5081 82

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

25/10-82

Р2-82-528

П.П.Физиев

АППРОКСИМАЦИИ ФАЗОВЫХ ПУТЕЙ В ИНТЕГРАЛЕ ФЕЙНМАНА

Направлено в "Болгарский физический журнал"

1982

1. В работе проводится анализ метода конечномерных аппроксимаций /КА/ фейнмановских интегралов по путям /ИП/ на фазовом пространстве M^{2n}_{pq} системы с $n<\infty$ степенями свободы и с гамильтонианом $\mathcal{H}(p,q,t)$ общего вида. Действие системы равно

$$\Delta A = \int_{t'}^{t''} p\,dq - \int_{t'}^{t''} \mathcal{H}\,dt. \qquad /1/$$

Мы будем пользоваться результатами и обозначениями [1]. Наша цель - выяснить допустимые КА путей $(p(t),\ q(t)) \in M^{2n}_{pq}$ при вычислении многоточечных функций Грина

$$G^{m,\ell} = \langle q''|\, T[\,\hat{q}(t'_1)\ldots\hat{q}(t'_m)\,\hat{p}(t''_1)\ldots\hat{p}(t''_\ell)\,\exp(-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\hat{\mathcal{H}}\,dt)]\,|\,q'\rangle \qquad /2/$$

при помощи интеграла по путям

$$G^{m,\ell} = \int \mathfrak{D}(p,q)\, q(t'_1)\ldots q(t'_m)\, p(t''_1)\ldots p(t''_\ell)\, e^{\frac{i}{\hbar}\Delta A}\,\delta(q(t'')-q'')\,\delta(q(t')-q'), \qquad /3/$$

предложенного Фейнманом [2] для случая $m=\ell=0$ и "переоткрытого" несколько раз [3–6].

Наш основной результат состоит в том, что в /3/ следует суммировать не по всем путям в M^{2n}_{pq}, как это обычно утверждается, а только по определенному классу таких путей. Сравнение с теорией вероятностей наводит на мысль, что амплитуда перехода $G = G^{0,0}$ имеет характер условной /а не абсолютной/ вероятности, а $G^{m,\ell}$ - условных средних.

2. Метод КА для вычисления ИП включает следующие шаги [3–11].

А. Задание измельчающейся последовательности разбиений $\{\sigma_N\}$ интервала $[t',t'']$ точками t_i / $i=1,\ldots,N$; $N=1,\ldots,\infty$ /:

$$\sigma_N:\ t'=t_0<t_1<\ldots<t_N=t'';\quad \max_{i=1\ldots N}\Delta t_i \underset{N\to\infty}{\to} 0,\quad \sum_{i=1}^{N}\Delta t_i = t''-t'. \qquad /4/$$

Предел $N\to\infty$ с соблюдением этих условий обозначим как $\sigma\text{-}\lim\limits_{N\to\infty}$.

Б. Выбор КА $(p_N(t),\ q_N(t))$ пути $(p(t), q(t)) \in M^{2n}_{pq}$ определим, задавая, как обычно, куски $p^i(t)$, $q^i(t)$ на $[t_{i-1}, t_i]$. Чаще всего КА производят полигональными путями:

$$p^i(t) = p_i = \text{const},\quad q^i(t) = q_i\,\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} + q_{i-1}\,\frac{t_i-t}{t_i-t_{i-1}}.$$

При канонических преобразованиях вид этих функций не сохраняется и они переходят в функции от $p(t), q(t), t; p_{i-1}, q_{i-1}, t_{i-1}; p_i, q_i, t_i$.

Пусть x^i, y^i являются функциями $3(2n+1)$ переменных:

$$x^i = x(p,q,t;\, p_{i-1}, q_{i-1}, t_{i-1};\, p_i, q_i, t_i), \qquad /a/ \qquad /5/$$

$$y^i = y(p,q,t;\, p_{i-1}, q_{i-1}, t_{i-1};\, q_i, t_i). \qquad /б/$$

Подставляя в /5/ $p=p(t)$, $q=q(t)$, получим $x^i(t)$, $y^i(t)$. Положим

$$p^i(t) = p(t) + y^i(t),\qquad q^i(t) = q(t) + x^i(t). \qquad /6/$$

При таком /слегка отличном от принятого в [1] / определении функции $p_N(t)$, $q_N(t)$ принимают по два, вообще говоря, разных значения в точках t_i:

$$p^i(t_i) = p_i^- \neq p^{i+1}(t_i) = p_i^+ \neq p(t_i) = p_i,$$
$$q^i(t_i) = q_i^- \neq q^{i+1}(t_i) = q_i^+ \neq q(t_i) = q_i. \qquad /7/$$

Подставляя $q_N(t), p_N(t)$ в /1/, получим КА действия:

$$\Delta A_N = \sum_{i=1}^{N}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[\,p^i dq^i - \mathcal{H}(p^i,q^i,t)\,dt] = \sum_{i=1}^{N} a(p^+_{i-1}, q^+_{i-1}, t_{i-1};\, p^-_i, q^-_i, t_i). \qquad /8/$$

В. Вычисление

$$G_N = \sum_{\substack{\text{по всем } N\text{-мерным}\\ \text{КА путей из } q' \text{ в } q''}} e^{\frac{i}{\hbar}\Delta A_N}, \qquad /9/$$

причем суммирование выполняют, интегрируя по всем свободным параметрам КА $(p_N(t),\ q_N(t))$.

Г. Устремление $N\to\infty$. Полагают согласно [2,7], что

$$G = \sum_{\substack{\text{по всем путям}\\ \text{из } q' \text{ в } q''}} e^{\frac{i}{\hbar}\Delta A} = \lim_{N\to\infty} G_N. \qquad /10/$$

Аналогичным образом вычисляют $G^{m,\ell}$ при $m>0$, $\ell>0$.

Результат зависит от выбора КА, что соответствует неоднозначности задачи квантования классической системы и неоднократно обсуждалось в литературе [11–13]. На наш взгляд, исследование этого вопроса далеко от законченности. В частности, не выяснен общий вид функций /6/, допустимых при выполнении описанной процедуры А-Г.

3. Представляется естественным требовать, чтобы функции /6/ аппроксимировали интеграл классического действия /1/, т.е. чтобы

$$\sigma - \lim_{N\to\infty}\Delta A_N = \Delta A. \qquad /11/$$

В [11] показано, что необходимые и достаточные условия для выполнения /11/ при произвольном выборе $\{\sigma_N\}$ для всех допустимых путей $(p(t),\ q(t)) \in M^{2n}_{pq}$ и для всех допустимых гамильтонианов $\mathcal{H}(p,q,t)$ в предположении, что интегралы в /1/ понимаются в смысле Лебега-Стильтьеса-Сакса, есть

i) $x^i(t)' \in AC_0$, $y^i(t) \in L^\infty$;

ii) Для всех $t \in [t', t'']$: $\lim\limits_{t_i \to t+0,\ t_{i-1} \to t-0} (x^i(t), y^i(t)) = (0,0)$;

iii) $x^i(t_{i-1}) = x^i(t_i) = 0$;

iv) $\lim\limits_{t_i \to t+0,\ t_{i-1} \to t-0} \left[\frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}^i(t)|\, dt \right] \overset{\text{п.в}}{=} M(t) \in L^1$,

где точка над $x^i(t)$ означает производную по t, а п.в. означает равенство почти всюду.

v) $\lim\limits_{t_i \to t+0,\ t_{i-1} \to t-0} \dot{x}^i(t) \overset{\text{п.в}}{=} 0$.

При этом необходимо, чтобы $q(t) \in AC_0$ /класс абсолютно непрерывных функций/, а $p(t) \in L^\infty$ /класс почти всюду ограниченных функций/. КА, удовлетворяющие i – v, будем называть классически допустимыми. В смысле определения из/1/ они эквивалентны одна другой, и для двух таких КА

$$\sigma - \lim_{N \to \infty} (\Delta A_N^{(1)} - \Delta A_N^{(2)}) = 0.$$

Предполагая, что функция а из /8/ достаточное число раз дифференцируема, мы можем написать

$$\Delta A_N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} a_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}(p^+_{i-1}, q^+_{i-1}, t_{i-1})\, \Delta p_i^{\lambda_1} \Delta q_i^{\lambda_2} \Delta t_i^{\lambda_3},$$

где

$$\Delta p_i = p_i^- - p^+_{i-1},\ \Delta q_i = q_i^- - q^+_{i-1},\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

и определить член порядка $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1$ в ΔA_N как

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda - 1} a_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \Delta p_i^{\lambda_1} \Delta q_i^{\lambda_2} \Delta t_i^{\lambda_3}.$$

Такая терминология связана с вычислением ΔA в случае кусочно-непрерывных $p(t)$, $q(t)$, когда $\Delta A_N^{(1)} - \Delta A_N^{(2)} = O(1/N)$,

$$\Delta p_i \overset{\text{п.в}}{=} O(\Delta t_i), \quad \Delta q_i \overset{\text{п.в}}{=} O(\Delta t_i)$$

и $\sigma - \lim\limits_{N \to \infty}$ можно назвать пределом Римана: $R - \lim\limits_{N \to \infty}$. При этом $p_i^\pm = p^i(t_i \pm 0)$, $q_i^\pm = q^i(t \pm 0)$. Однако для $p(t) \in L^\infty$ условия на Δp_i и такое определение $p_i^\pm$ теряют смысл, из-за чего приходится отличать $\sigma - \lim\limits_{N \to \infty}$ от $R - \lim\limits_{N \to \infty}$.

4. Число параметров $p_i^\pm, q_i^\pm$, по которым следует интегрировать в /9/, вдвое больше, чем обычно. Это приводит к бессмысленному

результату: $G_N \sim \infty^{2nN}$. Лишнюю половину параметров можно исключить, только накладывая условия, которые ограничивают класс учитываемых путей. Обычно это делается без особых комментариев /2–13/.

В действительности, из условия iii на $x^i(t)$ следует

$$q_i^+ = q_i^- = q_i, \qquad /12/$$

что иногда постулируют из физических соображений, ссылаясь на уравнение типа уравнения Смолуховского-Колмогорова-Чепмена в теории марковских процессов /$q_N(t) \in C_0$ обеспечивает "марковость" квантового процесса распространения/. Однако пользуются и КА, нарушающими /12/, – примеры и ссылки см. в /1,8/.

Аналогичная /12/ связь между $p_i^\pm$ и p_i противоречила бы принципу неопределенности /11/. Обычно накладывают не следующее ниоткуда условие

$$p^i(t) = p_i = \text{const} \quad \text{для} \quad t \in [t_{i-1}, t_i]. \qquad /13/$$

Тогда для $p_i^- = p^i(t_i - 0)$ и $p^+_{i-1} = p^i(t_{i-1} + 0)$ получаем

$$p_i^- = p^+_{i-1} = p_i. \qquad /14/$$

В результате $\Delta p_i = 0$, что сводит на нет вклад членов высших порядков по Δp_i в ΔA_N.

Можно было бы думать, что /13/ и /14/ являются следствием применения полигональной КА для $q(t)$, откуда $\dot{q}^i(t) = \Delta q_i / \Delta t_i = \text{const}$, и в случае $H = p^2/2m + V(q)$ имеем $p^i(t) = m\dot{q}^i(t) = \text{const}$. Однако в гамильтоновой механике $p = m\dot{q}$ есть уравнение движения и не накладывает никаких связей между p и $\dot{q}$ для виртуальных путей, учитываемых в /9/ и /10/.

Следовательно, /13/ есть новое, независимое условие, согласно которому в /9/ следует учитывать только пути, лежащие на n-параметрическом /параметры – p_i/ семействе $(n+1)$-мерных поверхностей Майера /14/, задающих слоение пространства состояний M^{2n+1}_{pqt}. На возможно глубокую роль таких поверхностей в квантовой механике указывалось еще в /15,16/.

В /9/ учитывается только один путь из q' в q'', лежащий на гиперплоскости Майера /13/.

В общем случае поверхности Майера получаются переносом в M^{2n+1}_{pqt} поверхностей Лагранжа $\Lambda^n_P(Q,t)$ /см. ссылки в /17–20/ / из гиперплоскости $M^{2n}_{pq}(t)$, задаваемой уравнением $t = \text{const}$. Поверхности Лагранжа играют существенную роль при построении квазиклассического приближения методом канонического оператора Маслова и при геометрическом квантовании /18–20/. Их перенос осуществляется фазовым потоком некоторого генератора $\Gamma(p,q,t)$.

Поверхности Майера имеют также такое свойство, что действие, соответствующее $\Gamma(p,q,t)$ согласно /1/, превращается на этих поверхностях в локально-однозначную функцию места /14/ и свойство тождественного аннулирования на них соответствующих 1-форм Дирака /17/. Эти поверхности можно задать локально как поверхности уровня $M^{n+1}_{Pt}(Q)$:

$$Q(p, q, t) = C = \mathrm{const}, \qquad /15/$$

n непрерывно дифференцируемых по p и q функций $Q(p,q,t)$, находящихся в инволюции, т.е. с попарно нулевыми скобками Пуассона:

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 0,$$

где в виде исключения выписаны индексы степеней свободы $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$.

В силу определения Γ, Q задают полный набор первых интегралов в инволюции для системы с этим гамильтонианом.

Для разрешимости /15/ относительно p необходимо, чтобы

$$\det \| \partial_p Q \| \neq 0. \qquad /16/$$

Тогда /15/ есть обобщение связей /13/. Необходимость в таких связях обусловлена существованием бесконечного числа траекторий с одинаковыми ΔA, соединяющих любые точки $m_1 = (p_1, q_1, t_1)$, $m_2 = (p_2, q_2, t_2) \in M^{2n+1}_{pqt}$. Действительно, $m_{1,2}$ можно перенести в точки $m^\circ_{1,2}$ гиперплоскости $M^{2n}_{pq}(t_0)$, описываемой уравнением $t = t_0$ при помощи фазового потока генератора $\mathcal{H}(p,q,t)$. Образы $m^\circ_{1,2}$ всегда можно соединить поверхностью Лагранжа $\Lambda^n_p(Q, t_0)$ в $M^{2n}_{pq}(t_0)$, которая, будучи перенесенной в M^{2n+1}_{pqt} тем же потоком, опишет поверхность Майера $M^{n+1}_{P_t}(Q)$. Все траектории из m_1 в m_2, лежащие на $M^{n+1}_{P_t}(Q)$, имеют одинаковые ΔA [14].

Тогда мы сталкиваемся с ситуацией, подобной случаю ИП в M^n_q для теории с сингулярным лагранжианом [9,21]. В нашем случае необходимо накладывать $2n$ связей, половину которых задают /15/. Остальные n /следствием которых должны являться /12// необязательно выписывать, поскольку ΔA не зависит от их явного вида, если выполняется условие согласования

$$\mathcal{H}(p,q,t) = \Gamma(p,q,t). \qquad /17/$$

В этом случае легко выполнить требования i–v на $x^i(t)$, выбирая, например, удовлетворяющую их полигональную КА для $q(t)$ [1].

Необходимое и достаточное условие локальной независимости ΔA от выбора пути на $M^{n+1}_{P_t}(Q)$ для более общих $\mathcal{H} \neq \Gamma$ сводится к требованию, чтобы фазовый поток $\mathcal{H}$ не выводил точки с поверхности /15/. Такие $\mathcal{H}$ удовлетворяют обобщению /17/:

$$\mathcal{H} = \Gamma + h(Q, t), \qquad /18/$$

где h – произвольная функция $n+1$ переменных Q, t.

Очевидно, Q являются первыми интегралами и для системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$.

Связь между $\mathcal{H}$ и Γ, допускающими соотношение /18/ хотя бы для одного слоения M^{2n+1}_{pqt}, состоящего из поверхностей /15/, описывается следующим утверждением.

Чтобы системы с гамильтонианами $\mathcal{H}$ и Γ имели хотя бы один общий полный набор первых интегралов в инволюции, необходимо и достаточно удовлетворить условию

$$[\partial_t \mathcal{H} - \partial_t \Gamma + [\mathcal{H}, \Gamma], \mathcal{H} - \Gamma] = 0. \qquad /19/$$

Доказательство основано на рассмотрении условий совместимости возникающих систем дифференциальных уравнений в частных производных. Если нужный набор Q существует, то $[Q_\alpha, Q_\beta] = 0$ и $\partial_t Q_\alpha + [Q_\alpha, \Gamma] = 0$, $\partial_t Q_\alpha + [Q_\alpha, \mathcal{H}] = 0$. Условие совместимости последних двух систем уравнений есть $[Q_\alpha, \partial_t \mathcal{H} - \partial_t \Gamma + [\mathcal{H}, \Gamma]] = 0$. Из них также видно, что $[Q_\alpha, \mathcal{H} - \Gamma] = 0$. Тогда из полноты набора Q следует /19/. Наоборот, из /19/ следует существование полного набора величин Q_α в инволюции, имеющих нулевые скобки Пуассона с каждым из двух выражений, стоящих в скобке /19/. Уравнения, задаваемые этими нулевыми скобками, оказываются совместимыми с условием постоянства Q_α на траекториях систем с гамильтонианами $\mathcal{H}$ и Γ, если выполнено /19/.

Если в /18/ h не зависит от некоторого Q_α, соответствующий этой величине сопряженный первый интеграл P_α также будет общим для систем с $\mathcal{H}$ и Γ.

Нелинейное частное дифференциальное уравнение /19/ на $\mathcal{H}$ может иметь решения разных типов. Например, в автономном случае $\partial_t \Gamma = \partial_t \mathcal{H} = 0$ при $n = 1$ оно имеет общее решение $\mathcal{H} = \Gamma + h[L + f(\Gamma)]$, где $h(z)$ и $f(\Gamma)$ – произвольные функции, а L – сопряженная Γ величина: $[L, \Gamma] = 1$. Кроме того, имеется особое решение $\mathcal{H} = a L + f(\Gamma)$, где a – произвольная константа. В этих решениях содержатся кратные.

Наше локальное рассмотрение ΔA для путей на $M^{n+1}_{P_t}(Q)$ может усложняться наличием топологических особенностей M^{2n+1}_{pqt}, однако конечные выводы не меняются, если эти особенности удовлетворяют сформулированным в [1] требованиям.

Рассмотренная качественная картина показывает, что ограничения /15/ на пути в M^{2n}_{pq} следует учитывать и при КА фейнмановских интегралов, отличных от /6/, например задаваемых разложением в ряды по полным системам функций [7,22,23].

5. Условие /16/ аналогично требованию трансверсальности из [9,21] и позволяет разрешить /15/ в виде $p = p_Q(q, t; C)$, откуда

$$p^i(t) = p_Q[q^i(t), t; C^i]. \qquad /20/$$

Независимые между собой константы C^i / $i = 1, \ldots, N$ / можно рассматривать как параметры КА вместо $p^\pm_i$ или как функции p^+_{i-1}, p^-_i, $q_{i,i-1}$, $t_{i,i-1}$, не зависящие от $p(t)$, $q(t)$, t.

Из условия i на $y^i(t)$ следует $p_Q[q(t), t; C] \in L^\infty$ при любой $q(t) \subset AC_0$, что накладывает некоторые ограничения на p_Q /отсутствие полюсов по q и t и т.д./, а отсюда и на $Q(p,q,t)$.

Условие ii на $y^i(t)$ требует

$$\lim_{t_i \to t+0,\ t_{i-1} \to t-0} C = Q[p(t), q(t), t]. \qquad /21/$$

Из /15/ $C^i = Q(p_{i-1}^{\pm}, q_{i-1}, t_{i-1}) = Q(p_i^{-}, q_i, t_i)$. Тогда /20/ приводит к условию

$$Q[p(t-0), q(t-0), t-0] = Q[p(t+0), q(t+0), t+0] = Q[p(t), q(t), t],$$

которое должно выполняться для всех $q(t) \in AC_0$, $p(t) \in L^\infty$. Однако это невозможно даже для непрерывных $Q(p,q,t)$, если $p(t)$ разрывна. Единственный выход из этого затруднения - считать C^i независимыми параметрами, удовлетворяющими /21/, которые нельзя выразить через $p_{i,i-1}$, $q_{i,i-1}$, $t_{i,i-1}$. Тогда приходится отказаться от аппроксимаций $p(t)$ функциями $p_N(t)$, задаваемыми при помощи /5б/, и вместо них следует принять /20/ с условием /21/. В таком случае $p_N(t)$ будет кусочно-непрерывной функцией, стремящейся поточечно к $p(t) \in L^\infty$ при $N \to \infty$. Аналогичная проблема обсуждалась в[1] для более простого случая связи /13/.

Таким образом, мы приходим к разным способам аппроксимации для $q(t)$ и для $p(t)$, теряя каноническую инвариантность уже на этом уровне.

6. При вычислении /9/ на q_i и $p_i^{\pm}$ нужно смотреть как на независимые от t_i переменные, по которым интегрируют с учетом связи /15/. Эта новая роль $q_i, p_i^{\pm}$ приводит к новому пределу, который будем называть пределом Фейнмана: $F - \lim\limits_{N\to\infty}$. При этой предельной процедуре соблюдаются условия /4/, однако q_i и $p_i^{\pm}$ не меняются, так как уже не зависят от t_i. В результате для $F - \lim\limits_{N\to\infty}$ не выполняются /21/ и C^i становятся независимыми от t_i параметрами, через которые выражаются $p_i^{\pm}$. Нарушаются также условия i–v на x^i и y^i и условия предела Римана.

Если не выполнено /18/, в /9/ и /10/ появятся лишние переменные $p_i = p(t_i)$, которые не связаны с $p_i^{\pm}$ и с C^i и не имеют определенного значения в пределе Фейнмана при $p(t) \in L^\infty$. Они появятся и при вычислении $G^{m,\ell}$, даже если /18/ соблюдается. Во избежание этого следует предположить, что функции x^i из /5а/ не зависят от $p_{i,i-1}$.

Чтобы при вычислении аналогичного /9/ выражения для $G^{m,\ell}$ не ограничиваться специальными разбиениями $\{\sigma_N\}^{m,\ell}$ /из множества меры ноль/, для которых точки $t'_1, \dots, t'_m, t''_1, \dots, t''_\ell$ входят в состав /4/[10], и при этом избежать появления не связанных с q_i переменных $q(t'_a)$, нужно потребовать независимости $q^i(t)$ из /6/ от $q(t)$. Тогда для x^i, которое не должно зависеть от $p(t)$ по другим соображениям[1], получаем $x^i = x(t; q_{i-1}, t_{i-1}; q_i, t_i) - q$, а функции $q^i(t)$ приобретают окончательный вид:

$$q^i(t) = q_i\,(t - t_{i-1})/\Delta t_i + q_{i-1}(t_i - t)/\Delta t_i + \kappa^i(t), \qquad /22/$$

где

$$\kappa^i(t) = \kappa[(t - t_{i-1})/\Delta t_i; q_{i-1}, t_{i-1}; \Delta q_i, \Delta t_i] \qquad /23/$$

удовлетворяют условиям:

i′) $\kappa^i(t) \in AC_0$;

ii′) $\kappa(\rho; q, t; 0, +0) = 0$ для всех $(q,t) \in M_{qt}^{n+1}$ и $\rho \in [0,1]$;

iii′) $\kappa(0; q, t; \Delta q; \Delta t) = \kappa(1; q, t; \Delta q, \Delta t) = 0$ для всех $(q,t) \in M_{qt}^{n+1}$, Δq и всех $\Delta t > 0$;

iv′) $\lim\limits_{\Delta t \to +0} \left[\dfrac{1}{\Delta t}\int_0^1 |\partial_\rho \kappa'(\rho; q, t; \dot q\,\Delta t, \Delta t)|\, d\rho\right] \overset{\text{п.в.}}{=\!=} M(t) \in L$

при всех q, t, $\dot q$; здесь $\partial_\rho \kappa' = \partial\kappa/\partial\rho$;

v′) $\partial_\rho \kappa(\rho; q, t; \dot q\Delta t, \Delta t) = o(\Delta t)$ при всех $q, t, \dot q$; $\rho \in [0,1]$.

Условия i′–v′ следуют из i–v. При их выводе для простоты предполагалось, что κ есть непрерывная функция переменных ρ, q, t, Δq /но не Δt/.

7. С учетом /12/ и /15/ можно получить общий вид σ-предела членов высших порядков в ΔA_N. Если $p_Q(q, t; C)$ - достаточное число раз дифференцируемая функция q и t, то

$$\Delta p_i = p_Q(q_{i-1} + \Delta q_i, t_{i-1} + \Delta t_i; C^i) - p_Q(q_{i-1}, q_{i-1}; C^i) = \sum_{m_1 m_2} B_{m_1 m_2} \Delta q_i^{m_1} \Delta t_i^{m_2},$$

в результате чего член порядка $\lambda = \mu + \nu - 1$ принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_{\mu\nu}(q_{i-1}, t_{i-1}; C^i)\, \Delta q_i^{\mu}\, \Delta t_i^{\nu}.$$

Таким образом, /15/ позволяет избежать вычисления $\sigma - \lim\limits_{N\to\infty}(\Delta p_i/\Delta t_i)$, который для $p(t) \in L^\infty$, вообще говоря, не существует. Для $q(t) \in AC_0$ почти всюду на $[t', t'']$ существует $\sigma - \lim\limits_{N\to\infty}(\Delta q_i/\Delta t_i) = \dot q(t) \in L^1$, с учетом /21/ получим

$$\sigma - \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \gamma_{\mu\nu} \Delta q_i^{\mu} \Delta t_i^{\nu} = [\delta(0)]^{1-\mu-\nu} \int_{t'}^{t''} g_{\mu\nu}[p(t), q(t), t]\, \dot q^{\mu}(t)\, dt,$$

что, конечно, равно нулю /вследствие /11/ $\mu + \nu > 1$/. Ясно, что это формальный результат, который следует рассматривать на принятом в физической литературе уровне строгости.

В пределе Фейнмана условия i–v не выполняются вместе с /11/. Поэтому члены высших порядков могут давать конечный вклад в $G^{m,\ell}$. Этот вопрос нуждается в дальнейшем анализе.

Выражения /20/ и /22/, /23/ задают окончательный вид функций $p^i(t)$, $q^i(t)$, допустимых при КА фейнмановских интегралов /3/. В ходе установления этого вида мы выяснили принципиальный вопрос: в интегралах по путям /3/ следует суммировать только по определенному классу путей в M_{pq}^{2n}, а не по всем таким путям, как это обычно утверждается.

На учитываемые в ИП пути следует накладывать также ограничения, связанные с принципом причинности и с их асимптотиками, на которых мы не будем здесь останавливаться.

Правила и смысл вычисления ИП в случае поверхностей Майера /15/ общего вида следует изучить отдельно.

Автор глубоко признателен Б.М.Барбашову за постоянное внимание к работе , за многочисленные обсуждения и полезные советы. Автор благодарен также И.С.Златеву, Г.В.Ефимову, И.Т.Тодорову, А.Т.Филиппову, А.Д.Донкову, В.Н.Нестеренко, М.Д.Матееву и П.Екснеру за обсуждения на разных этапах подготовки работы. Особенно приятно поблагодарить В.Н.Попова, В.С.Буслаева и П.П.Кулиша за стимулирующие обсуждения и за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физиев П.П., ОИЯИ, Р2-81-742, Дубна, 1981.
2. Feinman R. Phys.Rev., 1951, 84, p. 108.
3. Tobocman W. Nuovo Cim., 1956, 3, p. 1213.
4. Martin J.L. Proc.Roy.Soc.Lond., 1959, A251, p. 543.
5. Davies H. Proc.Camb.Phyl.Soc., 1963, 59, p. 147.
6. Garrod C. Rev.Moth.Phys., 1966, 38, p. 483.
7. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. "Мир", М., 1968.
8. Popov V.N. Preprint CERN, TH2424, Geneva, 1977.
9. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, Атомиздат, М., 1976.
10. Abers E., Lee B.W. Phys.Rep., 1973, C9, p.1.
11. Березин Ф.А. ТМФ, 1971, 6, с. 194; УМН, 1980, 132, с. 497.
12. Leschke H., Schmutz M. Z.Phys., 1977, B27, p. 85.
13. Lescke H., Hirhfeld A.C., Suzuki T. Phis.Lett., 1978, 67A, p. 87; Phys.Rev., 1978, D18, p. 2834; Progr. Th. Phys., 1980, 63, p. 287.
14. Буслаев В.С. Вариационное исчисление,ЛГУ, Ленинград, 1980.
15. Dirac P.A.M. Can. J.Math., 1951, 3, p. 1.
16. Singe J.L. Phis.Rev., 1953, 89, p. 467; Geometrical mechanics and de Brogle waves, Cambrige, 1954.
17. Физиев П.П. ОИЯИ, Р5-81-52, Дубна, 1981.
18. Sims D.J., Woodhouse N.M.J. Lect.Noth.Phys., 53, Springer , N.Y., 1976.
19. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. "Мир", М., 1981.
20. Sniatycki J. Geometric Quantization and Quontum Mechanics, Springer, N.Y., 1980.
21. Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1969, 1, с. 1.
22. Efimov G.V. Comm.Math. Phys., 1977, 57, p. 235; 1979,65,p.15.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июля 1982 года.

Физиев П.П. Р2-82-528

Аппроксимации фазовых путей в интеграле Фейнмана

Проводится анализ метода конечномерных аппроксимаций фейнмановского интеграла по путям для конечномерных систем. Получен общий вид допустимых конечномерных аппроксимаций путей на фазовом пространстве системы. Показано, что в интеграле Фейнмана следует суммировать только по определенному классу путей на семействе поверхностей Майера и что обычное утверждение о суммировании по всем путям неправильно.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Fiziev P.P. P2-82-528

Approximation of the Phase-Paths in the Feynman Path Integral

The discretization of Feynman path integrals for finite dimensional systems has been analyzed and the admissible finite dimensional approximations for the paths in the phase-space found in a general form. It is shown that the widespread concept of the summation over all paths is wrong and should be replaced by the summation over a certain class of paths on a family of Mayer surfaces.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.