объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-82-560

В.Ш.Гогохия

ОБОБЩЕННОЕ ВКБ-РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

Направлено на Международную конференцию
"Кварки-82", Сухуми, май 1982 г.

1982

В рамках квазипотенциального подхода [1] в квантовой теории поля исследуется модель сильновзаимодействующих скалярных частиц одинаковой массы m /например, кварков без учета спинов/, когда взаимодействие между ними феноменологически описывается квазипотенциалом притяжения кулоновского вида $V(r) = -gr^{-1}$ $(g>m)$. Такого рода потенциалы /квазипотенциалы/ успешно применялись для описания межкварковых сил на малых расстояниях в кварк-антикварковых системах /кварконий/, они имеют свое обоснование в квантовой хромодинамике [2].

Квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы m имеет вид [3]:

$$f_\ell(p,p') = V_\ell(p,p') + \int_0^\infty \frac{dq}{(q^2+m^2)^{1/2}} \frac{V_\ell(p,q) f_\ell(q,p')}{k^2 - q^2} \quad , \qquad /1/$$

$$V_\ell(p,p') = \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr\, V(r) J_{\ell+1/2}(rp) J_{\ell+1/2}(rp'), \qquad /2/$$

где p, p' - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс; энергетическая поверхность определяется условием $p^2 = p'^2 = k^2$, а энергия в системе центра масс равна $W = 2\sqrt{k^2+m^2}$. Если теперь квазипотенциал в координатном представлении имеет кулоновский вид $V(r) = -gr^{-1}$, то $V_\ell(p,p')$ в этом случае выражается через θ -функции [4] и уравнение /1/ двукратным дифференцированием сводится к следующей задаче Штурма-Лиувилля в импульсном пространстве [4]:

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} - \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - \frac{\lambda^2}{(1+x^2)^{1/2}(x^2-E^2)} \right\} f_\ell(x) = m^2 \lambda^2 \delta(x-x'), \qquad /3/$$

$$f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1} \quad , \qquad f_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell} , \qquad /4/$$

здесь $x = pm^{-1}$ есть безразмерная импульсная переменная; $\lambda^2 = gm^{-1}$ и $E = km^{-1}$ - безразмерные константы связи и энергетический параметр соответственно /безразмерный импульс на массовой поверхности $x = x' = E$).

Перепишем однородное уравнение, соответствующее уравнению /1/, в следующем виде /рис.1/:

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \left\{ -\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \lambda^2 \gamma(x) \right\} f_\ell(x) = 0, \qquad /5/$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}(x^2-E^2)} .$$

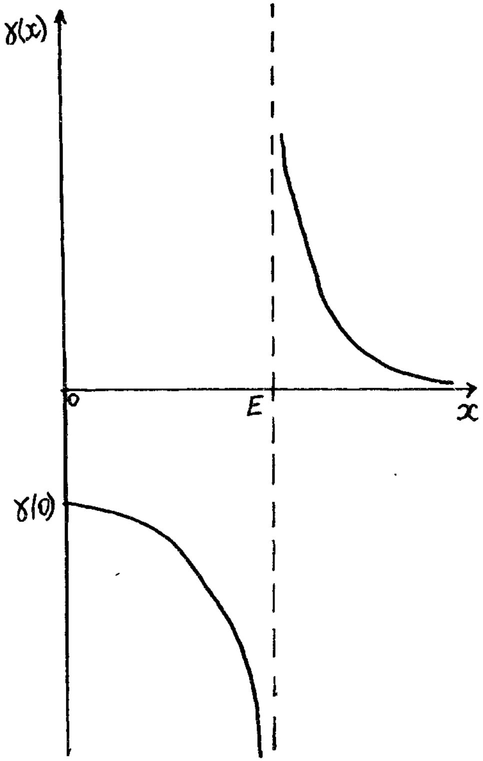

Рис.1

Решения уравнения /5/ найдем с помощью обобщенного ВКБ-метода /метод эталонного уравнения/, сформулированного в работах[4,5]. Основная идея обобщенного ВКБ-метода довольно проста: приблизительно одинаковые дифференциальные уравнения имеют приблизительно одинаковые решения. Поэтому для того, чтобы правильно выписать эталонное уравнение по отношению к уравнению /5/, необходимо выяснить асимптотические и аналитические свойства функции $\gamma(x)$, стоящей при λ^2 в уравнении /5/. Уравнение /5/ с функцией $\gamma(x)$, изображенной на графике, обладает двумя точками поворота на бесконечности и на массовой поверхности $x = E$, а также регулярной особенностью в точке $x = 0$ и $E^2 = 0$ /полюса и нули $\gamma(x)$ называются "точками поворота"/. Отметим также, что эти точки поворота являются одновременно и регулярными особенностями исходного уравнения /5/. Учитывая все это, в качестве эталонного уравнения можно выбрать уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2 \mathcal{C}(\sigma)}{d\sigma^2} + \left\{-\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2} + \lambda^2\Gamma(\sigma)\right\}\mathcal{C}(\sigma) = 0, \qquad /6/$$

$$\Gamma(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2(\sigma-\epsilon)} . \qquad /7/$$

Очевидно, что эталонная функция $\Gamma(\sigma)$ как функция от σ в пределе $\sigma \to \infty$ правильно воспроизводит асимптотические свойства $\gamma(x)$ при $x \to \infty$. Из дальнейшего изложения будет видно, что зависимость $\Gamma(\sigma(x))$ от x в нуле и на бесконечности такая же, как и $\gamma(x)$ от x, причем кулоновская особенность в точке $x = E$

в $\Gamma(\sigma(x))$ воспроизводится условием $\sigma(x,E) = \epsilon(E)$ при $x = E$. Таким образом, это требование эквивалентно условию совпадения точек перехода исходного уравнения и соответствующего ему эталонного в точке $x = E$. Совпадение же точек перехода на бесконечности достигается при одинаковом поведении $\Gamma(\sigma(x))$ и $\gamma(x)$ при $x \to \infty$ /см. формулу /13//. Здесь же необходимо отметить, что эталонное уравнение /6/ не обладает регулярной особенностью в точке $x = 0$ при $E^2 = 0$, как это имеет место в исходном уравнении /5/. Поэтому решение, полученное методом эталонного уравнения, должно быть модифицировано в пределе $E^2 \to 0$.

Решение уравнения /5/ ищем в виде

$$f(x) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2}\mathcal{C}(\sigma(x)). \qquad /8/$$

Подставляя /8/ в /5/ и используя /6/, получим уравнение для $\sigma(x)$, которое с точностью до членов порядка λ^{-2} имеет вид[4,5]

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2\Gamma(\sigma(x)) = \gamma(x). \qquad /9/$$

В этом приближении решение /8/ можно представить в форме[4,5]

$$f(x) = \{\Gamma(\sigma(x))/\gamma(x)\}^{1/4}\mathcal{C}(\sigma(x)). \qquad /10/$$

Выбирая далее в качестве эквивалентных точек уравнений /5/ и /6/ точки на бесконечности, то есть $\sigma = \sigma(x)\big|_{x=\infty}$, и интегрируя /9/, получим окончательно

$$\frac{\sigma(x,E)}{\epsilon(E)} = \sin^{-2}\left\{\frac{\sqrt{\epsilon(E)}}{2}\Phi(x,E)\right\}, \qquad /11/$$

где

$$\Phi(x,E) = \int_x^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}(t^2-E^2)^{1/2}} . \qquad /12/$$

Из формул /11/ и /12/ следует, что

$$\sigma(x,E) \underset{x\to\infty}{\sim} x + \text{к.ч.}, \quad \sigma(0,E) = \text{const} \qquad /13/$$

в соответствии со сказанным выше. Поэтому асимптотические свойства $\Gamma(\sigma(x))$ и $\gamma(x)$ на концах интервала изменения независимой переменной $x \in [0,\infty)$ совпадают.

Значение $\epsilon(E)$ получаем из условия $\sigma(E,E) = \epsilon(E)$. Используя /11/ в точке $x = E$, получим

$$\epsilon(E) = \pi^2\Phi^{-2}(E,E), \qquad /14/$$

где

$$\Phi(E,E) = \int_E^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}(t^2-E^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)(E^2)^{-1/4}F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4};\frac{3}{4};-E^{-2}\right). \qquad /15$$

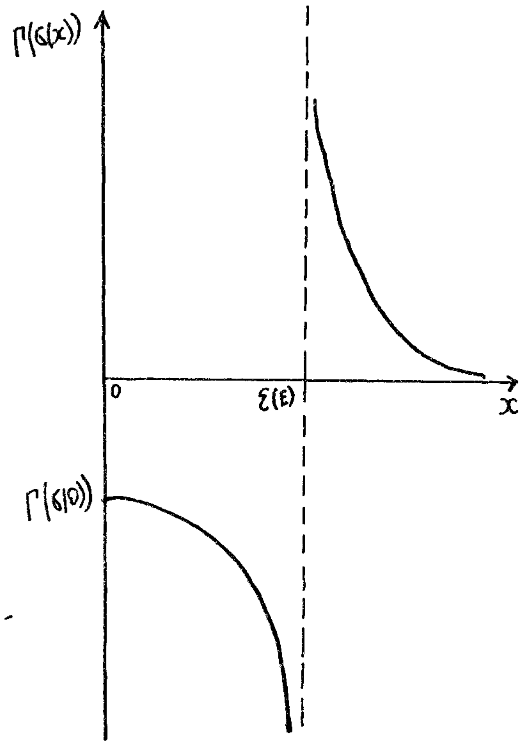

Рис.2

Таким образом, $\Gamma(\sigma(x))$ полностью воспроизводит асимптотические и аналитические свойства исходной функции $\gamma(x)$ и изображается графиком /рис.2/, аналогичным графику $\gamma(x)$. Здесь же следует отметить, что стандартный ВКБ-метод воспроизводит лишь знаковое поведение исходной функции $\gamma(x)$ слева и справа от точки поворота на массовой поверхности $x = E$. Обобщенный же ВКБ-метод дает приближения, справедливые как в самой точке поворота, так и на концах интервалов изменения независимой переменной x. Два линейно независимых решения эталонного уравнения /6/ можно выразить через геометрические функции. Учитывая далее /10/, получим окончательно два линейно независимых решения исходного уравнения /5/ в виде

$$f_1(x) = \left\{ \frac{\sigma^2(x)(\sigma(x) - \epsilon(E))}{(1+x^2)^{1/2}(x^2 - E^2)} \right\}^{-1/4} \left[-\frac{\sigma(x)}{\epsilon(E)} \right]^{a} F\left(\ell + a,\ \ell - (1-a); 2a; \frac{\sigma(x)}{\epsilon(E)}\right),$$

/16/

$$f_2(x) = \left\{ \frac{\sigma^2(x)(\sigma(x) - \epsilon(E))}{(1+x^2)^{1/2}(x^2 - E^2)} \right\}^{-1/4} \left[-\frac{\sigma(x)}{\epsilon(E)} \right]^{1-a} F\left(\ell + (1-a),\ \ell - a; 2(1-a); \frac{\sigma(x)}{\epsilon(E)}\right),$$

где $\sigma(x) \equiv \sigma(x, E)$,

$$a = \frac{1}{2} + \sqrt{(\ell + 1/2)^2 + \lambda^2_{\text{эфф.}}},$$

/17/

$$\lambda^2_{\text{эфф.}} = \lambda^2 \epsilon^{-1}(E).$$

Для упрощения дальнейших выкладок оба решения /16/ домножены на постоянные $/-1/^{a}$ и $/-1/^{1-a}$ соответственно. Очевидно также, что второе решение может быть получено из первого путем замены $a \to (1-a)$.

Как известно, решение неоднородного уравнения /3/ можно выразить через решения соответствующего однородного уравнения /16/:

$$f(x,x') = A_1(x') f_1(x) + A_2(x') f_2(x) + \frac{m^2\lambda^2}{\omega} \{ \theta(x-x') f_1(x) f_2(x') - \theta(x-x') f_2(x) f_1(x') \}. \qquad /18/$$

В этом решении первые два члена описывают решение однородного уравнения, а второй член есть частное решение неоднородного уравнения. Вронскиан двух линейно независимых решений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в /18/ обозначен через ω.

Для определения коэффициентных функций $A_1(x')$ и $A_2(x')$ необходимо использовать граничные условия /4/ в нуле и на бесконечности, а также выполнить аналитическое продолжение гипергеометрических рядов, входящих в $f_1(x)$ и $f_2(x)$, на бесконечность, так как $\sigma(x,E) \underset{x\to\infty}{\simeq} x$ + к.ч. /см. /13//.

Таким образом, общее решение $f(x,x')$ /18/, удовлетворяющее всем граничным условиям, имеет вид

$$f(x,x') = \frac{\lambda^2 m^2/\omega}{K_2(1-a) - K_2(a) D(0)} [K_2(1-a) f_1(x') - K_2(a) f_2(x')][f_2(x) - f_1(x) D(0)] + \frac{m^2\lambda^2}{\omega} \theta(x-x') [f_1(x) f_2(x') - f_1(x') f_2(x)], \qquad /19/$$

где

$$D(0) = f_2(0)/f_1(0),$$

$$K_2(a) = (-1)^{\ell+1} \Gamma(2\ell+1)\Gamma(2a)/\Gamma(a+\ell)\Gamma(\ell+1+a), \qquad /20/$$

а $K_2(1-a)$ получается из $K_2(a)$ в результате замены $a \to (1-a)$. На массовой поверхности $x = x' = E$ решение /19/ приобретает вид

$$f_\ell(E) = \left\{ \frac{(1+E^2)^{1/2}\, 2E}{\pi^2} \right\}^{1/2} m^2 \epsilon(E) \sin \pi a \times \left\{ \frac{(-1)^{1-a} K_2(1-a) - (-1)^a K_2(a) D(0)}{K_2(1-a) - K_2(a) D(0)} \right\}, \qquad /21/$$

$$D(0) = \frac{f_2(0)}{f_1(0)} = -\frac{\left[-\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}\right]^{1-\alpha} F\left(\ell+(1-\alpha), -\ell-\alpha; 2(1-\alpha); \frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}\right)}{\left[-\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}\right]^{\alpha} F\left(\ell+\alpha, -\ell-(1-\alpha); 2\alpha; \frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}\right)}, \qquad /22/$$

а $\epsilon(E)$, α и $K_2(\alpha)$, $K_2(1-\alpha)$ определяются формулами /14/, /17/ и /20/ соответственно. Выражение для $\sigma(0,E)/\epsilon(E)$ определяется формулами /11/-/12/ в точке $x=0$, в которых

$$\Phi(0,E) = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}(t^2-E^2)^{1/2}} = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1+E^2\right). \qquad /23/$$

Как уже отмечалось выше, решение /19/ должно быть модифицировано в пределе $x \to 0$ при $E^2=0$. Каким именно путем должно быть модифицировано данное решение, проще всего можно понять с помощью решений /16/ для однородного исходного уравнения /5/. Действительно, полагая в решениях /16/ $E=0$, найдем далее асимптотические разложения данных решений в пределе $x \to 0$. Сравнивая полученные таким образом асимптотические разложения решений /16/ с асимптотикой точных решений уравнения /5/, получим, что модификация заключается в том, чтобы вычеркнуть фактор $[-\epsilon(0)]$ из всех соотношений /17/, /21/ и /22/.

Таким образом, чтобы обеспечить правильное поведение ВКБ-решений /16/, а значит, и парциальной амплитуды /21/ в нерелятивистском пределе $E^2 \to 0$, в регулярной особой точке $x=0$ при $E^2=0$ исходного уравнения /5/ необходимо в выражении для парциальной амплитуды /21/ в пределе $E^2 \to 0$ опустить зависимость от $[-\epsilon(0)]$.

С другой стороны, в нерелятивистском пределе $E^2 \to 0$/большие расстояния/ само квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд /1/ переходит в уравнение Липмана-Швингера для потенциала $U(r) = -\lambda^2 r^{-2}$ /6,7/. Сравнение /21/ в пределе $E^2 \to 0$ с амплитудой Липмана-Швингера также указывает на необходимость вышеописанной модификации.

В заключение данного раздела рассмотрим более подробно асимптотические свойства эффективной константы взаимодействия $\lambda^2_{эфф.}$, определяемой соотношением /17/:

$$\lambda^2_{эфф.} = \lambda^2 \epsilon^{-1}(E) = \lambda^2 \pi^{-2} \Phi^2(E,E) =$$
$$= \lambda^2 \pi^{-2} \left\{ \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) (E^2)^{-1/4} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; -E^{-2}\right) \right\}^2 \qquad /24/$$

На больших расстояниях, которые соответствуют нерелятивистскому пределу $E^2 \to 0$, с учетом указанной модификации эффективная константа взаимодействия $\lambda^2_{эфф.}$ стремится к $-\lambda^2$, то есть к константе взаимодействия из уравнения Липмана-Швингера, которое играет роль классического аналога для квазипотенциального уравнения.

Таким образом, это поведение эффективной константы связи $\lambda^2_{эфф.}$ эквивалентно ее перенормировке на больших расстояниях.

В ультрарелятивистском пределе $E \to \infty$/малые расстояния/ эффективная константа взаимодействия $\lambda^2_{эфф.}$ стремится к нулю. Действительно, ограничиваясь в формуле /24/ членами порядка E^{-1}, получим

$$\lambda^2_{эфф.} \underset{E \to \infty}{\sim} \frac{B^2(1/4, 1/2)}{(2\pi)^2} \frac{\lambda^2}{E} + \ldots . \qquad /25/$$

Из формулы /25/ следует, что на малых расстояниях эффективная константа связи $\lambda^2_{эфф.}$ ослабевает и наступает явление "асимптотической свободы", характерное для некоторых квантовополевых моделей, основанных на неабелевых калибровочных полях /8/. В этом случае парциальную амплитуду рассеяния $f_\ell(E)$ можно представить в виде формального ряда по степени константы взаимодействия $\lambda^2_{эфф.}$.

Завершая наше рассмотрение квазипотенциального уравнения, отметим, что полюса амплитуды /21/ в верхней полуплоскости комплексных значений $E\,(\mathrm{Im}E > 0)$ на мнимой полуоси соответствуют связанным состояниям. Замена $E^2 \to -E^2$ влечет за собой замену $\epsilon(E) \to -\epsilon(E)$ и $\alpha \to \alpha = 1/2 + i\sqrt{\lambda^2_{эфф.} - (\ell+1/2)^2}$. Тогда спектральное условие принимает вид

$$K_2(\alpha^*)\left[\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}\right]^{\alpha} F\left(\ell+\alpha, -\ell-\alpha^*; 2\alpha; -\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}\right) =$$
$$= K_2(\alpha)\left[\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}\right]^{\alpha^*} F\left(\ell+\alpha^*; -\ell-\alpha; 2\alpha^*; -\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}\right), \qquad /26/$$

где $\sigma(0,E)/\epsilon(E)$ определяется формулами /11/ и /12/ в точке $x=0$ с учетом вышеуказанных замен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, No. 2, p. 380-399.
2. Eichten E. et al. Phys.Rev.Lett., 1975, 34, p. 369.
3. Гогохия В.Ш. ТМФ, 1974, 21, с. 37.
4. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ТМФ, 1976, 27, с. 323-336.
5. Гогохия В.Ш. ТМФ, 1981, 48, с. 80-88.
6. Case K.M. Phys.Rev., 1950, 80, No.5, p. 797-806.
7. Гогохия В.Ш. Сообщения АН Гр.ССР, 1978, 90, №2, с.333-336.
8. Politzer H.D. Phys.Rev.Ser. C, 1974, 14, p. 129.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июля 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Гогохия В.Ш. Р2-82-560

Обобщенное ВКБ-решение квазипотенциальной задачи рассеяния скалярных частиц

Рассмотрена квазипотенциальная кулоновская задача рассеяния скалярных частиц одинаковых масс. В этом случае интегральное квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд сводится к задаче Штурма–Лиувилля с двумя точками поворота. Для вычисления парциальных амплитуд применяется обобщенный ВКБ-метод. Обсуждаются также асимптотические свойства эффективной константы связи.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Gogokhia V.Sh. P2-82-560

Generalized W.K.B.-Solution of Quasipotential Scattering Problem for Scalar Particles

Quasipotential Coulomb scattering problem of scalar particles of equal masses is considered. In this case integral quasipotential equation for amplitudes is reduced to the Sturm-Liouville problem with two transition points. Generalized W.K.B. method is applied for calculating partial amplitudes,asymptotic properties of effective coupling constant are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.