сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

3766/82

16/8-82

Р2-82-376

И.В.Барашенков

УСТОЙЧИВОСТЬ "ЦВЕТНЫХ" СОЛИТОНОВ

1982

ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости частицеподобных решений /солитонов/ является одной из важнейших проблем при исследовании различных нелинейных теоретико-полевых моделей. С одной стороны, критерий устойчивости налагает достаточно сильное ограничение как на решение, так и на само нелинейное уравнение, с другой - свидетельствует о правильности интерпретации теории. Все это находит отражение в постоянном росте числа работ, в которых исследованию подвергаются как интегрируемые, так и близкие к ним системы [1-2]. Тем не менее, насколько нам известно, за исключением единственной работы [3], до сих пор рассматривался лишь случай, когда присутствует одно скалярное или спинорное поле. При рассмотрении же многокомпонентных /векторных либо нескольких взаимодействующих/ полей вопрос об устойчивости решений остается вне поля зрения исследователей.

Причина этого, на наш взгляд, заключается в следующем. Проблема устойчивости решения нелинейного эволюционного уравнения приводит, как правило, к задаче на собственные значения для некоторого дифференциального оператора. Если исходное уравнение однокомпонентное, то соответствующий оператор является обычным оператором Шредингера, для которого существует хорошо развитая спектральная теория. Для векторных же уравнений соответствующий оператор - уже оператор матричный, и именно последнее обстоятельство сильно усложняет рассмотрение.

В данной работе на примере нелинейного уравнения Шредингера (NLS) с "цветовой" /изотопической/ группой мы показываем, однако, что если последовательно учесть симметрию модели, то для исследования устойчивости многокомпонентной системы может оказаться пригодной традиционная техника /в нашем случае - Q-теорема/.

NLS с $U(n,0)$* - внутренней симметрией было получено в [4] как изотопическое обобщение модели Хаббарда в длинноволновом приближении [5], а также в работе [6] в качестве одной из возможных редукций системы AKNS. На классическом уровне в част-

* В работе [4] было получено векторное NLS с $U(p,q)$ -изосимметрией, чьим частным случаем является наше $U(n,0)$ - уравнение. Случай $U(0,n)$ отличается от рассматриваемого знаком константы связи.

ном случае $n = 2$ оно описывает эллиптически поляризованную волну в нелинейной среде [7], а на квантовом [8] - "цветной" самогравитирующий бозе-газ с точечным взаимодействием. Это уравнение калибровочно эквивалентно цепочке спинов Гайзенберга [9].

1. РЕШЕНИЯ $U(n, 0)$ NLS СИСТЕМЫ

Система n нелинейных уравнений Шредингера (NLS) с $U(n, 0)$-изосимметрией имеет вид

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \psi(\psi^+\psi) = 0, \qquad /1/$$

где ψ - вектор-столбец из n комплексных компонент, а ψ^+ - эрмитовски-сопряженный вектор-строка:

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \ldots, \psi_n^*).$$

Система /1/ может быть получена вариацией лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}[(\psi^+\psi_t) - (\psi_t^+\psi)] - (\psi_x^+\psi_x) + \frac{1}{2}(\psi^+\psi)^2.$$

Она имеет солитонные решения с граничными условиями вида

$$\psi(x,t) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0. \qquad /2/$$

Кроме того, она имеет солитонные решения с ненулевыми граничными условиями вида:

$$\psi_i(x,t) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0, \quad i = \overline{1,s}; \quad s > 0 \qquad /3'/$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi_i(x,t) \xrightarrow[x\to\infty]{} \psi_i^\circ, \\ \psi_i(x,t) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\psi_i^\circ, \end{array}\right\} \quad i = \overline{s+1, n} \qquad /3''/$$

В этом последнем случае модель должна быть слегка модифицирована введением "химического потенциала" μ в лагранжиан и уравнения:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}[(\psi^+\psi_t) - (\psi_t^+\psi)] - (\psi_x^+\psi_x) + \frac{1}{2}((\psi^+\psi) - \mu)^2, \qquad /4/$$

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \psi((\psi^+\psi) - \mu) = 0.$$

Систему /1/ с граничными условиями вида /2/ можно рассматривать как частный случай системы /4/ с граничными условиями /3/ при $s = n$ и $\mu = 0$. Будем в дальнейшем придерживаться такой точки зрения и рассматривать только уравнения /4/.

Система /4/ имеет интегралы энергии [4]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx\{(\psi_x^+\psi_x) - \frac{1}{2}((\psi^+\psi) - \mu)^2\} \qquad /5/$$

/далее бесконечные пределы интегрирования будем опускать/.

"Числа частиц i-го цвета" $N_i = \int dx\{|\psi_i|^2 - \mu_i\}$, /6/

где $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, а величины μ_i определятся из дальнейшего.

Рассмотрим решение /4/ вида

$$\psi_i(x,t) = \psi_i(x)\cdot\exp\{-i\omega_i t\}, \quad \omega_i \in \mathbf{R}. \qquad /7/$$

Вектор $\psi(x)$ удовлетворяет системе

$$W\psi + \psi_{xx} + \psi((\psi^+\psi) - \mu) = 0. \qquad /8/$$

Здесь $n\times n$ матрица W есть $W = \mathrm{diag}\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.
Стационарная система /8/ имеет решение вида

$$\psi_i(x) = \psi_i^\circ\cdot \mathrm{sch}(kx), \quad i = \overline{1,s}, \qquad /9'/$$

$$\psi_i(x) = \psi_i^\circ\cdot \mathrm{th}(kx), \quad i = \overline{s+1,n}. \qquad /9''/$$

Здесь $\psi_i^\circ \in \mathbf{C}$, а $k \in \mathbf{R}$. Нетрудно видеть, что для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$k^2 = \frac{1}{2}\{\sum_{i=1}^{s}|\psi_i^\circ|^2 - \sum_{i=s+1}^{n}|\psi_i^\circ|^2\}, \qquad /10/$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{s}|\psi_j^\circ|^2 + \sum_{j=s+1}^{n}|\psi_j^\circ|^2\} + \mu \equiv \omega_1, \quad i = \overline{1,s}, \qquad /11/$$

$$\omega_i = \mu - \{\sum_{j=s+1}^{n}|\psi_j^\circ|^2\} \equiv \omega_2, \quad i = \overline{s+1,n} \qquad /12/$$

Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям /3''/, следует потребовать $\omega_2 = 0$, т.е.

$$\mu = \sum_{j=s+1}^{n}|\psi_j^\circ|^2. \qquad /13/$$

Положим также

$$\mu_i = \lim_{|x|\to\infty} |\psi_i(x)|^2 . \qquad /14/$$

Отметим, что такое определение μ и μ_i устраняет расходимости при подсчете E и N_i по формулам /5/-/6/.

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Для наших целей удобно теперь записать систему /8/ в следующем виде:

$$W|\psi\rangle + \frac{d^2}{dx^2}|\psi\rangle + (\langle T\psi|\psi\rangle - \mu)|\psi\rangle = 0. \qquad /15/$$

Здесь $|\psi\rangle$ - действительный вектор-столбец размерности $m=2n$, $\langle\psi|$ - транспонированный вектор-строка; причем вектор $|\psi\rangle$ получается из вектора ψ разбиением последнего на действительную и мнимую части:

$$\langle\psi| = \{Re\psi_1 , Im\psi_1 , Re\psi_2 , Im\psi_2 ,\dots, Re\psi_n , Im\psi_n \}.$$

При этом, естественно, $\langle\phi|\psi\rangle = (\phi^+ \psi)$. Теперь уже W- $m\times m$ матрица,

$$||W||_{i,k} = \omega_1 \delta_{ik}, \quad i=\overline{1,2s}; \quad k=\overline{1,m},$$

$$||W||_{i,k} = \omega_2 \delta_{ik}. \quad i=\overline{2s+1.m}: \quad k=\overline{1.m}.$$

Стационарная система /15/ может быть получена экстремализацией E при двух дополнительных условиях:

$$N_I \equiv \int dx \sum_{i=1}^{s} [\psi_{2i}^2 + \psi_{2i-1}^2 - \mu_i] = const,$$

$$N_{II} \equiv \int dx \sum_{i=s+1}^{n} [\psi_{2i}^2 + \psi_{2i-1}^2 - \mu_i] = const.$$

Эти условия, с точностью до бесконечно малых второго порядка по $\delta\psi_i$, эквивалентны следующим:

$$\delta N_I = 2\int dx \sum_{i=1}^{2s} \delta\psi_i \psi_i = 0, \qquad /16'/$$

$$\delta N_{II} = 2\int dx \sum_{i=2s+1}^{2n} \delta\psi_i \psi_i = 0. \qquad /16''/$$

Соответственно имеем задачу на безусловный экстремум для функционала

$$F = E - \omega_1 N_I - \omega_2 N_{II} . \qquad /17/$$

Здесь ω_1 и ω_2 играют роль лагранжевских множителей, и определяются из условий ортогональности /16/. Для устойчивости решения необходимо и достаточно, чтобы вторая вариация F в точке экстремума была положительно определенной на некотором классе функций. В нашем случае подходящие функции принадлежат пространству m-компонентных действительных функций с интегрируемым квадратом $L_m^2 \equiv R_m \otimes L^2$. Если потребовать, чтобы вариации $|\delta\psi\rangle$ удовлетворяли условиям /16/ /класс таких функций назовем V/, то наше понимание устойчивости будет соответствовать т.н. Q-устойчивости [2]. Требование сохранения заряда Q эквивалентно фиксации "чисел частиц" N_I и N_{II} .

Итак, рассмотрим функционал F.

$$F = \int dx\{\langle\psi_x|\psi_x\rangle - \frac{1}{2}(\langle\psi|\psi\rangle - \mu)^2 - \langle\psi|W|\psi\rangle\}. \qquad /18/$$

Из условия $\delta F = 0$ при произвольных $|\delta\psi\rangle$ получается стационарная система /15/. Вторая вариация есть

$$\delta^2 F = 2\int dx \langle\delta\psi|\hat{H}|\delta\psi\rangle , \qquad /19/$$

где тестовый оператор

$$\hat{H} = -I\left(\frac{d^2}{dx^2} + \langle\psi|\psi\rangle - \mu\right) - W - 2|\psi\rangle\langle\psi| . \qquad /20/$$

Здесь $|\psi\rangle\langle\psi|$ - проектор в пространстве столбцов R_m на направление $|\psi\rangle$. Понятно, что для положительной определенности $\delta^2 F$ необходимо и достаточно, чтобы минимум $\delta^2 F$ на пространстве V был неотрицательным. В свою очередь, как мы увидим в разделе 3, для того, чтобы найти минимум $\delta^2 F$, надо решить задачу на собственные значения для оператора $\hat{H}$ и выбрать среди них наименьшее (λ_0). Но тем самым мы определим минимум не на V, а на более широком пространстве L_m^2. Будем обозначать минимум $\delta^2 F$ на V как M_v, а на L_m^2-M_L. Очевидно, что $M_v \geq M_L = \lambda_0$. В частном случае $M_v = M_L$ /это означает, что собственная функция $|y_0(x)\rangle$, соответствующая первому собственному значению λ_0, удовлетворяет условиям /16//. В этом случае знак M_v определяется знаком λ_0; соответственно при $\lambda_0 \geq 0$ солитон $|\psi(x)\rangle$ Q- устойчив, при $\lambda_0 < 0$ - Q-неустойчив. В нашем исследовании мы будем различать 2 случая - решение /9/ с нетривиальными граничными условиями, и решение с нулевыми граничными условиями, которое имеет вид

$$|\psi(x)\rangle = |\psi^\circ\rangle \cdot sch(kx) . \qquad /21/$$

В последнем случае следует удовлетворить лишь одному дополнительному условию /16/; при этом в /19/-/20/ следует положить $\mu = 0$ и $s = n$.

Как мы убедимся ниже, для исследования устойчивости решения /9/ приведенного анализа вполне достаточно. В случае же солитона /21/ нам придется иметь дело с ситуацией, когда $|y_0(x)>$ не удовлетворяет /16'/, т.е. $M_v > M_L$. При $\lambda_0 > 0$ здесь никаких проблем нет - $M_v > M_L = \lambda_0 > 0$, налицо Q-стабильность. Сложнее ситуация при $\lambda_0 < 0$. Тут уже надо рассматривать следующие по величине собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Допустим, что $\lambda_1 < 0$. Тогда, беря в качестве допустимой вариации $|\delta\psi>$ суперпозицию $\alpha|y_0(x)> + \beta|y_1(x)>$ и выбирая α и β так, чтобы удовлетворить /16'/, получим $M_v < 0$, что означает Q-неустойчивость. Если же $\lambda_1 > 0$, то для того, чтобы определить знак M_v, необходимо дополнительное исследование / Q-теорема /2/ /. Заметим, что из числа собственных значений λ_i следует исключить $\lambda_i = 0$ /так называемые нулевые моды/. Соответствующие возмущения не приводят к неустойчивости, ибо они соответствуют преобразованиям симметрии системы /например, трансляциям солитона/.

Для того, чтобы провести описанное здесь рассмотрение, необходимо иметь информацию о структуре спектра и поведении собственных функций оператора $\hat{H}$ /20/. Дальнейшие выводы будут основаны на результатах следующих двух разделов.

3. СТРУКТУРА СПЕКТРА МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим оператор

$$\hat{L} \equiv (I_q - I_p) \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}(x), \qquad /22/$$

действующий в пространстве L^2_m. Тут $p + q = m$, а I_q, I_p - частично заполненные единичные матрицы $m \times m$:

$$||I_p||_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \le p \\ 0, & i > p \end{cases} ; \quad I_q = I - I_p .$$

Пусть, далее, матрица "потенциалов" имеет следующее асимптотическое поведение:

$$\hat{V}(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \hat{V}^+, \quad ||\hat{V}^+||_{i,j} = V_i^+ \delta_{ij},$$

$$V_i^{\pm} = \text{const}.$$

$$\hat{V}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \hat{V}^-, \quad ||\hat{V}^-||_{i,j} = V_i^- \delta_{ij}.$$

Обозначим

$$V_{min} \equiv \min_{i \le p} \{V_i^+, V_i^-\}; \quad V_{max} \equiv \max_{i > p} \{V_i^+, V_i^-\}.$$

<u>Теорема</u>. Если $V_{max} < V_{min}$, то спектр задачи

$$\hat{L}|y(x)> = \lambda|y(x)> \qquad /23/$$

везде непрерывный, кроме области $V_{max} < \lambda < V_{min}$. В области $V_{max} < \lambda < V_{min}$ располагаются дискретные собственные значения.

<u>Доказательство</u>: Рассмотрим асимптотику /22/ при $|x| \to \infty$:

$$\hat{L} \xrightarrow[x \to \infty]{} (I_q - I_p) \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}^+,$$

$$\hat{L} \xrightarrow[x \to -\infty]{} (I_q - I_p) \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}^-.$$

При $x \to \infty$ будем иметь m несвязанных уравнений

$$(-\frac{d^2}{dx^2} + V_i^+) y_i(x) = \lambda y_i(x); \quad i = \overline{1,p}, \qquad /24/$$

$$(-\frac{d^2}{dx^2} - V_i^+) y_i(x) = -\lambda y_i(x); \quad i = \overline{p+1,m}. \qquad /25/$$

Введем $E_i^+ \equiv \lambda - V_i^+$, $i \le p$; $E_i^+ \equiv V_i^+ - \lambda$; $i > p$. Тогда уравнения /24/, /25/ запишутся в виде:

$$-\frac{d^2}{dx^2} y_i(x) = E_i^+ y_i(x); \quad i = \overline{1,m}.$$

Аналогично поступим при $x \to -\infty$:

$$-\frac{d^2}{dx^2} y_i(x) = E_i^- y_i(x); \quad i = \overline{1,m}.$$

Если $\lambda \in (V_{max}, V_{min})$, то $E_i^+ < 0$; $E_i^- < 0$; $i = \overline{1,m}$. Поэтому

$$y_i(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} C_{2i}^+ \exp\{-\kappa_i^+ x\} + C_{2i-1}^+ \exp\{\kappa_i^+ x\},$$

$$y_i(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} C_{2i}^- \exp\{-\kappa_i^- x\} + C_{2i-1}^- \exp\{\kappa_i^- x\},$$

где $\kappa_i^{\pm} \equiv (-E_i^{\pm})^{1/2}$ - действительные числа.

Введем в пространстве решений 2 базиса: один задаваемый асимптотикой на $(-\infty)$ /при этом мы обозначаем $|e_j>$ j-й столбец единичной матрицы/:

$$|\psi_{2i}(x)> \xrightarrow[x\to-\infty]{} |e_{2i}> \cdot \exp(-\kappa_i^- x),$$

$$|\psi_{2i-1}(x)> \xrightarrow[x\to-\infty]{} |e_{2i-1}> \cdot \exp(\kappa_i^- x). \qquad /26/$$

Другой - асимптотикой на $(+\infty)$:

$$|\phi_{2i}(x)> \xrightarrow[x\to+\infty]{} |e_{2i}> \cdot \exp(\kappa_i^+ x),$$

$$|\phi_{2i-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} |e_{2i-1}> \cdot \exp(-\kappa_i^+ x), \qquad /27/$$

$$i = \overline{1,m}.$$

Разложим теперь векторы /27/ по базису /26/

$$|\phi_j(x)> = T_{ji}(\lambda)|\psi_i(x)>$$

/по повторяющимся индексам суммируем от 1 до $2m$ /.

Возьмем некоторое решение проблемы /23/

$$|\psi(x)> = c_j^- \, |\psi_j(x)>$$

и фиксируем его условием необращения в бесконечность при $x\to-\infty$:

$$c_{2i}^- = 0; \quad i = 1, m. \qquad /28/$$

Разложим теперь $|\psi(x)>$ по базису /27/:

$$|\psi(x)> = c_j^+ |\phi_j(x)>.$$

Коэффициенты c_j^- выражаются через c_j^+ :

$$c_\ell^- = T_{\ell k}\, c_k^+ ; \quad \ell = \overline{1,2m}. \qquad /29/$$

В силу m условий /28/ получим из /29/ m уравнений на c_k^+ :

$$T_{\ell k}(\lambda) c_k^+ = 0; \quad \ell = 2i; \quad i = 1, m.$$

Потребуем теперь необращения в ∞ решения $|\psi>$ при $x\to+\infty$ /т.е. $c_{2j-1}^+ = 0; \quad j = \overline{1,m}$)/. Это дает

$$\sum_{j=1}^{n} T_{\ell,2j}(\lambda) c_{2j}^+ = 0; \quad \ell = 2i; \quad i = \overline{1,m}. \qquad /30/$$

Чтобы у этой системы существовало нетривиальное решение, необходимо и достаточно выполнение

$$\det \tilde{T}(\lambda) = 0, \qquad /31/$$

где $\tilde{T}$- $n\times n$ - матрица системы /30/. Корни трансцендентного уравнения /31/ - дискретные собственные значения проблемы /23/, т.е. в области (V_{max}, V_{min}) мы имеем дискретный спектр. Если бы было $V_{min} < V_{max}$, то хотя бы одна асимптотика хотя бы у одной компоненты решения /23/ была бы осциллирующей, уравнений /20/ было бы на 1 меньше, чем неизвестных. Система /30/ при всех λ имела бы нетривиальные решения - спектр был бы всюду непрерывным.

Рассмотрим теперь задачу /23/ для более узкого класса операторов $(p = m)$:

$$\hat{L} = -I\frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}(x).$$

Потребуем ограниченности $\hat{V}(x)$:

$$|V_{ij}(x)| < c_{ij}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Рассмотрим функционал типа /19/:

$$J[y] \equiv \int <y|\hat{L}|y> dx .$$

Будем считать допустимые вектор-функции нормированными на единицу. Тогда из вида $\hat{L}$ и ограниченности $\hat{V}(x)$ следует, что функционал J ограничен снизу и неограничен сверху. Экстремализация его /которая приводит к проблеме Штурма-Лиувилля /23/ для оператора /32//, позволяет определить лишь минимум. Этот минимум равен наименьшему собственному значению λ_0, принадлежащему дискретному /нормируемому/ спектру /дискретный спектр, в силу предыдущей теоремы и вида оператора /32/, имеет право на существование и лежит в области $\lambda < V_{min}$ /.

4. НУЛЕВЫЕ МОДЫ. СПЕКТР ТЕСТОВОГО ОПЕРАТОРА

Оператор $\hat{H}$/20/ имеет следующую асимптотику при $|x|\to\infty$: $\hat{H} \to -I(d^2/dx^2 + \omega_1)$, т.е. $V_{min} = -\omega_1 = k^2$. Так как в данном случае $q=0$, то в условиях теоремы разд.3 значение V_{max} можно считать равным $(-\infty)$. Следовательно, дискретный спектр располагается в области $\lambda < k^2$.

Рассмотрим систему /15/ для случая тривиальных граничных условий $(s = n, \mu = 0)$. Обозначим $\sigma_i \equiv (\psi_i^o)^2$ - квадрат амплитуды i-й компоненты решения /21/. Пусть оператор D_{kj} имеет следующий вид:

$$D_{kj} \equiv \frac{\partial}{\partial\sigma_k} - \frac{\partial}{\partial\sigma_j} .$$

Применяя его к системе /15/, получим

$$\hat{H} D_{kj}|\psi> = 0,$$

т.е. $D_{kj}|\psi>$; $k,j=\overline{1,m}$ - нулевые моды оператора $\hat{H}$ /20/. Они связаны с "цветовой" $U(n,0)$ -инвариантностью исходной системы, поэтому будем называть их "цветными". Нетрудно получить явный вид "цветной" моды:

$$<\psi|D_{kj}=\{\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},\frac{1}{\psi_k^o},0,\ldots,0,\frac{-1}{\psi_j^o},\underbrace{0,\ldots,0}_{m-j}\}\cdot \mathrm{sch}(kx)\,. \qquad /32/$$

Рассмотрим в /32/ отдельно строку коэффициентов. В пространстве R_m система таких строк $(k,j=\overline{1,m})$ порождает ортогональное дополнение к строке, составленной из амплитуд решения - $\{\psi_1^o,\psi_2^o,\ldots,\psi_m^o\}$, т.е. линейное пространство размерности $m-1$. Последнее означает, что существует лишь $m-1$ независимая действительная "цветная" мода. Добавив к ним нулевую моду, связанную с трансляционной инвариантностью, получим m. Тем самым мы полностью учли симметрию системы.

Оператор $\hat{H}$ имеет также отрицательное собственное значение $\lambda_0=-3k^2$; соответствующая собственная функция $|y_0(x)>$ есть

$$<y_0(x)|=\{\psi_1^o,\psi_2^o,\ \ldots,\psi_m^o\}\cdot \mathrm{sch}^2(kx)\,. \qquad /33/$$

Отметим, что она неортогональна решению /21/.

Покажем, что оператор $\hat{H}$ не имеет других отрицательных собственных значений. Для этого приравняем к нулю все амплитуды решения $|\psi(x)>$, кроме ψ_i^o. Мы получим m обыкновенных уравнений Шредингера, которые легко решаются[10]. Из них $(m-1)$ уравнение будет иметь вид

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}-(\psi_i^o)^2\ \mathrm{sch}^2(kx)+\frac{1}{2}(\psi_i^o)^2\right)y=\lambda y\,, \qquad /34/$$

и одно уравнение будет вида

$$\left(-\frac{d}{dx^2}-3(\psi_i^o)^2\ \mathrm{sch}^2(kx)+\frac{1}{2}(\psi_i^o)^2\right)y=\lambda y\,. \qquad /35/$$

Уравнение /34/ имеет решения $\lambda_2=0$; $\lambda_3=k^2$, а уравнение /35/ - $\lambda_0=-3k^2$; $\lambda_1=0$; $\lambda_4=k^2$. В результате у нас есть одно отрицательное, m нулевых и m положительных собственных значений. Если бы оператор $\hat{H}$ имел еще одно собственное значение меньше нуля, то оно появилось бы в спектрах наших m уравнений /34/ и /35/. Действительно, чтобы стать положительным в спектрах /34/ и /35/, этому собственному значению при изменении амплитуд ψ_j^o пришлось бы /по теореме о непрерывной зависимости от параметра/ перейти через нуль. Это, однако, невозможно, т.к. набор нулевых мод мы исчерпали полностью.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ С ТРИВИАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Вернемся к функционалу δ^2F /19/ при $s=n$, $\mu=0$, т.е. рассмотрим решение /21/. Выше было показано, что непрерывный спектр тестового оператора $\hat{H}$ начинается правее нуля. Оператор $\hat{H}$ имеет единственное отрицательное собственное значение, и соответствующая собственная функция неортогональна решению. Следовательно, выполнены условия Q-теоремы Маханькова[2], которая констатирует устойчивость решения при выполнении

$$\frac{\partial}{\partial\omega_1}N_I<0\,. \qquad /36/$$

Применяя формулу /6/ и учитывая /10/-/11/, получаем

$$N_I=4\sqrt{-\omega_1}\,,$$

что означает выполнение /36/. Таким образом, решение /21/ Q-устойчиво по отношению к малым возмущениям при любых значениях параметров ψ_i^o.

6. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим теперь решение /9/ системы /4/ при константных краевых значениях вида /3/, т.е. $0<s<n$, $\mu\neq 0$. Покажем, что в этом случае вторая вариация F положительно неопределена даже на пространстве V.

Возьмем вариацию полевой вектор-функции, которая имеет следующий специальный вид:

$$\delta\tilde{\psi}_j(x)=\begin{cases}\alpha_j\,\mathrm{sch}(kx)\,\mathrm{th}(kx), & j=\overline{1,2s}\\ \alpha_j\,\mathrm{sch}^2(kx)\,, & j=\overline{2s+1,m}.\end{cases}$$

Очевидно, что $|\delta\tilde{\psi}(x)>$ ортогональна $|\psi(x)>$ и, следовательно, принадлежит V. С другой стороны, как можно непосредственно убедиться, для некоторого набора α_j выполняется

$$\hat{H}|\delta\tilde{\psi}(x)>=\tilde{\lambda}|\delta\tilde{\psi}(x)>\,,$$

где $\hat{H}$ - оператор /20/, а $\tilde{\lambda}=-k^2-2\sum\limits_{i=2s+1}^{m}(\psi_i^o)^2<0$.

Таким образом, функционал δ^2F принимает отрицательное значение на функции $|\delta\tilde{\psi}(x)>\in V$. Это означает, что решения /9/ при нетривиальных граничных условиях Q-неустойчивы к малым возмущениям при любых параметрах ψ_j^o.

В заключение автор хотел бы выразить свою глубокую благодарность проф. В.Г.Маханькову за предоставление темы и внимание к работе. Я чрезвычайно признателен Н.В.Махалдиани, Ю.П.Рыбакову, А.Кунду и, в особенности, О.К.Пашаеву за интересные обсуждения и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scharf G., Wreszinski W. Ann. of Phys., 1981, 134, p.56; Werle J. Acta Phys.Polon., 1981, B12, p. 601; Kuznetsov E.A., Falkovich G.E. Phys.Lett., 1981, A86, p. 203.
2. Makhankov V.G. Phys.Rep., 1978, 35, p. 1.
3. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys.Rev., 1976, D13, p. 2739.
4. Makhankov V.G., Pashaev O.K. JINR, E2-81-70, Dubna, 1981.
5. Linder U., Fedyanin V.K. Phys.Stat.Sol., 1978, B89, p.123. Lindner U., Fedyanin V.K. Phys.Stat.Sol., 1979, B95, p.83. Makhankov V.G., Makhaldiani N.V., Pashaev O.K. JINR, E2-80-233, Dubna, 1980. Makhankov V.G., Makhaldiani N.V., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1981, A81, p. 161.
6. Morris H.C. Journ. of Math.Phys., 1977, 18, p. 533.
7. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1973, 65, с. 505.
8. Кулиш П.П., Препринт ЛОМИ АН СССР, Р-3-79, Ленинград, 1979. Makhankov V.G., Pashaev O.K. JINR, E2-81-831, Dubna, 1981.
9. Orfanidis S.J. Phys.Lett., 1980, A75, p. 304.
10. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Издательство иностранной литературы, М., 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 мая 1982 года.

Барашенков И.В. Устойчивость "цветных" солитонов P2-82-376

В дополнение к известным солитонным решениям нелинейного уравнения Шредингера с "цветовой" группой симметрии $U(n,0)$ при тривиальных граничных условиях приводятся решения при неисчезающих условиях на бесконечности. Задача об энергетической Q-устойчивости решений обоих типов сводится к проблеме Штурма-Лиувилля для вспомогательного матричного оператора. Подробно рассматривается структура спектра таких операторов, действующих в пространстве вектор-функций. Для исследования спектра вспомогательного оператора существенным оказывается наличие "цветных" нулевых мод, т.е. мод, связанных с "цветовой" симметрией системы. Проведенное рассмотрение позволяет сделать заключение о возможности применения Q-теоремы, с помощью которой доказывается устойчивость солитонов с тривиальными граничными условиями для любых значений параметров. Показана неустойчивость решений с константными краевыми условиями также для любых допустимых начальных данных.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Barashenkov I.V. On "Coloured" Solitons Stability P2-82-376

In addition to soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation with $U(n,0)$ "colour" symmetry under the vanishing boundary conditions solutions under the nonvanishing ones are found. The energetical Q-stability investigation for both of them is reduced to the eigenvalue problem for an auxiliary matrix operator. To examine its spectrum the presence of "coloured" zero modes (i.e. generated by the "colour" symmetry) appears rather essential. The consideration carried out permits to draw a conclusion as to the applicability of the Q-theorem. With its help the stability of solitons is proved under the vanishing boundary conditions with arbitrarily chosen parameter magnitudes. Instability of solutions which are constants at both infinities is also shown for any allowable initial values.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.