, \mu^2) \Big|_{y \rightarrow 0} \sim y \frac{g^2}{(4\pi)^3} \ln(\mu^2/m^2) \int_{\mu}^1 \frac{dz}{z} \Phi_0(z). \quad /36/$$

Действительно, мы рассматриваем только такие функции  $\Phi_0$ , которые обеспечивают сходимость интеграла /8/. В этом случае интеграл /36/ хорошо сходится даже при замене его нижнего предела нулем и, следовательно,  $\Phi_1(y, \mu^2) \sim y \ln(\mu^2/m^2)$  при малых  $y$ . В общем случае вместо /33/ имеем уравнение эволюции /2/

$$\frac{1}{d \ln \mu^2} \Phi(y, \mu^2) = \int_0^1 dz W(y, z, g^2) \Phi(z, \mu^2), \quad /37/$$

где  $W(y, z, g^2) = V(y, z, g^2) - (g^2/6(4\pi)^3) \delta(y-z) + O(g^4)$ . В настоящей работе, однако, мы не будем учитывать  $O(g^4)$ -поправки, т.е. ограничимся анализом эволюции  $\Phi(\mu^2)$  в ГЛП\*. Напомним вкратце метод решения уравнения /37/ в ГЛП /2/.

Записав уравнение на собственные значения в виде

$$\int_0^1 dz \frac{\phi_n(z)}{z(1-z)} \{y(1-z)\theta(y < z) + z(1-y)\theta(z < y) - \frac{1}{6}y(1-y)\delta(y-z)\} = \gamma_n \phi_n(y) \quad /38/$$

и заметив, что выражение, заключенное в фигурные скобки, симметрично относительно замены  $y \leftrightarrow z$ , приходим к выводу, что функции  $\phi_n(z)$  ортогональны на отрезке  $[0,1]$  с весом  $z(1-z)$  и, следовательно,  $\phi_n(z) \sim C_n^{3/2}(1-2z)$ , где  $C_n^{3/2}(\xi)$  - полином Гегенбауэра /15/. Собственные значения  $\gamma_n$  легче всего найти, перейдя от /37/ к уравнению для моментов /см. /31/ /1/:

$$\frac{d}{d \ln \mu^2} a_n(\mu^2, g) = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \sum_{k=0}^n z_{nk} a_k(\mu^2, g), \quad /39/$$

где  $z_{nk}$  - матрица аномальных размерностей

$$z_{nk} = \left[ \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{6} \delta_{nk} \right], \quad /40/$$

Поскольку  $z_{nk}$  - треугольная матрица, ее собственные значения даются диагональными элементами:  $\gamma_n = -z_{nn}$ .

Таким образом,  $\Phi(y, \mu^2)$  эволюционирует по закону

$$\Phi(y, \mu^2) = y(1-y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3/2}{(n+1)(n+2)} C_n^{3/2} (1-2y) k_n(\mu_0^2) \exp\left\{ \int \frac{\mu}{\mu_0} \frac{y_n}{(4\pi)^3} dt/t \right\}, \quad /41/$$

где  $k_n(\mu_0^2)$  даются интегралом  $\Phi_0(x)$  с функцией  $C_n^{3/2}(1-2x)$ /под-

\* Подчеркнем, что представление /32/ справедливо во всех порядках и для всех логарифмов ТВ, несмотря на то /а точнее, благодаря тому/, что при его выводе мы не вычислили реально ни одного логарифмического вклада.

робнее см. /1-3/ /. Заметим, что  $\gamma_n > \gamma_{n+1}$  и поэтому в асимптотике /при  $\mu^2 \rightarrow \infty$ / функция  $\Phi(y, \mu^2)$  выглядит, как  $y(1-y)$ .

Используя /41/, можно записать представление /32/, выражающее факторизацию вкладов малых и больших расстояний, в виде ряда

$$T(Q^2, m^2) = \frac{1}{Q^4} \int_0^1 dx \Phi_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3/2}{(n+1)(n+2)} t_n(Q^2/\mu^2, x, \bar{g}(\mu)) k_n(\mu^2) + O(1/Q^6), \quad /42/$$

каждый член которого не зависит от  $\mu$ . При замене  $\mu \rightarrow \mu'$  коэффициент  $t_n(Q^2/\mu^2, \dots)$ , представляющий собой гегенбауэровский момент амплитуды  $E_n(x, z, Q^2, \mu^2, \bar{g}(\mu))$ ,

$$t_n(Q^2/\mu^2, x, \bar{g}(\mu)) = Q^4 \int_0^1 dz z(1-z) C_n^{3/2}(1-2z) E(x, z, Q^2, \mu^2, \bar{g}(\mu)), \quad /43/$$

"перенормируется" по простейшему мультипликативному закону.

Результаты РГ-анализа можно воспроизвести и с помощью методов, основанных на прямом суммировании вкладов. В меллиновском представлении ГЛП соответствует суммированию старших полюсов  $[g^2/(J+2)]^n$ . При этом используется тот факт, что коэффициент при старшем полюсе  $(n+1)$ -петлевой диаграммы простым образом связан с аналогичным коэффициентом  $n$ -петлевого вклада. В частности, используя /20/, нетрудно получить, что

$$\tilde{E}_1^{(1)}(J, x, y) = \frac{1}{J+2} \int_0^1 dy' \tilde{E}^{(0)}(J, x, y') V(y, y') \{1 + O(J+2)\}, \quad /44/$$

или для гегенбауэровских моментов:

$$\tilde{E}_n^{(1)}(J, x) \Big|_{\text{лестн.}} = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \gamma_n \frac{E_n^{(0)}(J, x) \Big|_{\text{лестн.}}}{J+2} \{1 + O(J+2)\}, \quad /45/$$

где  $\gamma_n^{\text{лестн.}} = -1/[(n+1)(n+2)]$ . Используя методы анализа в  $a$ -представлении, можно показать, что рекуррентные соотношения /44/, /45/ справедливы для лестничных диаграмм и в том случае, если в левой части стоит  $E_n^{(k+1)}(J, x) \Big|_{\text{лестн.}}$  а в правой -  $\tilde{E}_n^{(k)}(J, x) \Big|_{\text{лестн.}}$  /см. /1.9/ /. Отбрасывая "младшие" полюса, получаем затем, что для лестничных диаграмм в ГЛП

$$(J+2) \tilde{E}_n^{(1)}(J, x) \Big|_{\text{лестн.}} - E_n^{(0)}(J, x) \Big|_{\text{лестн.}} = \lambda_n \tilde{E}_n^{(0)}(J, x) \Big|_{\text{лестн.}}, \quad /46/$$



где  $\lambda_n = (g^2/(4\pi)^3) \gamma_n$ . Решая это уравнение, находим сумму лестничных вкладов в ГЛП:

$$\tilde{E}_n(J, x) \Big|_{\text{лестн.}} = \frac{(J+2)E_n^{(0)}(J, x)}{J+2-\lambda_n(g^2)} \equiv \frac{r_n(g^2)}{J+2-\lambda_n(g^2)}. \quad /47/$$

Отметим, что уравнение /46/ означает, что производная по  $(1/\mu)$  от  $(1/\mu^2)^{J+2} \tilde{E}_n(J, x) a_n(\mu^2)$  есть функция, регулярная при  $J=-2$  /и правее/, или, иными словами, что  $E_n(Q^2/\mu^2) k_n(\mu^2)$  не зависит от  $\mu^2$ . Выходя за рамки лестничного приближения, необходимо учесть, что функция  $E$  имеет также и неявную зависимость от  $\mu$  /через  $g(\mu)$ /. Вместо /46/ при этом возникает уравнение

$$(J+2 + \beta(g^2) \frac{\partial}{\partial g^2}) \tilde{E}_n(J, g^2) = \lambda_n(g^2) \tilde{E}_n(J, x, g^2) + r_n(g^2). \quad /48/$$

#### VI. АНАЛИЗ "ДВУСТОРОННИХ" ДИАГРАММ

Суммирование "односторонних" вкладов в ГЛП сводится, таким образом, к замене затравочного распределения  $\Phi_0(y)$  волновой функцией  $\Phi(y, Q^2)$ , закон эволюции которой дается /41/. При этом, как мы видели, независимо от вида  $\Phi_0(y)$  петлевые поправки к  $\Phi_0$  /т.е.  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  и т.д./ при малых  $u$  ведут себя, как  $u^1$ . Поскольку соответствующий борновский вклад  $E^0(x, y)$  ведет себя, как  $(x^2 y)^{-1}$ , интегралы по  $y$  сходятся в каждом порядке ТВ. Если же, однако, в борновском вкладе и вместо  $\Phi_0(x)$  подставить  $\Phi_1(x, Q^2)$ , то интеграл по  $x$  будет логарифмически расходиться в области малых  $x$ . Следовательно, учет вкладов "двусторонних" диаграмм /рис.5/, даже в ГЛП не может сводиться к простой замене  $\Phi_0(x) \rightarrow \Phi(x, Q^2)$ .

Рассмотрим сначала простейшую диаграмму /рис.6/. Меллиновский образ соответствующей амплитуды имеет следующее  $\alpha$ -представление:

$$\mathbb{M}^{(6)}(J, x, y) = \frac{eg^4}{(4\pi)^3} \int_0^1 \prod_{i=1}^5 da_i \frac{(a_1 + x a_2)^J (a_3 + y a_4)^J}{(\mathcal{D}(\alpha))^{J+3}} \exp\{-m^2 \sum_{i=1}^5 a_i\}. \quad /49/$$

где  $\mathcal{D}(\alpha) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ . Существенными подграфами являются  $V_1 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ ,  $V_2 = \{\sigma_3, \sigma_4\}$ ,  $V_3 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_5\}$ . Проинтегрировав сначала по области  $\lambda < 1/\mu^2$  /где  $\lambda = a_1 + \dots + a_5$ /, затем по области  $\beta_1 + \beta_2 \ll 1$  /как обычно,  $\beta_k = a_k/\lambda$  / и далее по области  $\beta_3 + \beta_4 \ll 1$ , получаем при  $J=-2$  полюс 3-го порядка, что соответствует вкладу  $Q^{-4} \ln^2(Q^2/m^2)$  /в однопетлевой диаграмме/.

Покажем, что дополнительный полюс  $(J+2)^{-1}$ , действительно, соответствует расходимости интеграла по  $x$ , возникающей при замене

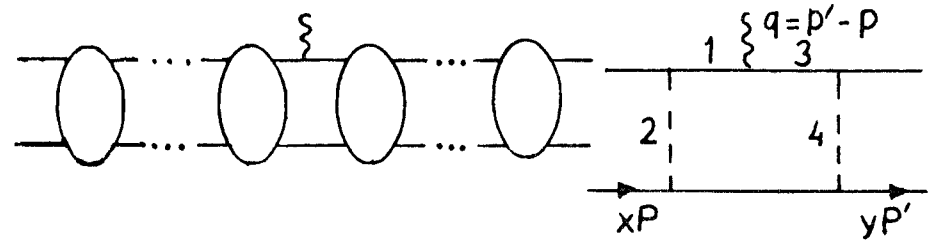


Рис.5. "Двусторонняя" диаграмма. Рис.6. Простейшая двусторонняя диаграмма.

$\Phi_0(x) \rightarrow \Phi_1(x, Q^2)$ . Для этого выпишем промежуточный результат, получающийся после того, как выполнено только интегрирование по  $\lambda < 1/\mu^2$  и  $\beta_3 + \beta_4 \ll 1$ :

$$E^{(6)}(J, x, y) = \frac{g^4}{(4\pi)^3} \frac{1}{(J+2)^2} \int_0^1 dk (\kappa + y(1-\kappa))^J \int_0^1 \prod_{i=1}^3 d\beta_i (\beta_1 + x\beta_2)^J \delta(1-\beta_1-\beta_2-\beta_3). \quad /50/$$

Обозначив  $(\beta_1 + x\beta_2)$  через  $z$ , можно представить  $\mathbb{M}$  в виде

$$\mathbb{M}^{(6)}(J) = \left(\frac{1}{m^2}\right)^{J+2} \frac{1}{J+2} \int_0^1 dx \Phi_0(x) \int_0^1 dz z^{J+2} V(x, z) E^{(0)}(J, z, y), \quad /51/$$

где  $V(x, z)$  - ядро /34/. Если вместо множителя  $z^{J+2}$  в /51/ взять его значение при  $J=-2$  /т.е. 1/, перейти от меллиновского  $J$ -представления к обычному  $Q^2$ -представлению и учесть затем, что свертка  $\Phi_0(x)$  с  $V(x, z)$  дает /в ГЛП/  $\Phi_1(z, Q^2)$  /см. /23//, то в результате, как нетрудно убедиться, получится то же выражение, что и при замене в борновском вкладе функции  $\Phi_0(x)$  на  $\Phi_1(z, Q^2)$ . Поскольку, однако,  $V(x, z) \sim z$ , а  $E^0(J, z, y) \sim z^{-2}$  при малых  $z$ , интеграл по  $z$  в /51/ на самом деле дает при  $J=-2$  полюс и переход  $z^{J+2} \rightarrow 1$  эквивалентен замене величины  $(J+2)^{-1}$  ее значением при  $J=-2$ , т.е. бесконечностью. Рассмотрим еще диаграмму /7/, являющуюся "гибридом" диаграмм /2/ и /6/. Меллиновский образ ее вклада в  $\alpha$ -представлении выглядит следующим образом:

$$\mathbb{M}^{(7)}(J) = \int_0^1 dx \Phi_0(x) \int_0^1 dy \Phi_0(y) \frac{eg^6}{(4\pi)^6} \int_0^1 \prod_{i=1}^8 da_i \times \frac{(a_1 + x a_2)^J (a_3 + a_6 + a_7 + a_8 + a_4 a_5)^J}{(\mathcal{D}(\alpha))^{J+3}} \exp\{-m^2 \sum_{i=1}^8 a_i\}, \quad /52/$$

где  $\mathcal{D}(\alpha) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)(a_4 + a_6 + a_7 + a_8) - a_4^2$ . Существенными являются 5 подграфов:  $V_1 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ ,  $V_2 = \{\sigma_3, \sigma_4\}$ ,  $V_3 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_5\}$ ,  $V_4 = \{\sigma_3, \sigma_4, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\}$ ,  $V_5 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_7\}$ .

Это не означает, однако, что для данной диаграммы старшая сингулярность при  $J = -2$  есть полюс 5-й степени. Действительно, интегрируя по  $1/\lambda < 1/\mu^3$  /где  $\lambda = \alpha_1 + \dots + \alpha_8$  /,  $1/\rho_3 \ll 1$  /где  $\rho_3 = \beta_1 + \dots + \beta_5$  /,  $1/3 \gamma_1 + \gamma_2 \ll 1$ ,  $1/4 \gamma_3 + \gamma_4 \ll 1$  /где  $\gamma_k = \beta_k / \rho$  /, получаем  $(J+2)^{-4}$ . Иерархия  $\alpha$ -параметров в этом вкладе ясна из рис.7а. Заметим далее что еще один полюс  $(J+2)^{-1}$  за счет интегрирования по области  $\rho_4 = \beta_3 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 \ll 1$  получить не удастся, так как после интегрирования по  $\rho_3 \ll 1$  дельта-функция  $\delta(1 - \beta_1 - \dots - \beta_8)$  заменяется на  $\delta(1 - \beta_6 - \beta_7 - \beta_8)$  и область  $\rho_4 \ll 1$  не дает вообще никакого вклада.

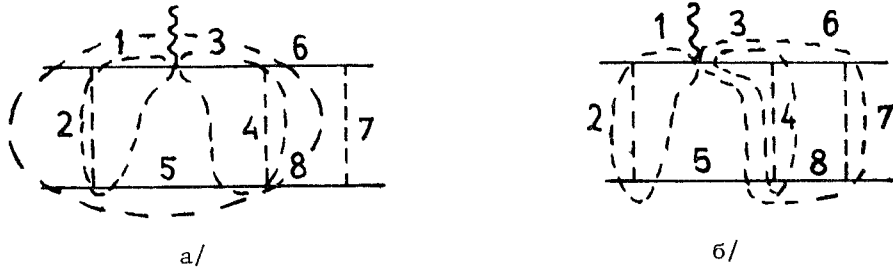


Рис.7. Режимы, дающие ведущий ГПП вклад в 2-петлевой двусторонней диаграмме.

Сингулярность  $(J+2)^{-4}$  можно получить и другим способом /см. рис.7б/, именно, интегрируя по области  $1/\lambda < 1/\mu^2$ ,  $1/2 \beta_1 + \beta_2 \ll 1$ ,  $1/3 \rho_4 \ll 1$ ,  $1/4 \delta_3 + \delta_4 \ll 1$  /где  $\delta_k = \beta_k / \rho_4$  /. Поскольку после  $1/2$  и  $1/3$  интегрирований  $\delta(1 - \Sigma \beta)$  перейдет в  $\delta(1 - \beta_5)$ , то в этом варианте не удастся получить полюс  $(J+2)^{-1}$  за счет интегрирования по области  $\rho_3 \ll 1$  /поскольку  $\rho_3 = \beta_1 + \dots + \beta_5 \geq \beta_5$  /. Для произвольной двусторонней лестничной диаграммы имеется только три варианта /см. рис.8/, дающих старшую сингулярность. Исходя из этого, можно показать /скажем, по индукции/, что старшая сингулярность  $N$ -петлевой диаграммы при  $J = -2$  есть полюс  $(N+2)$ -степени. Таким образом, только первая петля дает  $\ln^2(Q^2)$ , а каждая следующая добавляет  $\ln(Q^2)$ . Заметим, что в стандартной ГЛП-ситуации  $g^2/(4\pi)^3 \ll 1$ ,  $\ln(Q^2/m^2) \gg 1$ , но  $g^2 \ln(Q^2/m^2)/(4\pi)^3 \sim 1$  /все односторонние диаграммы имеют малость порядка  $1/\ln(Q^2/m^2)$  по сравнению с любой двусторонней диаграммой. Имеет смысл поэтому взять в качестве низшего приближения вклад однопетлевой диаграммы /рис.6/ и просуммировать поправки к ней.

Попытка такого суммирования была предпринята Чао /7/. Однако при выводе рекуррентных соотношений в /7/ были учтены только варианты 8а, б, а специфический для исследуемой задачи вариант 8в - пропущен. Наш метод, как будет видно из дальнейшего, позволяет легко просуммировать в ГЛП все ведущие вклады.

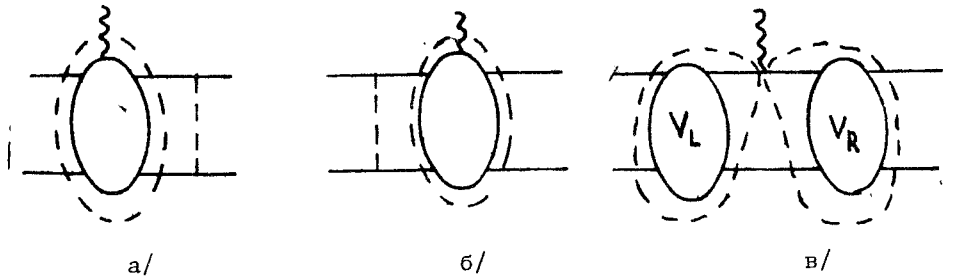


Рис.8. Режимы, позволяющие получить ведущий ГПП вклад в произвольной двусторонней диаграмме.

Переходя к изложению методики суммирования, обратим внимание читателя на то, что числители подынтегральных выражений в /49/ и /52/ представляют собой произведения множителей, каждый из которых относится только к левой или правой половинам диаграммы. С помощью общего анализа структуры вкладов в альфа-представлении можно показать /см. /19//, что это свойство сохраняется для произвольной /обобщенно-/лестничной диаграммы. Можно показать также, что в области интегрирования, соответствующей варианту /8в/, функция  $\mathcal{D}(a)$  также расщепляется на произведение функций  $\mathcal{D}_L(a)$ ,  $\mathcal{D}_R(a)$ , относящихся и к подграфам  $V_L$  и  $V_R$  соответственно /1,9,10/:

$$\mathcal{D}(a) = \alpha_5 \mathcal{D}_L(a) \mathcal{D}_R(a) \{1 + O(\lambda_R) + O(\lambda_L)\} \quad /53/$$

/где  $\lambda_{L,R} = \Sigma \alpha_\sigma$ ,  $\sigma \in V_{L,R}$  /. Учитывая далее, что  $\delta(1 - \Sigma \beta)$  в этой области заменяется на  $\delta(1 - \beta_5)$  /после чего интеграл по  $\beta_5$  тривиальным образом дает  $1/$ , находим, что старший полюсный вклад лестничной диаграммы с  $N+M$  ступеньками можно представить в виде

$$E_{NM}(J, n, m, g^2) = \left\{ \frac{1}{J+2} - \frac{1}{(4\pi)^3} K_N(J, n, g^2) K_M(J, m, g^2) \right. \\ \left. + E_{NM}^{(a)}(J, n, m) + E_{NM}^{(b)}(J, n, m) \right\}, \quad /54/$$

где  $E_{NM}$ ,  $E_{NM}$  - вклад варианта /8а/, /8б/, а  $n$ ,  $m$  - номера гегенбауэровских моментов по  $x$  и  $y$  соответственно. Факторизация числителя в /52/ на множители, относящиеся к  $V_L$  и  $V_R$ , приводит также к тому, что для  $E_{NM}$ ,  $E_{NM}$  имеют место рекуррентные соотношения, аналогичные /46/:

$$E_{NM}(J, n, m) = \frac{1}{J+2} \lambda_n^{\text{лестн.}} E_{N, M-1}(J, n, m) \{1 + O(J+2)\}, \quad /55/$$

$$E_{NM}(J, n, m) = \frac{1}{J+2} \lambda_m^{\text{лестн.}} E_{N-1, M}(J, n, m) \{1 + O(J+2)\}. \quad /56/$$

Суммируя по  $N, M$  от 1 до  $\infty$  /с учетом того, что  $E_{01} = E_{10} = 0$  /, получаем для суммы всех старших полюсов уравнение

$$(J+2+\lambda_n+\lambda_m) E_{\text{лестн.}}^{(J,n,m)} = \frac{1}{(4\pi)^3} K_{\text{лестн.}}^{(J,n)} K_{\text{лестн.}}^{(J,m)}. \quad /57/$$

Функции  $K(J,n)$  мы уже фактически вычислили в разделе V, поэтому окончательно имеем

$$E_{\text{лестн.}}^{(J,n,m)} = \frac{g^4}{(4\pi)^3} (J+2-\lambda_n-\lambda_m)^{-1} (J+2-\lambda_n)^{-1} (J+2-\lambda_m)^{-1}. \quad /58/$$

Для формфактора это дает

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{лестн.}}(Q^2) \Big|_{\text{ГЛП}} &= \frac{1}{Q^4} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{i+3/2}{(i+1)(i+2)} \frac{j+3/2}{(j+1)(j+2)} k_i k_j \\ &\times \{ (1-\delta_{ij}) [ (\frac{Q^2}{m^2})^{\lambda_i+\lambda_j} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} ( (\frac{Q^2}{m^2})^{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_j} - (\frac{Q^2}{m^2})^{\lambda_j} \frac{1}{\lambda_i} ) ] + \\ &+ \delta_{ij} [ (\frac{Q^2}{m^2})^{2\lambda_i} \frac{1}{(\lambda_i)^2} - (\frac{Q^2}{m^2})^{\lambda_i} \frac{\ln(Q^2/m^2)}{\lambda_i} + \frac{1}{(\lambda_i)^2} ] \}, \end{aligned} \quad /59/$$

где  $k_i$  -  $i$ -й гегенбауэровский момент функции  $\Phi_0$ . Результат Чао /77/ соответствует замене выражения в фигурных скобках величиной

$$\{ (\frac{Q^2}{m^2})^{\lambda_i+\lambda_j} \frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)^2} \cdot \frac{\ln(Q^2/m^2)}{\lambda_i+\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j} \}. \quad /60/$$

В отличие от /59/ в /60/ имеются два слагаемых, не содержащих множителя  $(Q^2/m^2)^\lambda$ . Вследствие этого соответствующие выражения для  $F_{\pi}(Q^2)$  имеют совершенно разное поведение при  $Q^2 \rightarrow \infty$ : в /59/ при  $Q^2 \rightarrow \infty$  остаются только вклады с  $j=i=0$  /что соответствует переходу от  $\Phi_0(x)$  к  $\Phi(x, \infty) \sim x(1-x)$  /, тогда как в /60/ и в этом пределе "работают" вклады с любыми  $i, j$  /т.е. слегка модифицируется борновская амплитуда, а волновая функция  $\Phi(x)$  остается прежней/.

Уравнение /57/ нетрудно обобщить и на случай, когда в ГЛП учитываются также и логарифмы, обусловленные ультрафиолетовыми расходимостями. Для этого необходимо заменить в /57/  $\lambda_n \rightarrow \lambda_n(g^2)$ ;  $(J+2) \rightarrow (J+2+\beta(g) \frac{d}{dg})$ . Возникающему в результате уравнению с помощью обратного меллиновского преобразования можно придать вид уравнения РГ:

$$[Q^2 \frac{d}{dQ^2} + \frac{1}{b_0} (\gamma_i + \gamma_j)] E(Q^2/m^2, i, j) = \int_{m/Q}^{Q/m} \frac{d\xi}{\xi} K(\frac{Qm\xi}{m^2}) K(\frac{Qm}{m^2\xi}), \quad /61/$$

имеющего, однако, специфическую правую часть, содержащую свертку двух "односторонних" функций  $K^*$ . Уравнению /61/ можно дать следующую простую интерпретацию: входящий в диаграмму большой импульс  $Q$  "растекается" по двум компонентам,  $V_L, V_R$ , наводя в них виртуальности  $Qm\xi$  и  $Qm/\xi$  соответственно. В среднем наводятся виртуальности порядка  $Qm$ , существенно меньшие виртуальности зондирующего импульса. Зависимость "наведенных" виртуальностей от  $m$ , т.е. от параметра инфракрасного обрезания, указывает на то, что факторизация вкладов малых и больших расстояний в этой задаче не имеет места. Это соображение, основанное на качественном анализе свойств уравнения /61/, подтверждается и явным видом простейшего решения /59/.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, отметим следующие моменты. Как показывает анализ простейшего примера /раздел II/, закон степенного убывания упругих формфакторов двухчастичных систем в зависимости от вида функции, описывающей распределение составляющих по импульсу, может определяться либо характером взаимодействия на малых расстояниях /в этом случае, т.е. для достаточно узких волновых функций, применимы соображения, основанные на анализе размерностей /16-17/, либо для широкой в.ф. - ее поведением в области  $x \rightarrow 0$  /соответствующей такой ситуации, когда кварк, взаимодействующий с внешним током, несет практически весь импульс составной системы/. Для в.ф., которые при  $x \rightarrow 0$  ведут себя, как  $x^1$ , реализуется пограничный режим, характеризующийся появлением дополнительного логарифма. Специфика модели  $\phi_{(6)}^3$ , как установлено в разделах III-V, состоит в том, что даже в том случае, когда затравочное распределение  $\Phi_0(x)$  является достаточно узким, "перенормировка", связанная с учетом радиационных поправок, приводит к появлению в полной в.ф. компонент  $\Phi(x)$ , которые при  $x \rightarrow 0$  ведут себя, как  $x^1$ , и дают вследствие этого дополнительный "неренормгрупповой" логарифм. Используя терминологию меллиновского представления, можно дать и другую формулировку: "неренормгрупповой" логарифм появляется в том случае, когда и "левый"  $V_L$ , и "правый"  $V_R$  подграфы одновременно дают ведущий полюс по  $J$ .

Для более сложных моделей /описывающих кварки и/или глюоны с ненулевым спином/ требование "одновременности" становится нетривиальным, поскольку ведущий вклад при этом может быть получен, как правило, лишь для некоторой определенной комбинации спинорных факторов. В частности, для формфактора пиона в КХД подграфы  $V_L, V_R$  не могут одновременно /т.е. для одного и того же сла-

\* По определению,  $K(Q^2/m^2)$  является обратным меллиновским образом функции  $(1/m^2)^{J+2} \bar{K}(J)$ .

гаемого в шпуре по  $\gamma$ -матрицам/ дать ведущий полюс  $(J+1)^{-1}$ , и неренормгрупповые логарифмы возникают только на уровне степенных поправок<sup>1,5/</sup>.

Для протонного формфактора ситуация сложнее. В этом случае удается, в частности, "состыковать" два ведущих борновских вклада в одной диаграмме<sup>3/</sup>. Методы, основанные на судаковской параметризации, позволили получить ряд результатов<sup>3,6/</sup> /в<sup>6/</sup> установлено, например, что сумма всех 2-петлевых вкладов, содержащих неренормгрупповой логарифм, отлична от нуля/, однако в целом эта задача еще требует дальнейшего исследования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ефремов А.В., Радюшкин А.В. ТМФ, 1980, 42, с.147.
2. Brodsky S.J., Lepage G.P. Phys.Rev., 1980, D22, p.12157.
3. Duncan A., Mueller A.H. Phys.Rev., 1980, D21, p.1636.
4. Bebek C. et al. Phys.Rev., 1976, D13, p.25.
5. Efremov A.V., Radyushkin A.V. Phys.Rev.Lett., 1980, 94B, p.245.
6. Мильштейн А.И., Фадин В.С. ЯФ, 1981, 33, с.1391.
7. Chao S-C. Phys.Rev., 1980, D21, p.3423.
8. Appelquist T., Poggio E.C. Phys.Rev., 1974, D10, p.3280.
9. Ефремов А.В., Радюшкин А.В. ТМФ, 1977, 30, с.168.
10. Ефремов А.В., Радюшкин А.В. ТМФ, 1980, 44, с.327.
11. Mandelstam S. Proc.Roy. Soc., 1955, A233, p.248.
12. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
13. Завьялов О.И. Перенормированные диаграммы Фейнмана. "Наука", М., 1979.
14. Диттес Ф.-М., Радюшкин А.В. ЯФ, 1981, 34, с.529.
15. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1974, т.2.
16. Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N. Lett.Nuovo Cim., 1973, 7, p.719.
17. Brodsky S.J., Farrar G.R. Phys.Rev.Lett., 1973, 31, p.1153.

Рукопись поступила в издательский отдел  
14 сентября 1982 года.

Ефремов А.В., Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. P2-82-672  
Формфактор пиона в скалярной модели

На примере простой скалярной модели  $\phi_{(\theta)}^3$  излагается метод анализа формфакторов составных систем, основанный на систематическом использовании альфа-представления фейнмановских диаграмм. Исследуется природа "неренормгрупповых" логарифмов, специфичных для задач формфакторного типа. Проведено суммирование лестничных вкладов в главном логарифмическом приближении.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Efremov A.V., Nesterenko V.A., Radyushkin A.V. P2-82-672  
Pion Form Factor in a Scalar Model

Using as an example the simple scalar model  $\phi_{(\theta)}^3$  we describe the method of analyzing the bound state form factors based on the systematic use of the alpha-representation for Feynman diagrams. The nature of "non-renormgroup" logarithms specific for the form factor type problems is investigated. The summation of ladder contributions is performed in the leading logarithm approximations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Instit