объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-563

А.Д.Линкевич, В.И.Саврин,
В.В.Санадзе, Н.Б.Скачков

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ НУКЛОНА КАК СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ КВАРКА И ДИКВАРКА

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена нахождению приближенных аналитических решений релятивистских уравнений для волновых функций /ВФ/ кварк-дикварковой системы. Кварк-дикварковая модель нуклона приобрела в последние годы известность в связи с обсуждением экспериментально наблюдаемых $1/Q^2$-поправок к структурным функциям глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния. Этой модели посвящены, например, работы [1,2]. В [2] нами были получены формулы для структурных функций через ВФ нуклона, составленного из кварка со спином 1/2 и дикварка со спином 0 и 1. Эти ВФ удовлетворяют ковариантным трехмерным уравнениям квазипотенциального типа [3-5], ядра которых /квазипотенциалы/ совпадают в первом приближении с амплитудами однобозонного обмена. Уравнения для ВФ частиц со спинами 0, 1/2 и 1, 1/2 рассматривались также в [6].

В качестве квазипотенциала мы будем использовать амплитуду одноглюонного обмена квантовой хромодинамики /КХД/ и полученную в [7] эффективную амплитуду одноглюонного обмена. Эта эффективная амплитуда, как было показано в [8], хорошо аппроксимирует амплитуду КХД с любым известным в литературе выражением для эффективной константы связи. В следующем разделе мы приведем уравнения для ВФ, решения которых будут найдены, согласно [9], в разделе 3.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ НУКЛОНА

В [2] было показано, что уравнения для одновременных ВФ кварк-дикварковой системы с проекцией полного спина r могут быть представлены в виде

$$2\Delta^{\circ}_{p,m_2\lambda}(M-\Delta^{\circ}_{p,m_1\lambda}-\Delta^{\circ}_{p,m_2\lambda})\phi^{(i)r_N}_{r}(\vec{\Delta}_{p,\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{\Delta}_{k,\lambda}}{2\Delta^{\circ}_{k,m_1\lambda}}V^{(i)r'}_{r}(\Delta_{p,\lambda};\Delta_{k,\lambda})\phi^{(i)r_N}_{r'}(\vec{\Delta}_{k,\lambda}). \qquad /2.1/$$

Значение индекса $i=0$ отвечает случаю бесспинового дикварка, а значение $i=1$ - случаю дикварка со спином 1. Квазипотенциалы $V^{(i)}$, как уже отмечалось, совпадают в первом приближении с амплитудами рассеяния кварка на дикварке. Спиновый индекс r_N входит в определение ВФ Бете-Солпитера, отвечающей связанному состоянию /см. формулы /2.1/, /2.2/ в [2] /.

Ковариантно определенный в с.ц.и. импульс относительного движения частиц задается формулой

$$\vec{\Delta}_{k,\lambda} \equiv (\vec{L}^{-1}_{\lambda}\vec{k}) = \vec{k} - \frac{\vec{P}}{M}\left(k_0 - \frac{\vec{P}\vec{k}}{P_0+M}\right), \qquad /2.2/$$

$$\Delta^{\circ}_{k,m_j\lambda} \equiv \sqrt{m_j^2+\vec{\Delta}^2_{k,\lambda}}, \quad j=1,2,$$

где m_1 есть масса кварка, а m_2- масса дикварка, L^{-1}_{λ} - чисто лоренцевское преобразование из системы отсчета, в которой нуклон имеет 4-импульс P_{μ} и 4-скорость $\lambda_{\mu}\equiv P_{\mu}/\sqrt{P^2}$, в систему покоя: $L^{-1}_{\lambda}P = (M, 0)$.

Спиновая структура ВФ нуклона задается формулами

$$\phi^{(0)r_N}_{\sigma}(\vec{\Delta}_{p,\lambda}) = u_{\alpha}(\overset{\circ}{P}, r_N)\bar{u}_{\beta}(\Delta_{p,\lambda};\sigma)\cdot\Phi^{(0)}_{\alpha\beta}(\vec{\Delta}_{p,\lambda}),$$

$$\phi^{(1)r_N}_{\sigma\kappa}(\vec{\Delta}_{p,\lambda}) = u_{\alpha}(\overset{\circ}{P}, r_N)\bar{u}_{\beta}(\Delta_{p,\lambda};\sigma)\overset{*}{\epsilon}_{\rho}(-\vec{\Delta}_{p,\lambda};\kappa)\Phi^{(1)\rho}_{\alpha\beta}(\vec{\Delta}_{p,\lambda}). \qquad /2.3/$$

Здесь σ и κ есть соответственно поляризации кварка и /векторного/ дикварка, которые "сидят" на одном и том же импульсе $\Delta_{p,\lambda}$ /см. подробнее [2] /, а $\overset{\circ}{P}\equiv(L^{-1}_{\lambda}P) = 0$. Биспиноры $u(p,\sigma)$ частиц массы m_1 и векторы поляризации $\epsilon_{\mu}(p,\kappa)$ частиц массы m_2 нормированы условиями

$$\bar{u}(p,\sigma)u(p,\sigma') = 2m_1\delta_{\sigma\sigma'}, \quad \overset{*}{\epsilon}(p,\kappa)\epsilon(p,\kappa') = \delta_{\kappa\kappa'}. \qquad /2.4/$$

Представив матричные функции $\Phi^{(0)}$ и $\Phi^{(1)}$ в виде разложения по матрицам I, γ_{μ}, $\sigma_{\mu\nu}\equiv i\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}$, γ_5, $\gamma_{\mu}\gamma_5$, получаем

$$\Phi^{(0)}_{\alpha\beta}(\Delta_{p,\lambda}) = \delta_{\alpha\beta}\cdot\psi^{(0)}(\Delta_{p,\lambda}),$$

$$\Phi^{(1)\rho}_{\alpha\beta}(\Delta_{p,\lambda}) = \gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\cdot\psi^{(1)}(\Delta_{p,\lambda}), \qquad /2.5/$$

где $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(1)}$ есть скалярные функции.

Квазипотенциалы $V^{(0)\sigma'}_{\sigma}$ и $V^{(1)\sigma'\kappa'}_{\sigma\kappa}$, из которых с помощью коэффициентов Клебша-Гордана строятся ядра уравнений /2.1/ /см. [2] /, в спиральном базисе естественно задать в виде *

$$V^{(0)\sigma'}_{\sigma}(\Delta_{p,\lambda};\Delta_{k,\lambda}) = V_0(\Delta_{p,\lambda}-\Delta_{k,\lambda})\cdot\bar{u}(\Delta_{k,\lambda};\sigma')\times$$
$$\times\gamma_{\mu}u(\Delta_{p,\lambda};\sigma)\cdot(\tilde{\Delta}_{p,\lambda}+\tilde{\Delta}_{k,\lambda})^{\mu}\cdot f^{(0)}(Q^2), \qquad /2.6/$$

$$V^{(1)\sigma'\kappa'}_{\sigma\kappa}(\Delta_{p,\lambda};\Delta_{k,\lambda}) = V_0(\Delta_{p,\lambda}-\Delta_{k,\lambda})\cdot\bar{u}(\Delta_{k,\lambda};\sigma')\times$$
$$\times\gamma_{\mu}u(\Delta_{p,\lambda};\sigma)\cdot\overset{*}{\epsilon}{}^{\alpha}(-\Delta_{k,\lambda};\kappa')\{-f^{(1)}_1(Q^2)\cdot(\tilde{\Delta}_{k,\lambda}+\tilde{\Delta}_{p,\lambda})^{\mu}g_{\alpha\beta}+$$
$$+f^{(1)}_2(Q^2)\cdot[g_{\alpha}{}^{\mu}(\tilde{\Delta}_{k,\lambda})_{\beta}+g_{\beta}{}^{\mu}(\tilde{\Delta}_{p,\lambda})_{\alpha}]\}\epsilon^{\beta}(-\Delta_{p,\lambda},\kappa), \qquad /2.7/$$

где V_0 есть локальная часть квазипотенциалов, отвечающая однобозонному обмену; $f^{(0)}(Q^2)$, $f^{(1)}_1(Q^2)$, $f^{(1)}_2(Q^2)$ есть соответственно формфакторы скалярного и векторного дикварка

---
* По повторяющимся индексам осуществляется суммирование.

ков. Мы будем рассматривать простейший случай, когда $f_1^{(1)}(Q^2) = f_2^{(1)}(Q^2) \equiv f^{(1)}(Q^2)$. Используем следующие обозначения: $\Delta_{p,\lambda} = (\Delta^\circ_{p,m_1\lambda}; \vec\Delta_{p,\lambda})$; $\tilde\Delta_{p,\lambda} = (\Delta^\circ_{p,m_2\lambda}; -\vec\Delta_{p,\lambda})$.

Подстановка /2.2/-/2.7/ в /2.1/ дает

$$2\Delta^\circ_{p,m_2\lambda}(M - \Delta^\circ_{p,m_1\lambda} - \Delta^\circ_{p,m_2\lambda})\cdot u(\mathring{P}, r_N)\bar u(\Delta_{p,\lambda};\sigma)\times \psi^{(0)}(\vec\Delta_{p,\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec\Delta_{k,\lambda}}{2\Delta^\circ_{k,m_1\lambda}} V_0(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda})\times f_0[(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda})^2]\cdot \bar u(\vec\Delta_{k,\lambda};\sigma')\gamma_\mu u(\vec\Delta_{p,\lambda};\sigma)\times (\tilde\Delta_{p,\lambda}+\tilde\Delta_{k,\lambda})^\mu u(\mathring{P}, r_N)\bar u(\Delta_{k,\lambda};\sigma')\cdot\psi^{(0)}(\vec\Delta_{k,\lambda}); \tag{/2.8/}$$

$$2\Delta^\circ_{p,m_2\lambda}(M - \Delta^\circ_{p,m_1\lambda} - \Delta^\circ_{p,m_2\lambda})\cdot u(\mathring P, r_N)\gamma\rho' \times \bar u(\Delta_{p\lambda};\sigma)\cdot \overset{*}{\epsilon}_{\rho'}(-\Delta_{p,\lambda};\kappa)\cdot\psi^{(1)}(\vec\Delta_{p,\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec\Delta_{k,\lambda}}{2\Delta^\circ_{k,m_1\lambda}}V_0(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda})\cdot\bar u(\Delta_{k,\lambda};\sigma')\gamma_\mu \times u(\Delta_{p,\lambda};\sigma)\cdot \overset{*}{\epsilon}{}^\alpha(-\Delta_{k,\lambda};\kappa')\cdot[-(\tilde\Delta_{k,\lambda}+\tilde\Delta_{p,\lambda})^\mu g_{\alpha\beta} + g_\alpha^\mu(\tilde\Delta_{k,\lambda})_\beta + g_\beta^\mu(\tilde\Delta_{p,\lambda})_\alpha]\cdot\epsilon^\beta(\Delta_{p,\lambda};\kappa)\cdot f_1[(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda})^2]\times u(\mathring P, r_N)\gamma^\rho\bar u(\Delta_{k,\lambda};\sigma')\cdot\overset{*}{\epsilon}_\rho(-\Delta_{k,\lambda};\kappa')\cdot\psi^{(1)}(\vec\Delta_{k,\lambda}); \tag{/2.9/}$$

$$f_i[(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda})^2] \equiv f^{(i)}(Q^2), \quad i=1,2.$$

Умножим уравнение /2.8/ на $\bar u(\mathring P, r_N) u(\Delta_{p,\lambda};\sigma)$ и просуммируем по r, σ, σ'. Уравнение /2.9/ умножим на $\bar u(\mathring P, r_N)\times u(\Delta_{p,\lambda};\sigma)\cdot\epsilon_0(-\Delta_{p,\lambda};\kappa)$ и просуммируем по $r_N, \sigma, \sigma', \kappa, \kappa'$. В результате получаем следующее уравнение для функций $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(1)}$:

$$2\Delta^\circ_{p,m_2\lambda}(M-\Delta^\circ_{p,m_1\lambda}-\Delta^\circ_{p,m_2\lambda})(m_1+\Delta^\circ_{p,m_1\lambda})\psi^{(0)}(\vec\Delta_{p,\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec\Delta_{k,\lambda}}{2\Delta^\circ_{k,m_1\lambda}}V_0(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda}) f_0[(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda})^2]\times\{A(|\vec\Delta_{p,\lambda}|,|\vec\Delta_{k,\lambda}|)\cdot(\vec\Delta_{p,\lambda}\cdot\vec\Delta_{k,\lambda}) + B(|\vec\Delta_{p,\lambda}|,|\vec\Delta_{k,\lambda}|)\}\psi^{(0)}(\vec\Delta_{k,\lambda}), \tag{/2.10/}$$

$$2\Delta^\circ_{p,m_2\lambda}(M-\Delta^\circ_{p,m_1\lambda}-\Delta^\circ_{p,m_2\lambda})\cdot C(|\vec\Delta_{p,\lambda}|)\cdot\psi^{(1)}(\vec\Delta_{p,\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\Delta_{k,\lambda}}{2\Delta^\circ_{k,m_1\lambda}}V_0(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda})\cdot f_1[(\vec\Delta_{p,\lambda}-\vec\Delta_{k,\lambda})^2]\times\{(\vec\Delta_{p,\lambda}\cdot\vec\Delta_{k,\lambda})\cdot[D(|\vec\Delta_{p,\lambda}|,|\vec\Delta_{k,\lambda}|)+(\vec\Delta_{p,\lambda}\cdot\vec\Delta_{k,\lambda})\times E(|\vec\Delta_{p,\lambda}|,|\vec\Delta_{k,\lambda}|)] + F(|\vec\Delta_{p,\lambda}|,|\vec\Delta_{k,\lambda}|)\}\cdot\psi^{(1)}(\vec\Delta_{k,\lambda}). \tag{/2.11/}$$

Функции A, B, C, D, E и F приведены в приложении.

Условие нормировки для ВФ /2.2/ в случае квазипотенциала, не зависящего от энергии системы, имеет вид [/2/]:

$$\int d^3\vec\Delta_{p,\lambda}\,|\phi^{(i)r_N}_{r}(\vec\Delta_{p,\lambda})|^2 = 2M. \tag{/2.12/}$$

В [/2/] было найдено, что величина

$$Z^{(i)}(\Delta_{p,\lambda}) \equiv \sum_{r_N=\pm1/2}|\phi^{(i)}(\vec\Delta_{p,\lambda})|^2 \tag{/2.13/}$$

выражается через ВФ $\psi^{(i)}$ следующим образом:

$$Z^{(0)}(\Delta_{p,\lambda}) = M(m_1+\Delta^\circ_{p,m_1\lambda})\cdot|\psi^{(0)}(\vec\Delta_{p,\lambda})|^2,$$

$$Z^{(1)}(\vec\Delta_{p,\lambda}) = \frac{M}{3}\left[\frac{2m_1}{m_2}(\Delta^\circ_{p,m_2\lambda})^2 - \Delta^\circ_{p,m_1\lambda}-m_1\right]\times|\psi^{(1)}(\vec\Delta_{p,\lambda})|^2. \tag{/2.14/}$$

Подстановка /2.13/, /2.14/ в /2.12/ дает условие нормировки для ВФ $\psi^{(i)}$:

$$\frac12\int d^3\vec\Delta_{p,\lambda}(m_1+\Delta^\circ_{p,m_1\lambda})\cdot|\psi^{(0)}(\vec\Delta_{p,\lambda})|^2 = 1,$$

$$\frac16\int d^3\vec\Delta_{p,\lambda}\left[\frac{2m_1}{m_2}(\Delta^\circ_{p,m_2\lambda})^2-\Delta^\circ_{p,m_1\lambda}-m_1\right]\cdot|\psi^{(1)}(\vec\Delta_{p,\lambda})|^2=1. \tag{/2.15/}$$

Будем рассматривать далее сферически-симметричный случай, отвечающий s-состоянию /ℓ =0/ кварк-дикварковой системы, и использовать следующую параметризацию:

$$|\vec\Delta_{p,\lambda}| = m_1\,\mathrm{sh}\chi_p;\quad \Delta^\circ_{p,m_1\lambda}\equiv\sqrt{m_1^2+\vec\Delta^2_{p,\lambda}} = m_1\mathrm{ch}\chi_p;$$

$$\Delta^\circ_{p,m_2\lambda}\equiv\sqrt{m_2^2+\Delta^2_{p,\lambda}} = m_1\sqrt{\mathrm{sh}^2\chi_p+m_2^2/m_1^2}, \tag{/2.16/}$$

где χ_p есть быстрота.

Мы будем использовать также параметризацию передачи импульса Q^2 в квазипотенциале [/9/]:

$$Q^2 = -q^2 = -(p-k)^2 = -(\Delta_{p,\lambda} - \Delta_{k,\lambda})^2 = (2m_1 \,\mathrm{sh}\, y/2)^2 . \qquad /2.17/$$

В терминах быстроты y квазипотенциалы, для которых мы будем искать решения уравнений /2.10/, /2.11/, примут следующий вид

1/ потенциал одноглюонного обмена КХД:

$$V_{0\,\text{КХД}}(y) = \frac{16\alpha\cdot\alpha_s(Q^2)}{-Q^2} = -\frac{4\pi^2\cdot\alpha_s(y)}{m_1^2\,\mathrm{sh}^2\, y/2} ; \qquad /2.18/$$

2/ эффективный потенциал одноглюонного обмена [7]:

$$V_{0\,\text{КХД}}^{\text{эфф.}}(y) = -\frac{4\pi\cdot g^2}{m_1^2 y\,\mathrm{sh}\, y} \underset{Q^2\to\infty}{\approx} -\frac{8\pi\cdot g^2}{Q^2\cdot\ln Q^2/m_1^2} . \qquad /2.19/$$

Здесь $\alpha_s(Q^2)$ есть "бегущая" константа связи КХД, выражение для которой в трехпетлевом приближении имеет вид [10]:

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} = \frac{1}{\beta_0 L} - \frac{\beta_1}{\beta_0^3}\frac{\ln L}{L^2} + \frac{1}{\beta_0^5 L^3}[(\beta_1^2 - 1)\ln L + (\beta_2\beta_0 - \beta_1^3)] , \quad /2.20/$$

где

$$L = \ln Q^2/\Lambda^2 , \quad \beta_0 = 11 - 2/3\cdot N_f , \quad \beta_1 = 102 - 38/3\cdot N_f ,$$

$$\beta_2 = 2857/2 - 5033/18\cdot N_f + 325/54\cdot N_f^2 ,$$

Λ есть масштабный параметр КХД; N_f - число кварковых ароматов. Первый член в /2.20/ отвечает вкладу однопетлевых диаграмм, второй - двухпетлевых и третий - трехпетлевых диаграмм. Были найдены также приближенные формулы для $\alpha_s(Q^2)$ в одно- и двухпетлевом приближениях с учетом масс кварков /см. [11,8] /. Как было показано в [8], эффективный потенциал КХД /2.19/, введенный в [7], хорошо аппроксимирует потенциал КХД /2.18/ с любым известным в литературе выражением для $\alpha_s(Q^2)$. Мы будем рассматривать случай, когда

$$f_i(Q^2) = \frac{\mathrm{th}^2 y}{y\cdot\mathrm{sh}\, y} , \quad i = 1,2 . \qquad /2.21/$$

Основанием для выбора формфакторов в таком виде служит то обстоятельство, что расчеты в КХД асимптотики формфактора π-мезона как двухкваркового объекта дают

$$F_\pi(Q^2) \underset{Q^2\to\infty}{\approx} \frac{\text{const}}{Q^2\cdot\ln Q^2/\Lambda^2} ,$$

что совпадает с асимптотикой выражения /2.21/.

В нерелятивистском пределе $(|\vec p| \to 0, \quad |\vec q| \to 0)$ имеем

$$f_i(Q^2) \to 1 ,$$

а

$$\chi_p = \ln\frac{p_0 + |\vec p|}{m_1} \to \frac{|\vec p|}{m_1} , \quad y \to \frac{|\vec q|}{m_1} \equiv \frac{|\vec p - \vec k|}{m_1} ,$$

в силу чего потенциал /2.19/ переходит в нерелятивистский кулоновский потенциал:

$$V_{0\,\text{КХД}}^{\text{эфф.}}(y) \to -\frac{4\pi g^2}{(m_1 y)^2} \approx -\frac{4\pi g^2}{q^2} . \qquad /2.22/$$

В результате уравнение /2.1/ с квазипотенциалом /2.19/ переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом. Следовательно, и решение уравнения /2.1/ в нерелятивистском пределе $\chi_p \to 0$ должно переходить в нерелятивистскую кулоновскую ВФ:

$$\phi^{(i)r}_{\ r}{}^{N}(\Delta_{p,\lambda}) \underset{\chi_p\to 0}{\longrightarrow} \frac{\text{const}}{(\mathrm{ch}\chi_p - h)^2} \approx \frac{\text{const}}{(p^2 + 2\mu W)^2} , \qquad /2.23/$$

где

$$h = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{M}{m_1 + m_2} - 1\right) + 1 ,$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad W \equiv -E = (m_1 + m_2) - M .$$

Отсюда с учетом /2.13/, /2.14/ находим

$$\psi^{(0)}(\chi_p) \underset{\chi_p\to 0}{\longrightarrow} \frac{\text{const}}{\sqrt{\chi_p^2 + 4}(\mathrm{ch}\chi_p - h)^2} , \qquad /2.24/$$

$$\psi^{(1)}(\chi_p) \underset{\chi_p\to 0}{\longrightarrow} \frac{\text{const}}{\chi_p(\mathrm{ch}\chi_p - h)^2} .$$

3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим уравнение /2.10/ с потенциалом КХД /2.18/. Проинтегрируем в правой части уравнения по сферическим углам и воспользуемся параметризацией /2.16/. Получаем уравнение в виде

$$\sqrt{\mathrm{sh}^2\chi_p + m_2^2/m_1^2}\,(M/m_1 - \mathrm{ch}\chi_p - \sqrt{\mathrm{sh}^2\chi_p + m_2^2/m_1^2}) \times$$

$$\times (\mathrm{ch}\chi_p + 1)\cdot\psi^{(0)}(\chi_p) =$$

$$= \frac{d_1}{\mathrm{sh}\chi_p}\int d\chi_k\,\mathrm{sh}\chi_k \{\frac{\Lambda^2}{2}A(\chi_p,\chi_k)\cdot J_1(\chi_p,\chi_k) +$$

$$+ [A(\chi_p,\chi_k)\, m_1^2(\mathrm{ch}\chi_p\cdot\mathrm{ch}\chi_k - 1) + B(\chi_p,\chi_k)]\cdot J_2(\chi_p,\chi_k)\}\,\psi^{(0)}(\chi_k) ,$$

где

$$d_1 = \frac{(16\pi^2)^2\Lambda^2}{8(2\pi)^3 m_1}, \qquad /3.2/$$

$$J_1(\chi_p,\chi_k) = -\int\limits_{L_-}^{L_+}\frac{dL}{L^2},\quad J_2(\chi_p,\chi_k) = \int\limits_{L_-}^{L_+}\frac{dL}{L^2\cdot\exp(L)}, \qquad /3.3/$$

$$L_\pm = \ln\{2m_1^2/\Lambda^2\cdot[\mathrm{ch}(\chi_p\pm\chi_k)-1]\}.$$

Для эффективной константы связи КХД $\alpha_s(Q^2)$ мы использовали здесь однопетлевое выражение $\alpha_s(Q^2) = 4\pi/\beta_0 L$, где $L = \ln Q^2/\Lambda^2$, $\beta_0 = 11 - 2/3\cdot N_f$.

Следуя [9], найдем асимптотику ВФ $\psi^{(0)}(\chi_p)$, удовлетворяющей уравнению /3.1/. Для этого перейдем к пределу $\chi_p\to\infty$ как в левой, так и в правой частях /3.1/ и будем считать, что $\chi_p \gg \chi_k$. Это приближение может быть оправдано тем, что при достаточно быстром уравнении ВФ с ростом χ_p/которое необходимо для сходимости нормировочного интеграла /2.15// именно эта область дает основной вклад в интеграл в /3.1/.

Асимптотика интегралов /3.2/ при $\chi_p\to\infty$ находится легко:

$$J_1(\chi_p,\chi_k) \approx -2\chi_k/\chi_p^2, \qquad /3.4/$$

$$J_2(\chi_p,\chi_k) = -\frac{1}{L\cdot\exp(L)} - \mathrm{Ei}(-L)\Big|_{L_-}^{L_+} \approx$$

$$\approx \frac{\Lambda^2\chi_k}{m_1^2\chi_p^2\,\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\chi_k} - [\mathrm{Ei}(-L_+) - \mathrm{Ei}(-L_-)], \qquad /3.5/$$

где $\mathrm{Ei}(x)$ есть интегральная показательная функция [12]. Нетрудно получить, учитывая асимптотическое поведение функции $\mathrm{Ei}(x)$ [13]

$$J_2(\chi_p,\chi_k) \underset{\chi_p\to\infty}{\approx} \frac{\Lambda^2\chi_k}{m_1^2\chi_p^2\,\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\chi_k}.$$

Таким образом, при $\chi_p\to\infty$ уравнение /3.1/ приобретает вид

$$\mathrm{ch}^3\chi_p\cdot\psi^{(0)}(\chi_p) \approx \frac{d_1}{\mathrm{sh}\chi_p}\int d\chi_k\,\mathrm{sh}\chi_k\Big\{-\frac{\Lambda^2}{2}2m_1\mathrm{ch}\chi_p\frac{2\chi_k}{\chi_p^2} +$$

$$+ [2m_1\mathrm{ch}\chi_p\cdot m_1^2(\mathrm{ch}\chi_p\cdot\mathrm{ch}\chi_k) + \qquad /3.6/$$

$$+ m_1^3\,\mathrm{ch}^2\chi_p\,(2+\mathrm{ch}\chi_k)]\frac{\Lambda^2}{m_1^2\chi_p^2\,\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\chi_k}\Big\}\,\psi^{(0)}(\chi_k),$$

где мы учли, что при $\chi_p\to\infty$

$$\mathrm{sh}\chi_p \approx \mathrm{ch}\chi_p;\quad \Delta^{\circ}_{p,m_2}\lambda \approx \Delta^{\circ}_{p,m_1}\lambda;\quad \mathrm{thy}\Big|_{\chi_p-\chi_k}^{\chi_p+\chi_k} \approx 1,$$

в силу чего

$$A(\chi_p,\chi_k) \approx 2m_1\,\mathrm{ch}\chi_p,\quad B(\chi_p,\chi_k) \approx m_1^3.$$

Из /3.6/ находим

$$\psi^{(0)}(\chi_p) \approx \frac{d_1}{\mathrm{ch}^3\chi_p\,\mathrm{sh}\chi_p}\cdot\frac{m_1\Lambda^2\,\mathrm{ch}\chi_p}{\chi^2}\int d\chi_k\,\mathrm{sh}\chi_k\,\times \qquad /3.7a/$$

$$\times\,(1+2/\mathrm{ch}\chi_k)\chi_k\cdot\psi^{(0)}(\chi_k)$$

или

$$\psi^{(0)}(\chi_p) \underset{\chi_p\to\infty}{\approx} \frac{\mathrm{const}}{\chi_p^2\cdot\mathrm{ch}^3\chi_p}. \qquad /3.7б/$$

Аналогичным образом, учитывая, что при $\chi_p\to\infty$

$$C(\chi_p) \approx 2m_1^3/m_2^2\cdot\mathrm{ch}^3\chi_p,$$

$$D(\chi_p,\chi_k) \approx 4m_1^3/m_2^2\cdot\mathrm{ch}^2\chi_p,\quad E(\chi_p,\chi_k) \approx 2m_1/m_2^2\,\mathrm{ch}\chi_p, \qquad /3.8/$$

$$F(\chi_p,\chi_k) \approx m_1^5/m_2^2\cdot\mathrm{ch}^3\chi_p[\sqrt{\mathrm{sh}^2\chi_p + m_2^2/m_1^2(2\,\mathrm{ch}\chi_k-3)} +$$

$$+\,\mathrm{ch}^2\chi_k - 2],$$

находим асимптотику ВФ $\psi^{(1)}(\chi_p)$:

$$\psi^{(1)}(\chi_p) \underset{\chi_p\to\infty}{\approx} \frac{\mathrm{const}}{\chi_p^2\cdot\mathrm{ch}^4\chi_p}. \qquad /3.9/$$

Отметим, что в асимптотике ВФ /3.7/, /3.9/ отсутствует зависимость от масштабного параметра КХД Λ, как и в случае ВФ двух скалярных или двух спинорных частиц [8,9].

Известно, что формулы для $\alpha_s(Q^2)$ справедливы лишь при больших значениях Q^2, когда применима теория возмущений. Применение известных в литературе выражений для $\alpha_s(Q^2)$ в областях малых Q^2 не только не является обоснованным, но и приводит к чисто техническим трудностям. А именно, формулы для $\alpha_s(Q^2)$ сингулярны при $Q^2 \to \Lambda^2$. Таким образом, КХД - потенциал одноглюонного обмена определен лишь при больших Q^2, в силу чего мы можем ставить перед собой лишь рассматривавшуюся выше задачу нахождения асимптотики ВФ.

Вместо сингулярного в области малых Q^2 потенциала КХД /2.18/ мы можем рассмотреть уравнения /2.10/, /2.11/ с эффективным потенциалом одноглюонного обмена /2.19/. Потенциал /2.19/ при $Q^2 \to 0$ регулярен и переходит в нерелятивистском пределе в кулоновский потенциал /см. /2.29//, вследствие чего известны решения уравнений /2.10/, /2.11/ с потенциалом /2.19/ при $\chi_p \to 0$ /см. /2.24//.

Осуществив интегрирование в правой части уравнения /2.10/ с потенциалом /2.11/ по сферическим углам, получаем

$$\begin{aligned}&\sqrt{\operatorname{sh}^2\chi_p + m_2^2/m_1^2}(M/m_1 - \operatorname{ch}\chi_p - \sqrt{\operatorname{sh}^2\chi_p + m_2^2/m_1^2}) \times \\ &\times (\operatorname{ch}\chi_p + 1)\cdot\psi^{(0)}(\chi_p) = \frac{d_2}{\operatorname{sh}\chi_p}\int d\chi_k \operatorname{sh}\chi_k \times \\ &\times \{[A(\chi_p,\chi_k)\cdot m_1^2 \operatorname{ch}\chi_p \operatorname{ch}\chi_k + B(\chi_p,\chi_k)]\cdot K_1(\chi_p,\chi_k) + \\ &+ A(\chi_p,\chi_k) m_1^2 K_2(\chi_p,\chi_k)\}\cdot\psi^{(0)}(\chi_k),\end{aligned} \qquad /3.10/$$

где

$$d_2 = \frac{(4\pi g^2)^2}{4(2\pi)^2 m_1},$$

$$K_1(\chi_p,\chi_k) = \int_{\chi_p-\chi_k}^{\chi_p+\chi_k}\frac{dy}{y^2\operatorname{sh}y}, \quad K_2(\chi_p,\chi_k) = -\int_{\chi_p-\chi_k}^{\chi_p+\chi_k}\frac{dy\cdot\operatorname{cth}y}{y^2}. \qquad /3.11/$$

Поскольку

$$\operatorname{sh}y = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

то

$$K_1(\chi_p,\chi_k) = 2\int_{\chi_p-\chi_k}^{\chi_p+\chi_k}\frac{dy}{y^2\exp(y)}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2ky}.$$

Несложно показать, что при $\chi_p \to \infty$

$$\int_{\chi_p-\chi_k}^{\chi_p+\chi_k}\frac{dy}{y^2\exp(y)} \sim \frac{1}{\chi_p^2\cdot\operatorname{ch}\chi_p},$$

$$\int_{\chi_p-\chi_k}^{\chi_p+\chi_k}\frac{dy}{y^2\exp(3y)} \sim \frac{1}{\chi_p^2\cdot\operatorname{ch}^3\chi_p}$$

и т.д. В результате

$$K_1(\chi_p,\chi_k) \approx \frac{4\operatorname{sh}\chi_k}{\chi_p^2\cdot\operatorname{ch}\chi_p}.$$

Кроме того, при $\chi_p \to \infty$

$$K_2(\chi_p,\chi_k) \approx \frac{1}{\chi_p^2}.$$

Таким образом, при $\chi_p \to \infty$ уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^3\chi_p\cdot\psi^{(0)}(\chi_p) \approx \frac{d_2}{\operatorname{sh}\chi}\int d\chi_k\cdot\operatorname{sh}\chi_k\{[2m_1\operatorname{ch}\chi_p\cdot m_1^2\operatorname{ch}\chi_p\operatorname{ch}\chi_k + \\ + m^3\operatorname{ch}^2\chi_p(2+\operatorname{ch}\chi_k)]4\operatorname{sh}\chi_k(\chi_p^2\cdot\operatorname{ch}\chi_p)^{-1}\}\psi^{(0)}(\chi_k).\end{aligned}$$

В итоге получаем асимптотику ВФ:

$$\psi^{(0)}(\chi_p) \underset{\chi_p\to\infty}{\approx} \frac{\text{const}}{\chi_p^2\cdot\operatorname{ch}^3\chi_p}.$$

Аналогичные выкладки для уравнения /2.11/ с тем же потенциалом /2.19/ дают

$$\psi^{(1)}(\chi_p) \underset{\chi_p\to\infty}{\approx} \frac{\text{const}}{\chi_p^2\cdot\operatorname{ch}^4\chi_p}. \qquad /3.13/$$

Видим, что асимптотика ВФ $\psi^{(0)}(\chi_p)$ и $\psi^{(1)}(\chi_p)$ /3.12/, /3.13/ совпадает с асимптотикой /3.7/, /3.9/, как и следовало ожидать.

Легко видеть, что интерполирующая функция

$$\psi^{(0)}(\chi_p) = \frac{\text{const}\cdot\operatorname{th}\chi_p}{\chi_p\sqrt{\chi_p^2+4}\operatorname{ch}\chi_p(\operatorname{ch}\chi_p - h)^2} \qquad /3.14/$$

обладает как асимптотикой /3.12/ при $\chi_p \to \infty$, так и правильным нерелятивистским пределом /2.24/ при $\chi_p \to 0$ /поскольку в нерелятивистском пределе $f_i(Q^2) \to 1$, то поведение ВФ $\psi^{(0)}(\chi_p)$ и $\psi^{(1)}(\chi_p)$ при $\chi_p \to 0$ должно задаваться формулами /2.24//.

В случае векторного дикварка в качестве интерполирующей функции можно использовать функцию вида

$$\psi^{(1)}(\chi_p) = \frac{\mathrm{const}\cdot \mathrm{th}\chi_p}{\chi_p^2 \mathrm{ch}\chi_p (\mathrm{ch}\chi_p - h)^2}. \qquad /3.15/$$

В нерелятивистском пределе $\chi_p \to 0$ ВФ /3.15/ переходит в нерелятивистскую ВФ /2.24/, поскольку $\mathrm{ch}\chi_p \to 1$, а при $\chi_p \to \infty$ функция /3.15/ обладает правильной асимптотикой. Как и функция /3.14/, ВФ /3.15/ определена во всем интервале изменения $0 \le |p| < \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе найдены приближенные решения квазипотенциальных уравнений для волновых функций частиц со спинами 0, 1/2 и 1,1/2 с потенциалом, отвечающим одноглюонному обмену, а также с "эффективным потенциалом одноглюонного обмена". Эти решения будут использоваться для расчета структурных функций и других характеристик нуклона как связанного состояния кварка и дикварка.

Авторы благодарны В.Г.Кадышевскому, С.П.Кулешову, В.А.Мещерякову, А.А.Архипову, В.Н.Капшаю за полезные обсуждения и интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для сокращения записи воспользуемся здесь следующими обозначениями:

$$\Delta^{\circ}_{p1} \equiv \Delta^{\circ}_{p,m_1\lambda}; \qquad \Delta^{\circ}_{p2} \equiv \Delta^{\circ}_{p,m_2\lambda};$$

$$\Delta^{\circ}_{k1} \equiv \Delta^{\circ}_{k,m_1\lambda}; \qquad \Delta^{\circ}_{k2} \equiv \Delta^{\circ}_{k,m_2\lambda};$$

$$A = \Delta^{\circ}_{p1} + \Delta^{\circ}_{p2} + \Delta^{\circ}_{k1} + \Delta^{\circ}_{k2} + 2m_1;$$

$$B = [\Delta^{\circ}_{p1}\Delta^{\circ}_{k1}\Delta^{\circ}_{k2} + \Delta^{\circ}_{p1}(\Delta^{\circ}_{k1}) + (\Delta^{\circ}_{p1})\Delta^{\circ}_{k1}] +$$

$$+ m_1[\Delta^{\circ}_{p1}\Delta^{\circ}_{p2} + \Delta^{\circ}_{k1}\Delta^{\circ}_{k2} + (\Delta^{\circ}_{p1})^2 + (\Delta^{\circ}_{k1})^2 +$$

$$+ \Delta^{\circ}_{p1}\Delta^{\circ}_{k2} + \Delta^{\circ}_{p2}\Delta^{\circ}_{k1}] + m_1^2[(\Delta^{\circ}_{p2} - \Delta^{\circ}_{p1}) + (\Delta^{\circ}_{k2} - \Delta^{\circ}_{k1})] - 2m_1^3;$$

$$C = -[m_1 + \Delta^{\circ}_{p1}] + \frac{1}{m_2^2}[(\Delta^{\circ}_{p1})^2\Delta^{\circ}_{p2} + \Delta^{\circ}_{p1}(\Delta^{\circ}_{p2})^2] +$$

$$+ \frac{m_1}{m_2^2}(\Delta^{\circ}_{p2})^2 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\Delta^{\circ}_{p2};$$

$$D = [\Delta^{\circ}_{k2} - \Delta^{\circ}_{k1} - m_1] + \frac{1}{m_2^2}[\Delta^{\circ}_{p2}(\Delta^{\circ}_{p2} - \Delta^{\circ}_{p1})(\Delta^{\circ}_{k1} - \Delta^{\circ}_{k2}) +$$

$$+ \Delta^{\circ}_{p1}\Delta^{\circ}_{k1}(\Delta^{\circ}_{k1} + 2\Delta^{\circ}_{k2})] + \frac{m_1}{m_2^2}[\Delta^{\circ}_{k1}(2\Delta^{\circ}_{k2} - \Delta^{\circ}_{p2}) + \Delta^{\circ}_{k2}(\Delta^{\circ}_{k2} + \Delta^{\circ}_{p2}) +$$

$$+ \Delta^{\circ}_{p2}(3\Delta^{\circ}_{p1} + \Delta^{\circ}_{p2}) + (\Delta^{\circ}_{k1})^2] + \frac{m_1^2}{m_2^2}[3\Delta^{\circ}_{p2} - \Delta^{\circ}_{p1} - m_1];$$

$$E = \frac{1}{m_2^2}[2\Delta^{\circ}_{p2} + \Delta^{\circ}_{k1} + \Delta^{\circ}_{k2} - m_1];$$

$$F = -\Delta^{\circ}_{p1}\Delta^{\circ}_{k1}(\Delta^{\circ}_{k1} + 3\Delta^{\circ}_{k2}) + m_1[3\Delta^{\circ}_{k2}(\Delta^{\circ}_{p1} - \Delta^{\circ}_{k1}) -$$

$$-(2(\Delta^{\circ}_{p1})^2 + (\Delta^{\circ}_{k1})^2)] + m_1^2(\Delta^{\circ}_{p1} + 3\Delta^{\circ}_{k2}) + 3m_1^3 +$$

$$+ \frac{1}{m_2^2}\{\Delta^{\circ}_{p1}\Delta^{\circ}_{p2}\Delta^{\circ}_{k1}[\Delta^{\circ}_{k1}(\Delta^{\circ}_{p1} + \Delta^{\circ}_{p2}) + \Delta^{\circ}_{k2}(\Delta^{\circ}_{p1} + 3\Delta^{\circ}_{p2})] +$$

$$+ \Delta^{\circ}_{k1}\Delta^{\circ}_{k2}(\Delta^{\circ}_{p1})^2(\Delta^{\circ}_{k1} + \Delta^{\circ}_{k2})\} +$$

$$+ \frac{m_1}{m_2^2}\{\Delta^{\circ}_{p1}\Delta^{\circ}_{k2}[\Delta^{\circ}_{p1}(\Delta^{\circ}_{k2} - \Delta^{\circ}_{p2}) - 3(\Delta^{\circ}_{p2})^2] +$$

$$+ (\Delta^{\circ}_{p2})^2\Delta^{\circ}_{k1}(\Delta^{\circ}_{k1} + 3\Delta^{\circ}_{k2})\} + \frac{m_1^2}{m_2^2}[(\Delta^{\circ}_{p1})^2\Delta^{\circ}_{k2} -$$

$$- \Delta^{\circ}_{p1}\Delta^{\circ}_{p2}(\Delta^{\circ}_{p1} + \Delta^{\circ}_{p2}) - \Delta^{\circ}_{k1}\Delta^{\circ}_{k2}(\Delta^{\circ}_{k1} + \Delta^{\circ}_{k2}) -$$

$$- \Delta^{\circ}_{p2}(\Delta^{\circ}_{k1})^2 - \Delta^{\circ}_{p2}\Delta^{\circ}_{k2}(3\Delta^{\circ}_{p2} + \Delta^{\circ}_{k1})] +$$

$$+ \frac{m_1^3}{m_0^2}[\Delta^{\circ}_{p2}\Delta^{\circ}_{k2} - (\Delta^{\circ}_{p2})^2 - (\Delta^{\circ}_{k2})^2] + \frac{m_1^4}{m_2^2}(\Delta^{\circ}_{p2} + \Delta^{\circ}_{k2}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt I.A., Blankenbecler R. Phys.Rev., 1977, D16, p. 1318; Blankenbecler R. Preprint SLAC-PUB-2512, Stanford, 1980; Frazer W.R., Gunion J.F. Phys.Rev.Lett., 1980, 45, p. 1138; Abbot L.F., Atwood W.B., Barnett R.M. Phys.Rev. 1980, D22, p. 582.
2. Linkevich A.D., Savrin V.I., Skachkov N.B. JINR, E2-82-130, Dubna, 1982;
   Линкевич А.Д. и др. ОИЯИ, Р2-82-263, Дубна, 1982.
3. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p. 380.

4. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. В кн.: Проблемы теоретической физики /сборник, посвященный 60-летию Н.Н.Боголюбова/, "Наука", М., 1969, с. 261; Логунов А.А. и др. ТМФ, 1971, 6, с. 157; Гарсеванишвили В.Р. и др. ТМФ, 1975, 23, с. 310.
5. Faustov R.N. Ann.Phys., 1973, 78, p. 176.
6. Khrustalev O.A., Savrin V.I., Tyurin N.Ye. JINR, E2-4479, Dubna, 1980;
Гарсеванишвили В.Р., Матвеев В.А., Слепченко Л.А. ЭЧАЯ, 1970, 1, с. 91; Матвеев М.Д., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ТМФ, 1972, 10, с. 3; Гарсеванишвили В.Р. и др. ТМФ, 1972, 11, с. 37; 1972, 12, с. 384; Голоскоков С.В. и др. ТМФ, 1975, 24, с. 147; Каримходжаев А., Фаустов Р.Н. ЯФ, 1979, 29, с. 463.
7. Savrin V.I., Skachkov N.B. Preprint CERN, TH 2822, Geneva, 1980; Lett.Nuovo Cim., 1980, 29, p. 363.
8. Linkevich A.D., Savrin V.I., Skachkov N.B. JINR, E2-82-832, Dubna, 1981.
9. Kapshay V.N. et al. JINR, E2-82-36, Dubna, 1982.
20. Tarasov O.V., Vladimirov A.Yu., JINR, E2-80-483, Dubna, 1980; Tarasov O.V., Vladimirov A.Yu. Phys.Lett., 1980, 93B, p. 429.
11. Georgi H.D., Polizer H.D. Phys.Rev., 1976, D14, p. 1829; Shirkov D.V. JINR, E2-81-80, Dubna, 1981.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. "Наука", М., 1981.
13. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1974, т.2.

Руко

Линкевич А.Д. и др. Р2-82-563

Релятивистские волновые функции нуклона как связанного состояния кварка и дикварка

Получены приближенные аналитические решения ковариантных трехмерных уравнений для волновой функции фермиона, составленного из двух частиц со спинами 0 и 1/2 или 1 и 1/2, с потенциалом одноглюонного обмена.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Linkevich A.D. et al. P2-82-563

Relativistic Wave Functions of Nucleon as a Quark-Diquark Bound State

Aproximate analytic solutions are obtained for the covariant three-dimensional equations for the wave function of the fermion, composed of two particles with spins 0 and 1/2 or 1 and 1/2, with the one-gluon exchange potential.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.