сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-82-43

В.Н.Стрельцов

ДВА ВОПРОСА
СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1982

Обсуждаемые ниже вопросы равновесия и преобразования температуры являются характерными аспектами важных проблем релятивистской формулировки статики и термодинамики. Они рассматривались до самого последнего времени целым рядом авторов. Наш подход к указанным вопросам основывается на требовании равенства нулю 4-тензора момента силы и релятивизации уравнения состояния идеального газа.

"ПАРАДОКС" ПРЯМОУГОЛЬНОГО РЫЧАГА ЛЬЮИСА-ТОЛМЕНА *

Суть этой известной проблемы заключается в появлении крутящего момента $(N_{12} \neq 0)$ в системе отсчета (K), где угольник движется, тогда как в его собственной системе K°

$$N_{12}^{(0)} = X_1^{(0)} F_2^{(0)} - X_2^{(0)} F_1^{(0)} = 0. \qquad /1/$$

Здесь $X_1^{(0)}$ и $X_2^{(0)}$ - плечи рычага, направленные вдоль осей x и y соответственно, $F_2^{(0)}$ и $F_1^{(0)}$ - приложенные к ним силы. При этом для простоты вершина угольника находится в начале координат, $X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = \ell$ и $F_1^{(0)} = F_2^{(0)} = F$.

С учетом формул лоренцева сокращения

$$X_1 = X_1^{(0)} \gamma^{-1} \qquad /2а/$$

и

$$X_2 = X_2^{(0)} , \qquad /2б/$$

а также формул преобразования компонент релятивистской силы

$$F_1 = F_1^{(0)} \gamma \quad \text{и} \quad F_2 = F_2^{(0)}, \qquad /3/$$

действительно, найдем

$$N_{12} = X_1 F_2 - X_2 F_1 = \ell \gamma^{-1} F - \ell F \gamma = -\beta^2 \ell F \gamma . \qquad /4/$$

В рамках четырехмерной формулировки момент силы описывается антисимметричным 4-тензором второго ранга N_{ik} $(i, k = 0,1,2,3)$. При этом с чисто математической точки зрения здесь нет никакой

---

* См., например, последние работы /1,2/, а также /3/, где можно найти ссылки и на предыдущие статьи по этой теме.

трудности. В самом деле, с учетом формул преобразований для компонент N_{ik} будем иметь

$$N_{12}^{(0)} = (N_{12} - \beta N_{02})\gamma = 0 \quad (c = 1)\,, \qquad /5/$$

или

$$N_{02} = \beta^{-1} N_{12}\,,$$

откуда следует

$$N_{02}^{(0)} = (N_{02} - \beta N_{12})\gamma = (\beta^{-1} - \beta) N_{12}\gamma = -\beta \ell F. \qquad /6/$$

Иными словами можно сказать, что появление в K-системе вращательного момента N_{12} обусловлено существованием в K°-системе отличной от нуля компоненты $N_{02}^{(0)}$.

Однако такое положение, когда у системы, находящейся в равновесии, тензор момента сил отличен от нуля, нельзя признать удовлетворительным. Поэтому потребуем обращения в нуль N_{ik}, т.е., в частности, выполнения равенства

$$N_{12} = 0\,, \qquad /7/$$

откуда с учетом /2б/ и /3/ для формулы преобразования продольного плеча найдем

$$X_1 = X_1^{(0)}\gamma = \ell\gamma. \qquad /8/$$

Эта формула соответствует определению релятивистской длины [4]*, основанному на непосредственном использовании часов и световых сигналов. Применение /8/ позволяет устранить и другие трудности[5], такие, как наличие импульса электромагнитного поля у покоящегося электрона, появление заряда в движущемся проводнике с током и т.д. Привлекая /5/ и /6/, на основании /7/ найдем $N_{02} = 0$ и $N_{02}^{(0)} = 0$**. Таким образом, как того и требует логика вещей, будем, действительно, иметь

$$N_{ik} = 0 \qquad /9/$$

независимо от системы отсчета. При этом, очевидно, что в K-системе работа силы F_1, мощность которой равна $F_0 = u_1 F_1 / u_0$,

---

* Аналога радиолокационного метода измерения расстояний.

**Здесь следует особо подчеркнуть, что когда силы приложены в различных n точках протяженного тела, то состояние равновесия в релятивистской статистике должно определяться именно равенством $\sum\limits_n N_{0\alpha}^{(n)} = 0$ $(\alpha = 1,2,3)$ вместо $\sum\limits_n F_\alpha^{(n)} = 0$, т.е. необходимо учитывать моменты времени действия сил.

где u_i - 4-скорость, над рычагом /точнее, произведения F_0 на плечо X_2 / полностью компенсируется величиной произведения F_2 на момент времени $X_0 = \beta X_1^{(0)}\gamma$ ее действия.

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ *

При рассмотрении этого вопроса мы будем исходить из определения температуры, опирающегося на ее измерение с помощью газового термометра. В свою очередь, действие этого прибора основано фактически на существовании уравнения состояния идеального газа.

Указанное уравнение в K°-системе, где сосуд с газом покоится, имеет вид

$$p^{(0)} V^{(0)} = N k T^{(0)}. \qquad /10/$$

В рамках специальной теории относительности нормальное давление описывается тремя диагональными компонентами полного тензора энергии T_{ik}, который в произвольной системе отсчета имеет вид

$$T_{ik} = (\epsilon^{(0)} + p^{(0)}) u_i u_k - p^{(0)} \delta_{ik}\,, \qquad /11/$$

где $\epsilon^{(0)}$ - собственная плотность энергии, $- p^{(0)} = T_{11}^{(0)} = T_{22}^{(0)} = T_{33}^{(0)}$ δ_{ik} - символ Кронекера. При этом пространственный объем является временной компонентой 4-вектора V_i. На основании сказанного правая часть /10/ и, в частности, температура ** должна быть 4-вектором /или тензором третьего ранга/, т.е. преобразовываться при переходе от одной системы отсчета к другой. Чтобы продемонстрировать векторный характер температуры, запишем уравнение /10/ в ковариантном виде[10]:

$$T^{ik} V_k - \mu^{(0)} V^i = N \kappa T^i\,, \qquad /12/$$

где $\mu^{(0)} = T_i^{i(0)}$ - собственная плотность массы, $\kappa = 3k$. Для идеального газа, состоящего из одинаковых частиц массы m, имеем

$$T_{ik} = nm\overline{(dx_i / dx_0) u_k}\,, \qquad /13/$$

---

* См., например,[6-8], а также[9], где предлагается мысленный опыт по проверке формулы преобразования температуры. В этих статьях содержатся и ссылки на предшествующие работы по релятивистской термодинамике.

** Поскольку произведение Nk - инвариант.

где n - число частиц в единице объема, а черта означает усреднение по всем частицам. Сравнение /11/ и /13/ позволяет заключить, например, что, с точностью до членов $\overline{\beta^4}$, давление $p^{(0)} = (nm/3)\,(\overline{\beta^2} + \overline{\beta^4})$ уже не равно $\overline{2E_{kin}}/3 = (nm/3) \times \times(\overline{\beta^2} + 3\overline{\beta^4}/4)$, где $\overline{E}_{kin}$ - средняя кинематическая энергия. В определенной связи со сказанным отметим, что показатель экспоненты в релятивистском распределении Максвелла /см. Приложение/ ковариантным образом может быть записан в виде

$$(P^i u_i - m)/kT^i u_i = (E - \vec{P}\vec{\beta} - m\gamma^{-1})/kT\gamma^{-2}, \qquad /14/$$

где P^i - 4-импульс частицы.

Если далее в соответствии с результатами предыдущего параграфа мы определим V_i с помощью выражения

$$V_i^{(0)}\,(V^{(0)},\ 0,\ 0,\ 0)\,, \qquad /15/$$

то, подставляя формулы преобразования для компонент T_{ik} и V_i в /12/ или /10/, немедленно придем к формуле Отта для температуры*:

$$T = T^{(0)}\gamma \qquad (T_i = T^{(0)} u_i). \qquad /16/$$

Здесь мы хотим обратить внимание на следующее. Времени- и пространственноподобные вектора, описывающие поведение материальных тел, характеризуются тем, что в единственной системе отсчета (K) их пространственные или временные компоненты соответственно равны нулю. С другой стороны, среди множества инерциальных систем отсчета собственная система в определенном смысле также является выделенной. Чтобы избежать трудностей и парадоксов**, необходимо K-систему отождествлять с собственной. При этом формула преобразования для любой величины A, описываемой указанными векторами, будет подобно /16/ содержать в правой части произведения $A^{(0)}\gamma$ /а не $A^{(0)}\gamma^{-1}$/.

Подойдем теперь к обсуждаемому вопросу с другой стороны. Как отмечается в работе Тер Хаара и Вергеланда[11], которые исходят из иного, термодинамического определения температуры

$$T = \partial E/\partial S, \qquad /17/$$

* С обыденной точки зрения этот результат можно считать вполне естественным, поскольку обычно мы измеряем температуру, например, по высоте /длине/ столбика жидкости.

** А в конечном счете, противоречий принципу относительности.

формула /16/ следует с учетом инвариантности энтропии S из /17/ при условии постоянства скорости тела, а формула Планка - при условии постоянства его импульса. Указанные формулы преобразования описывают связь температуры T движущегося тела с температурой $T^{(0)}$ в его собственной системе отсчета.

Поскольку во втором случае в процессе подвода тепла изменяется собственная система отсчета, то равенство $dM = T^{(0)}\,dS^{(0)}$, где dM - изменение массы тела, теряет смысл, следовательно, теряет смысл и основанный на этом равенстве отмеченный вывод формулы Планка.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вопрос о релятивистских формулах преобразования для количества тепла и температуры наряду с проблемой о форме тензора энергии - импульса электромагнитного поля в среде вызвал особенно оживленную дискуссию в последнее время. Вместе с тем лежащий фактически в основе проблемы равновесия прямоугольного рычага вопрос о релятивистской формуле преобразования длины /объема/ также весьма важен. Использование вместо формулы лоренцева сокращения "формулы удлинения" /8/, основанной на ином определении релятивистской длины, позволяет не только разрешить обсужденный парадокс, но и устранить другие трудности. При этом, что особенно важно подчеркнуть, формуле Отта для температуры соответствует именно формула /8/.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод релятивистского распределения Максвелла

Известное условие неизменности числа частиц с данными значениями импульса $\vec{P}$ /скорости/ в процессах столкновений в газе, находящемся в стационарном состоянии, запишем в виде

$$f(P^2_{(1)})\,f(P^2_{(2)}) = f(P^2_{(3)})\,f(P^2_{(4)})\,. \qquad /П.1/$$

На основании релятивистского закона сохранения энергии, в частности, найдем

$$P^2_{(4)} = 2m^2 + P^2_{(1)} + P^2_{(2)} + P^2_{(3)} + 2E_{(1)}E_{(2)} - 2E_{(1)}E_{(3)} - 2E_{(2)}E_{(3)}, \qquad /П.2/$$

где $E_{(n)} = \sqrt{m^2 + P^2_{(n)}}$. Взяв логарифмы от равенства /П.1/ и продифференцировав его по $P^2_{(1)}$, $P^2_{(2)}$ и $P^2_{(3)}$ с учетом /П.2/, получим

$$\frac{E_1}{f(P^2_{(1)})}\frac{df}{dP^2_{(1)}} = \frac{1}{f(P^2_{(4)})}\cdot\frac{df}{dP^2_{(4)}}(E_{(1)} + E_{(2)} - E_{(3)})$$

и т.д. В результате для функции распределения f будем иметь

$$f(P^2) = A e^{-\alpha\sqrt{m^2+P^2}} \quad . \qquad /П.3/$$

Постоянная интегрирования A может быть определена из условия нормировки на полное число частиц N. После перехода к сферическим координатам и замены переменных получим

$$N = A\frac{4\pi}{m^3}\int_m^\infty E\sqrt{E^2-m^2}\, e^{-\alpha E}\, dE\,, \qquad /П.4/$$

интегрирование дает

$$N = A\frac{4\pi}{m^3}\cdot\frac{2m^2}{\sqrt{\pi}\,\alpha}\,\Gamma(\frac{3}{2})K_2(m\alpha)\,, \qquad /П.5/$$

где $K_n(z)$ - функция Макдональда. Используя ее асимптотическое разложение, при $m\alpha \gg 1$, в частности, получим

$$A = N(\frac{m\alpha}{2\pi})^{3/2}\, e^{m\alpha} \qquad /П.6/$$

и

$$f(E) = N(\frac{m\alpha}{2\pi})^{3/2}\, e^{-\alpha(E-m)} \quad . \qquad /П.7/$$

Переходя к нерелятивистскому пределу в выражении /П.7/, найдем, что $\alpha = 1/kT^{(0)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cavalleri G., Spinelli G. Lett.Nuovo Cim., 1979, 26, p.261.
2. Chamorro A., Hernandez A. Lett.Nuovo Cim., 1980, 28,p.467.
3. Grøn Ø. Am.J.Phys., 1981, 49, p.28.
4. Strel'tsov V.N. Found.Phys., 1976, 6, p.293.
5. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-10912, Р2-11115, Дубна, 1977.
6. Скобельцын Д.В. Проблемы современной физики. "Наука", Л., 1980, с.339.
7. Newburgh R.G. Phys.Lett., 1980, 78A, p.17.
8. Goodinson P.A., Luffman B.L. Nuovo Cim., 1981, 64B,p.444.
9. Landsberg P.T. Phys.Rev.Lett., 1980, 45, p.149.
10. Strel'tsov V.N. Found.Phys., 1977, 7, p.325.
11. Ter Haar D., Wergeland H. Phys.Rep., 1971,1C, p.31. /См.пер.: Эйнштейновский сборник,1972. "Наука", М., 1974, с.254/.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Стрельцов В.Н. P2-82-43
Два вопроса специальной теории относительности

Обсуждается известный "парадокс" прямоугольного рычага Льюиса-Толмена. Решение парадокса основывается на требовании обращения в нуль тензора момента силы, что приводит к "формуле удлинения" продольного плеча рычага. На основе определения температуры, связанного с уравнением состояния идеального газа, высказываются соображения в пользу формулы преобразования Отта для температуры. Отмечается тесная связь между затронутыми вопросами. Приводится вывод релятивистского распределения Максвелла.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Strel'tsov V.N. P2-82-43
Two Problems of a Special Relativity

The known Lewis-Tolmen right-angle lever paradox is discussed. Its decision is based on the requirement of vanishing torque tensor which results in "elongation formula" for longitudinal arm of lever. Proceeding from temperature definition, connected with the equation of ideal gas state, some considerations in favor of Ott's transformation formula for temperature are presented. The connection between the mentioned questions is pointed out. The derivation of relativistic Maxwellian distribution is given.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.