сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

16/83

3/1-83

Р2-82-647

Б.М.Барбашов, А.Л.Кошкаров, В.В.Нестеренко

УРАВНЕНИЯ ВЛОЖЕНИЯ МИРОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ В МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1982

1. Динамика релятивистской струны в геометрическом подходе описывается уравнениями Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи, определяющими вложение минимального двумерного многообразия в плоское пространство большей размерности. Эти уравнения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, причем число неизвестных функций в системе превосходит число уравнений. С ростом размерности объемлющего пространства эта разница возрастает. Природа такой неопределенности уравнений вложения связана с тем, что локальный репер на мировой поверхности струны, погруженной в $p+2$-мерное псевдоевклидово пространство, определен не однозначно, а лишь с точностью до преобразований из группы $SO(1,1)\times SO(p)$ /1-5/. Иными словами, нормали к мировой поверхности струны можно выбирать поразному. Кроме того, существует еще произвол в выборе параметров на мировой поверхности струны. Ясно, что если каким-либо образом выбрать нормали, то число неизвестных функций, входящих в систему уравнений Гаусса, Петерсона-Кодацци, Риччи, уменьшается. Можно предположить, что фиксация всех p нормалей к мировой поверхности струны в $p+2$-мерном пространстве приведет к тому, что число неизвестных функций и число уравнений совпадут. Замечательным свойством системы уравнений Гаусса, Петерсона-Кодацци, Риччи для минимальной поверхности является то, что существует простой способ получения их общего решения. Это решение находится с помощью представления основных векторов мировой поверхности струны в некотором специальном базисе /6/. Системы уравнений, описывающие динамику струны в 4- и 5-мерном пространстве, получены и решены в работах /7-9/.

В данной работе получена система из 5 дифференциальных уравнений с пятью неизвестными функциями, описывающими мировую поверхность релятивистской струны в шестимерном пространстве-времени. Предлагаемый способ получения уравнений может быть использован в случае произвольной размерности пространства-времени.

2. Уравнения Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи, описывающие вложение мировой поверхности струны в $2+p$-мерное псевдоевклидово пространство, имеют следующий вид /1,6,7/:

$$R_{ijk\ell} = \sum_{\sigma=1}^{p} (b_{\sigma|i\ell}\, b_{\sigma|jk} - b_{\sigma|ik}\, b_{\sigma|j\ell}), \qquad /1/$$

$$b_{\sigma|ij;k} - b_{\sigma|ik;j} = \sum_{\tau=1}^{p} (\nu_{\tau\sigma|j}\, b_{\tau|ik} - \nu_{\tau\sigma|k}\, b_{\tau|ij}), \qquad /2/$$

$$\nu_{\tau\sigma|j;k} - \nu_{\tau\sigma|k;j} + \sum_{\rho=1}^{p} (\nu_{\rho\tau|k}\,\nu_{\rho\sigma|j} - \nu_{\rho\tau|j}\,\nu_{\rho\sigma|k}) + \qquad /3/$$

$$+ g^{\ell m} (b_{\tau|\ell j}\, b_{\sigma|mk} - b_{\tau|\ell k}\, b_{\sigma|mj}) = 0,$$

где $R_{ijk\ell}$ – тензор кривизны мировой поверхности; $b_{\sigma|ij}$ -симметричные по i, j коэффициенты второй квадратичной формы; $\nu_{\tau\sigma|i}$ -антисимметричные по τ, σ коэффициенты кручения; $g_{\ell m}$ - метрика мировой поверхности. В формулах /1-3/ латинские индексы пробегают значения 1,2; греческие - 1,2,..., p . Точка с запятой означает ковариантное дифференцирование относительно g_{ik} . В качестве неизвестных функций в системе /1-3/ рассматриваются величины g_{ik}, $b_{\sigma|ij}$, $\nu_{\tau\sigma|i}$, зависящие от точки на мировой поверхности, определяемой парой параметров u^1, u^2.

В соответствии с динамикой струны вложение мировой поверхности осуществляется минимальным образом. При этом удобно выбрать конформные координаты на поверхности: $g_{12} = 0$, $g_{11} + g_{22} = 0$. Тогда условие минимальности вложения принимает простой вид:

$$b_{\sigma|11} = b_{\sigma|22}, \quad \sigma = 1,2,\dots, p.$$

Теперь ковариантное дифференцирование в /2/ и /3/ можно заменить на обычное, что легко проверить вычислением.

Вместо функций $b_{\sigma|ij}$, $\nu_{\tau\sigma|i}$, g_{ik} удобно ввести величины A_σ, B_σ, $m_{\tau\sigma}$, $n_{\tau\sigma}$, u в качестве неизвестных функций:

$$A_\sigma = b_{\sigma|12} + b_{\sigma|11}; \quad B_\sigma = b_{\sigma|12} - b_{\sigma|11}; \quad g_{11} = -g_{22} = u;$$

$$n_{\tau\sigma} = \nu_{\tau\sigma|1} - \nu_{\tau\sigma|2} = -n_{\sigma\tau}; \quad m_{\tau\sigma} = \nu_{\tau\sigma|1} + \nu_{\tau\sigma|2} = -m_{\sigma\tau}.$$

Удобно также ввести вместо переменных u^1, u^2, параметризующих поверхность, изотропные параметры $\alpha = u^1 + u^2$, $\beta = u^1 - u^2$. Учитывая, что на поверхности выбраны конформные координаты, а также условие минимальности вложения и симметрии величины $b_{\sigma|ij}$, запишем систему /1-3/ в виде

$$R_{1212} = 2u(\ln u)_{,\alpha\beta} = \sum_{\tau=1}^{p} A_\tau B_\tau, \qquad /4/$$

$$2A_{\sigma,\beta} = -A_\tau n_{\tau\sigma}, \quad 2B_{\sigma,\alpha} = -B_\tau m_{\tau\sigma}, \qquad /5/$$

$$\tau, \sigma = 1,2,\dots,p,$$

$$n_{\tau\sigma,\alpha} - m_{\tau\sigma,\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{p} (m_{\tau\rho}\, n_{\rho\sigma} - n_{\tau\rho}\, m_{\rho\sigma}) - \qquad /6/$$

$$- \frac{1}{u}(A_\tau B_\sigma - A_\sigma B_\tau),$$

где индекс после запятой означает обычное дифференцирование по соответствующей переменной. Система /4-6/ эквивалентна системе /1-3/, но выглядит значительно проще. Важно отметить, что число неизвестных функций в системе /4-6/ превышает число уравнений, если $p > 1$.

Уравнения /5/ имеют два интеграла. Действительно, умножая равенства /5/ на A_σ и B_σ соответственно и суммируя по σ, находим с учетом антисимметрии $n_{\tau\sigma}$, $m_{\tau\sigma}$:

$$\Big(\sum_{\sigma=1}^{p} A_\sigma^2\Big)_{,\beta} = 0, \qquad \Big(\sum_{\sigma=1}^{p} B_\sigma^2\Big)_{,\alpha} = 0$$

или

$$\sum_{\sigma=1}^{p} A_\sigma^2 = a^2(\alpha), \qquad \sum_{\sigma=1}^{p} B_\sigma^2 = b^2(\beta), \qquad /7/$$

где $a(\alpha)$ и $b(\beta)$-произвольные функции.

Для дальнейшего преобразования системы /4-6/ удобно задать направление некоторых нормалей к мировой поверхности, поскольку положение нормалей не фиксировано, если $p > 1$. В этом случае первые две нормали η^μ_1 и η^μ_2 удобно выбрать, согласно [8], параллельными векторам $x^\mu_{;11}$ и $x^\mu_{;12}$ соответственно. В асимптотических координатах на мировой поверхности, задаваемых уравнениями

$$(x_{;11} \pm x_{;12})^2 = -q^2;$$

где q - константа, произвольные функции, входящие в /7/, фиксируются: $a(\alpha) = b(\beta) = q$ [6]. При этом обращаются в нуль все коэффициенты второй квадратичной формы, кроме двух: $b_{1|11} \neq 0$, $b_{2|12} \neq 0$. Это означает, что векторы A_σ и B_σ становятся двухкомпонентными: $A_\sigma = (A_1, A_2, 0, \dots, 0)$, $B_\sigma = (-A_1, A_2, 0, \dots, 0)$. В силу соотношений /7/ компоненты A_1, A_2 не являются независимыми. Учтем это явно, вводя угол θ_1 : $A_1 = q\cos\frac{\theta_1}{2}$, $A_2 = q\cos\frac{\theta_1}{2}$. Теперь уравнения /5/ для $\sigma = 1,2$ дают $n_{12} = -\theta_{1,\beta}$, $m_{12} = \theta_{1,\alpha}$, а для $\sigma > 2$ они имеют вид

$$n_{1\sigma}\cos\frac{\theta_1}{2} + n_{2\sigma}\sin\frac{\theta_1}{2} = 0, \quad -m_{1\sigma}\cos\frac{\theta_1}{2} + m_{2\sigma}\sin\frac{\theta_1}{2} = 0, \quad \sigma > 2.$$

Эти равенства тождественно удовлетворяются, если

$$n_{1\sigma} = -n_\sigma \sin\frac{\theta_1}{2}, \quad n_{2\sigma} = n_\sigma \cdot \cos\frac{\theta_1}{2}, \qquad /8/$$

$$m_{1\sigma} = m_\sigma \sin\frac{\theta_1}{2}, \quad m_{2\sigma} = m_\sigma \cos\frac{\theta_1}{2}, \quad \sigma > 2.$$

Здесь функции n_σ и m_σ введены вместо $n_{i\sigma}$ и $m_{i\sigma}$. Таким образом, уравнения /5/ теперь полностью разрешены. При этом вместо функций A_σ, B_σ, $n_{i\sigma}$, $m_{i\sigma}$ появились другие функции: θ_1, n_σ, m_σ.

Ограничимся далее для простоты случаем шестимерного объемлющего пространства, то есть $p = 4$. Наша цель состоит в том, чтобы свести систему /4/-/6/ к пяти уравнениям для пяти неизвестных функций. Учитывая связь величин A_σ, B_σ с углом θ_1 и принимая во внимание, что $n_{12} = -\theta_{1,\beta}$, $m_{12} = \theta_{1,\alpha}$, а также пользуясь формулами /8/, после ряда громоздких преобразований систему /4/-/6/ приведем к следующему виду:

$$2 \cdot u(\ln u)_{,\alpha\beta} = -q^2 \cdot \cos\theta_1, \qquad /9/$$

$$2 \cdot \theta_{1,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sin\theta_1 \left(\frac{2q^2}{u} + \sum_{\rho=3,4} n_\rho m_\rho\right), \qquad /10/$$

$$(n_\sigma \sin\theta_1)_{,\alpha} = -m_\sigma\theta_{1,\beta} - \frac{1}{2}\sin\theta_1 \cdot \sum_{\rho=3,4} n_\rho m_{\rho\sigma}, \quad \sigma = 3,4, \qquad /11/$$

$$(m_\sigma \sin\theta_1)_{,\beta} = -n_\sigma\theta_{1,\alpha} - \frac{1}{2}\sin\theta_1 \sum_{\rho=3,4} m_\rho n_{\rho\sigma}, \quad \sigma = 3,4. \qquad /12/$$

Здесь уравнение /9/ получено из /4/; /10/ следует из /6/ при $\tau = 1$, $\sigma = 2$. Уравнения /11/ получаются из /6/, когда $\tau = i = 1,2$, $\sigma = 3,4$. Наконец, /6/ в случае $\tau = 3$, $\sigma = 4$ сводится к /12/. Нетрудно видеть, что семь уравнений /9/-/12/ содержат восемь неизвестных функций: u, θ_1, n_3, n_4, m_3, m_4, n_{34}, m_{34}.

Далее преобразуем уравнения /11/. Проектируя каждое из них на векторы $n_\sigma \sin\theta_1$ и $m_\sigma \sin\theta_1$, получим

$$\frac{1}{2}\left(\sin\theta_1 \cdot \sum_{\sigma=3,4} n_6^2\right)_{,\alpha} = -\theta_{1,\beta} \sum_{\sigma=3,4} n_\sigma m_\sigma,$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin\theta_1 \cdot \sum_{\sigma=3,4} m_\sigma^2\right)_{,\beta} = -\theta_{1,\alpha} \sum_{\sigma=3,4} n_\sigma m_\sigma.$$

Отсюда видно, что теперь удобно вместо функций n_σ, m_σ ввести четыре функции n, m, ψ, χ:

$$n_3 = n\cos\psi, \quad n_4 = n\sin\psi, \quad m_3 = m\cos\chi, \quad m_4 = m\sin\chi. \qquad /13/$$

Тогда предыдущие формулы записываются так:

$$(n \cdot \sin\theta_1)_{,\alpha} = -\theta_{1,\beta}\, m\cos(\psi - \chi),$$

$$(m \cdot \sin\theta_1)_{,\beta} = -\theta_{1,\alpha}\, n\cos(\psi - \chi). \qquad /14/$$

С помощью этих уравнений из /11/ теперь легко выразить n_{34} и m_{34}:

$$n_{34} = -2\left[\chi_{,\beta} + \theta_{1,\alpha} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{\sin(\psi-\chi)}{\sin\theta_1}\right], \quad m_{34} = -2\left[\psi_{,\alpha} - \theta_{1,\beta}\frac{m}{n} \cdot \frac{\sin(\psi-\chi)}{\sin\theta_1}\right].$$

Еще раз применив уравнение /14/, этим равенствам можно придать и такой вид:

$$n_{34} = -2\{\chi_{,\beta} - \mathrm{tg}(\psi-\chi)\ \ln(m \cdot \sin\theta_1)_{,\beta}\},$$

$$m_{34} = -2\{\psi_{,\alpha} + \mathrm{tg}(\psi-\chi)\,[\ln(n \cdot \sin\theta_1)]_{,\alpha}\}. \qquad /15/$$

Итак, вместо четырех уравнений /11/ имеем четыре уравнения /14/ и /15/. Отметим, что число неизвестных функций в них уменьшилось на единицу и сравнялось с числом уравнений, потому что во все формулы вместо функций ψ и χ входит их разность $\theta_2 = \psi - \chi$. Подставляя формулы /13/ в /10/, /15/ в /12/, записываем окончательно систему /9/-/12/ в следующем виде:

$$(\ln u)_{,\alpha\beta} = -\frac{q^2}{2u}\cos\theta_1,$$

$$\theta_{1,\alpha\beta} = \frac{1}{4}\sin\theta_1 \left[2\frac{q^2}{u} + n \cdot m \cdot \cos\theta_2\right],$$

$$\theta_{2,\alpha\beta} = -\{\mathrm{tg}\theta_2 \cdot [\ln(n\ \sin\theta_1)]_{,\alpha}\}_{,\beta} - \{\mathrm{tg}\theta_2\,[\ln(m\ \sin\theta_1)]_{,\beta}\}_{,\alpha} - \frac{1}{4} n \cdot m \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2,$$

$$(n \cdot \sin\theta_1)_{,\alpha} = -\theta_{1,\beta} \cdot m \cdot \cos\theta_2, \quad (m \cdot \sin\theta_1)_{,\beta} = -n \cdot \theta_{1,\alpha} \cdot \cos\theta_2,$$

где неизвестными функциями являются u, θ_1, θ_2, n, m. Общее решение данной системы, зависящее от 8 произвольных функций одной переменной, может быть построено точно так же, как это было сделано в /8,9/ для аналогичных систем уравнений меньшей размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. ИЛ, М., 1948.
2. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. ИЛ, М., 1960.
3. Omnes R. Nucl.Phys., 1979, B149, N2, p.269.
4. Kamimura K. Lett.Math.Phys., 1980, 4, N2, p.115.
5. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. JINR, E2-82-364, Dubna, 1982.
6. Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. ТМФ, 1979, 39, с.27.
7. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. J.Phys., 1980, A13, p.301.
8. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. Hadronic Journal, 1982, N5, 2, p.659.
9. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. ТМФ, 1982, т.52, №1, с.3.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 сентября 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л., Нестеренко В.В. P2-82-647
Уравнения вложения мировой поверхности релятивистской струны в многомерные пространства

Уравнения Гаусса-Петерсона-Кодацци-Риччи для мировой поверхности струны /минимальной поверхности/ в 6-мерном псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой метрики Минковского сведены к системе пяти нелинейных уравнений в частных производных на пять скалярных функций от двух независимых переменных. В этой системе три уравнения второго порядка и два - первого. Полученная система уравнений допускает построение общего решения в явном виде.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Barbashov B.M., Koshkarov A.L., Nesterenko V.V. P2-82-647
The Embedding Equations for the Relativistic String World Sheet in the Many-Dimensional Spaces

The Gauss-Godazzi-Ricci equations which describe the world sheet of the relativistic string (two-dimensional minimal surface) in the six-dimensional pseudo-Euclidean space with the Minkowski signature of the metric, are reduced to the system of five nonlinear partial differential equations for five scalar functions of two independent variables. In this system there are three second order equations and two first order ones. The general solution of these equations can be constructed in an explicit form.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.