сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-82-513

П.П.Физиев

ПРИМЕР НЕКОММУТАТИВНОСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ПУТЯМ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ

1982

В работе[1] указывалось, что для получения ряда результатов при вычислении фейнмановских интегралов по путям /ИП/ методом конечномерных аппроксимаций /КА/ свободно меняют порядок пределов и, в частности, порядок функционального интегрирования и интегрирования по независимым переменным /для конечномерных систем по времени t /. Законность такой операции постулировалась в[2] для строгого вывода свойств ИП в рамках теории возмущений. Этот прием применяется разными авторами без соответствующего математического обоснования.

В этой заметке мы хотим обратить внимание на то, что перестановка $\int \mathfrak{D}(p,q)$ и $\int dt$ может существенно менять результат. Для иллюстрации этого утверждения вычислим методом КА простые ИП:

$$Z^{(k)} = \int \mathfrak{D}(p,q) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta A^{(k)}\right) \delta(q(t'') - q'') \, \delta(q(t') - q'), \qquad /1/$$

$$Y^{(k)} = \int \mathfrak{D}(p,q) \int_{t'}^{t''} \dots \int dt_1^k \dots dt_k^k \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta A^{(k)}\right) \delta(q(t'') - q'') \, \delta(q(t') - q'), \qquad /2/$$

где действие системы имеет вид

$$\Delta A^{(k)} = \int_{t'}^{t''} p \, dq - \int_{t'}^{t''} [\eta(t) p + \xi(t) q] \, dt - \sum_{\alpha=1}^{k} [\eta_\alpha^k p(t_\alpha^k) + \xi_\alpha^k q(t_\alpha^k)], \qquad /3/$$

$\eta(t), \xi(t) \in C_0$ и η_α^k, ξ_α^k $(\alpha = 1, \dots, k)$ – $2k$ свободных параметров.

Выражения типа /1/, /2/ встречаются в теории возмущений с нулевым свободным гамильтонианом, см.[1], где они вычислялись методом стационарной фазы.

Пусть задана произвольная последовательность $\{\sigma_N\}$ разбиений интервала $[t', t'']$:

$$\sigma_N: \quad t' = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t'', \qquad /4/$$

причем

$$\max_{i=1,\dots,N} \Delta t_i \xrightarrow[N \to \infty]{} 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i = t'' - t'. \qquad /5/$$

При помощи

$$\rho_i^+(t) = (t_i - t)/(t_i - t_{i-1}), \qquad \rho_i^-(t) = (t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}) \qquad /6/$$

определим параметры регулярности

$$\rho^{\pm}(t) = \sigma - \lim_{N\to\infty} \rho^{\pm}_{i*}(t). \qquad /7/$$

Здесь $\sigma - \lim\limits_{N\to\infty}$ означает предел при условиях /4/, /5/, а $t_{i*-1} \le t < t_{i*}$ – ближайшие к t при каждом N точки из /4/. Видно, что $\rho^{+} + \rho^{-} = 1$ и $0 \le \rho^{-} < 1$, $0 < \rho^{+} \le 1$.

Пути $(p(t), q(t))$ в фазовом пространстве будем аппроксимировать на $[t_{i-1}, t_i]$ функциями

$$p(t) = p_i = \mathrm{const}, \quad q(t) = q_{i-1} + \Delta q_i \rho^{-}_i(t). \qquad /8/$$

Известно[3,4], что такая полигональная КА приводит к квантованию Борна-Йордана и что она удовлетворяет общим требованиям к КА[5]. Прямое вычисление /3/ дает

$$\Delta A^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} [p_i(\Delta q_i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \eta\, dt - \sum_{\alpha=1}^{k} \Delta_{ii_\alpha} \eta^k_\alpha) - q_{i-1}(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi\, dt - \sum_{\alpha=1}^{k} \delta_{ii_\alpha} \xi^k_\alpha) -$$

$$- \Delta q_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi \rho^{-}_i\, dt] - \sum_{\alpha=1}^{k} \xi^k_\alpha \Delta q_{i_\alpha} \rho^{-}_{i_\alpha}(t^k_\alpha),$$

где

$$\Delta_{ii_\alpha} = \delta_{ii_\alpha - 1} \theta[-\rho^{-}_{i_\alpha}(t^k_\alpha)] + \delta_{ii_\alpha}\{1 - \theta[-\rho^{-}_{i_\alpha}(t^k_\alpha)]\}.$$

Здесь $t_{i_\alpha - 1} \le t^k_\alpha < t_{i_\alpha}$ – ближайшие к t^k_α точки из /4/. В случае $t_{i_\alpha - 1} = t^k_\alpha$ Δ_{ii_α} позволяет учесть левое и правое значение разрывной функции, аппроксимирующей $p(t)$ с весами $\theta(0)$ и $1-\theta(0)$ соответственно ($\theta(t)$ – функция Хевисайда, δ_{ij} – символ Кронекера).

Возникновение δ-функций Дирака позволяет легко вычислить

$$\underset{\sim}{Z}^{(k)}_N = \int \dots \int dq_0 \prod_{i=1}^{N} \frac{dp_i\, dq_i}{2\pi\hbar} \exp(\frac{i}{\hbar} \Delta A^{(k)}) \delta(q_N - q'') \delta(q_0 - q') =$$

$$= \delta(q'' - q' - \int_{t'}^{t''} \eta\, dt - \sum_{\alpha=1}^{k} \eta^k_\alpha) \exp\{-\frac{i}{\hbar}[q'(\int_{t'}^{t''} \xi\, dt + \sum_{\alpha=1}^{k} \xi^k_\alpha) + B_N]\}. \qquad /9/$$

Предел $\sigma - \lim\limits_{N\to\infty}$ выражения

$$B_N = \sum_{i=1}^{N} (\int_{t'}^{t_{i-1}} \eta\, dt_2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi\, dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \eta\, dt_2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi\, dt_1) + \sum_{\alpha=1}^{k} \{ \xi^k_\alpha \int_{t'}^{t_{i_\alpha - 1}} \eta\, dt +$$

$$+ \eta^k_\alpha [\int_{t_{i_\alpha - 1}}^{t''} \xi\, dt + \theta(-\rho^{-}_\alpha(t^k_\alpha)) \int_{t_{i_\alpha - 1}}^{t_{i_\alpha}} \xi\, dt] + \xi^k_\alpha \rho^{-}_{i_\alpha}(t^k_\alpha) \int_{t_{i_\alpha - 1}}^{t_{i_\alpha}} \eta\, dt +$$

$$+ \eta^k_\alpha [\theta(-\rho^{-}_{i_\alpha}(t^k_\alpha)) \int_{t_{i_\alpha - 1}}^{t_{i_\alpha}} \xi \rho^{-}_{i_\alpha - 1} dt + (1 - \theta(-\rho^{-}_{i_\alpha}(t^k_\alpha))) \int_{t_{i_\alpha - 1}}^{t_{i_\alpha}} \xi \rho^{-}_{i_\alpha}\, dt]\} +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} \{ \xi^k_\alpha \eta^k_\beta [\sum_{j=1}^{i_\alpha - 1} \Delta_{ji_\beta} + \rho^{-}_{i_\alpha}(t^k_\alpha) \Delta_{i_\alpha i_\beta}]\}$$

нужно вычислять, имея в виду, что $\eta(t)$, $\xi(t) \in C_0$ и что при достаточно больших N упорядочение индексов i_α совпадает с упорядочением t^k_α. Учитывая /7/ и вводя новое обозначение

$$\theta_\sigma[-\rho^{\pm}(t)] = \sigma - \lim_{N\to\infty} \theta[-\rho^{\pm}_{i*}(t)],$$

получаем

$$\underset{\sim}{Z}^{(k)} = \sigma - \lim_{N\to\infty} \underset{\sim}{Z}^{(k)}_N = \qquad /10/$$

$$= \delta(q'' - q' - \int_{t'}^{t''} \eta\, dt - \sum_{\alpha=1}^{k} \eta^k_\alpha) \exp\{-\frac{i}{\hbar}[q'(\int_{t'}^{t''} \xi\, dt + \sum_{\alpha=1}^{k} \xi^k_\alpha) + \int_{t'}^{t''} dt_2\, \eta(t_2) \int_{t_2}^{t''} dt_1\, \xi(t_1) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k} (\xi^k_\alpha \int_{t'}^{t^k_\alpha} \eta\, dt + \eta^k_\alpha \int_{t^k_\alpha}^{t''} \xi\, dt) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} \xi^k_\alpha \eta^k_\beta \theta(t^k_\alpha - t^k_\beta - 0) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k} (\xi^k_\alpha \eta^k_\alpha (\rho^{-}(t^k_\alpha) + \theta_\sigma(-\rho^{-}(t^k_\alpha))))]\}.$$

При $\eta^k_\alpha = \xi^k_\alpha = 0$ это совпадает с результатом из[1].

Проинтегрировав /9/ по $t^k_1, \dots, t^k_k$ на интервале $[t', t'']$, мы получаем в пределе $N \to \infty$

$$Y^{(k)} = C^{(k)} \delta(q'' - q' - \int_{t'}^{t''} \eta\, dt - \sum_{\alpha=1}^{k} \eta^k_\alpha) \exp\{-\frac{i}{\hbar}[q'(\int_{t'}^{t''} \xi\, dt + \sum_{\alpha=1}^{k} \xi^k_\alpha) +$$

$$+ \int_{t'}^{t''} dt_2\, \eta(t_2) \int_{t_2}^{t'} \xi(t_1) dt_1]\} \times \int_{t'}^{t''} \dots \int dt^k_1 \dots dt^k_k \exp\{-\frac{i}{\hbar}[\sum_{\alpha=1}^{k} (\xi^k_\alpha \int_{t'}^{t^k_\alpha} \eta\, dt + \eta^k_\alpha \int_{t^k_\alpha}^{t''} \xi\, dt) +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} \xi^k_\alpha \eta^k_\alpha \theta(t^k_\alpha - t^k_\beta - 0)]\}, \qquad /11/$$

где

$$C^{(k)} = \int_0^1 \dots \int d\rho_1 \dots d\rho_k \exp(-\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^{k} \rho_\alpha \xi^k_\alpha \eta^k_\alpha) = (i\hbar)^k \prod_{\alpha=1}^{k} (\frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \xi^k_\alpha \eta^k_\alpha} - 1}{\xi^k_\alpha \eta^k_\alpha}).$$

Результат /11/ не зависит от выбора $\{\sigma_N\}$. Его нельзя получить интегрированием /10/ по t^k_α, т.е. в данном случае

$$\int \mathcal{D}(p,q) \int \dots \int dt_1^k \dots dt_k^k \neq \int \dots \int dt_1^k \dots dt_k^k \int \mathcal{D}(p,q).$$

В самом деле, /10/ существенным образом зависит от выбора $\{\sigma_N\}$ через $\rho^-(t_\alpha^k)$ и $\theta_\sigma[-\rho^-(t_\alpha^k)]$, причем эти пределы могут и не существовать. Например, при равномерном разбиении $[t', t'']$ на $\Delta t = (t''-t')/N$ видно, что

$$\rho^-_{i_*}(t) = \rho_N(t) = N\frac{t-t'}{t''-t'} - [N\frac{t-t'}{t''-t'}],$$

где $[x]$ - целая часть x. Так как

$$\exp(2\pi i \rho_N) = \exp(2\pi i \frac{t-t'}{t''-t'}N),$$

в нашем случае $(t' \le t < t'')$ имеет предел при $N \to \infty$ только тогда, когда $t = t'$; мы видим, что $\rho^-(t)$ и вместе с ним /10/ не имеют смысла для $t_\alpha^k \in (t', t'']$.

Однако существует бесконечное множество зависящих от t_α^k последовательностей $\{\sigma_N\}$, для которых $\rho^\pm(t_\alpha^k)$ хорошо определены. Например, пусть N_0 настолько большое, что

$$\max_{\alpha=1\dots k}\left(\frac{t_\alpha^k - t'}{N_0}, \frac{t''-t_\alpha^k}{N_0}\right) \ll \min_{\alpha,\beta=1..k} |t_\alpha^k - t_\beta^k|.$$

Выберем $\{\sigma_N\}$ так, что при $N > N_0$

$$t_{i_\alpha - 1} = t_\alpha^k - i(t_\alpha^k - t')/N, \quad t_{i_\alpha} = t_\alpha^k + (t'' - t_\alpha^k)/N,$$

а остальные t_i заданы произвольно с соблюдением /5/. Легко видеть, что тогда $\rho^-(t_\alpha^k) = (t_\alpha^k - t')/(t''-t')$ и $Z^{(k)}$ из /10/ не только имеет смысл для всех $t_\alpha^k \in [t', t'']$, но из него можно получить /11/ интегрированием по этим переменным. Ясно, что для каждого $Z^{(k)}$ нужно подбирать свою последовательность $\{\sigma_N\}$ и что не существует единого выбора $\{\sigma_N\}$, приводящего к такому результату для всех $k = 0,1,\dots,\infty$.

Член с множителем $\theta_\sigma[-\rho^-(t_\alpha^k)]$ в /10/ учитывает не только существование предела $\rho^-(t_\alpha^k)$, но и способ его достижения. Если $\{\sigma_N\}$ такова, что для любого N_0 найдутся $N_1 > N_0$, для которого $t_i \neq t_\alpha^k$ для всех $i = 1,\dots,N_1$, и $N_2 > N_0$, для которого существует $t_{i_\alpha \cdot 1} = t_\alpha^k$, то $\theta_\sigma[-\rho^-(t_\alpha^k)]$ не существует. Член с этим коэффициентом можно убрать из /10/, полагая $\theta(0) = 0$, что обычно и делается, так как он учитывает эффект от множества меры ноль /6/.

Ясно, что выбором $\{\sigma_N\}$ можно получить что угодно для $\rho^\pm(t_\alpha^k)$, а отсюда и для /10/. Это ставит под сомнение правомерность вычисления ИП /1/ при помощи КА полигональными путями /8/.

Наличие в /3/ членов с $\eta_\alpha^k, \xi_\alpha^k \neq 0$ является решающим для наших выводов. В этих членах $p(t)$ и $q(t)$ берутся для совпадающих моментов времени, и возникает неопределенность, связанная с неопределенностью Т-произведения.

Рассмотренный пример показывает, что, вообще говоря, нельзя менять произвольно порядок функционального интегрирования и интегрирования по независимым переменным. В случае применения такой операции она нуждается в специальном обосновании.

Автор благодарен Б.М.Барбашову за прочтение рукописи и за полезные советы. Особенно приятно выразить благодарность В.Н.Попову за обсуждение работы и за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ф.А. УФН, 1980, 132, с. 497.
2. Фаддеев Л.Д., Славнов А.А. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. "Наука", М., 1978.
3. Garrod C. Rev.Mod.Phys., 1966, 38, p. 483.
4. Kerner E.H., Sutcliffe W.G. J.Math.Phys., 1970, 11, p. 391.
5. Физиев П.П. ОИЯИ, Р2-81-742, Дубна, 1981.
6. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, Атомиздат, М., 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1982 года.

Физиев П.П. Пример некоммутативности интегрирования по путям и интегрирования по времени P2-82-513

Обсуждается проблема перестановки фейнмановского интегрирования по путям и интегрирования по независимым переменным. Рассмотрен конкретный пример вычисления интеграла по путям при помощи конечномерной аппроксимации полигональными путями в случае системы с конечным числом степеней свободы. Показано, что перестановка интегрирования по путям и интегрирования по времени может существенно менять конечный результат. Продемонстрирована возможность сильной зависимости результата от выбора мельчающей последовательности разбиений временного интервала.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Fiziev P.P. An Example of Noncomutativity of Path Integration and Time Integration P2-82-513

The Feynman path integral is analysed from the point of view of its comutativity with the integration over the independent variables. A concrete example of the Feynman integral, pertinent to a finite-dimensional system has been studied by means of the discretization procedure. It is shown that the change of order of the integration over the trajectories and over time variable can siginificantly change the final result. It is argued that strong dependence is possible of the final result on the concrete choice of the time-interval discretization.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.