

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

2482/82

31/1-82

P2-82-35

В.А.Касчиева, М.С.Касчиев, Ю.В.Катышев,  
Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков, И.В.Пузынин.

РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
ЯНГА-МИЛЛСА С ВНЕШНИМИ ИСТОЧНИКАМИ.  
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ЦЕНТРОВ

1982

Калибровочные поля лежат в основе современной теории элементарных частиц<sup>/1/</sup>. Квантованные калибровочные поля с неабелевой группой симметрии привлекательны тем, что константа связи на малых расстояниях /0,1 Фм/ мала, и применима стандартная теория возмущений<sup>/2/</sup>. Теория в этой области находится в согласии с экспериментом<sup>/3/</sup>. На больших расстояниях /1 Фм/ константа связи велика, и необходим выход за рамки теории возмущения<sup>/4/</sup>. Трудности теории в этой области оправдывают рассмотрение двумерных<sup>/5/</sup> и трехмерных<sup>/6/</sup> моделей калибровочных полей. На данном этапе представляет интерес также исследование решений уравнений калибровочных полей на классическом уровне<sup>/7/</sup>.

В данной работе мы исследуем решения уравнений калибровочных полей Янга-Миллса<sup>/8/</sup> с внешними источниками. Во второй части работы приводится доказательство несуществования локализованных статических решений в отсутствие источников, получены необходимые условия существования регулярных решений с конечной энергией в присутствии источников. В третьей части на примере модели взаимодействующих скалярных и спинорных полей поясняется суть приближения внешнего источника. Показано, что массивное обобщение модели Гросса-Невиу<sup>/9/</sup> в нерелятивистском приближении приводит к векторному обобщению<sup>/10/</sup> нелинейного уравнения Шредингера, а трехмерный аналог модели Гросса-Невиу - к модели, обсуждаемой в работе<sup>/11/</sup>. В четвертой части рассмотрены уравнения Янга-Миллса с внешними источниками. Строятся решения по теории возмущений. Для частного вида внешнего источника уравнения Янга-Миллса сведены к уравнениям нелинейной задачи двух центров. Показано, что к этой же задаче двух центров приводят уравнения скалярной электродинамики с внешними источниками<sup>/12/</sup>. В пятой части приводятся алгоритм и результаты численного решения нелинейной задачи двух центров. В заключении обобщаются результаты данной работы и намечаются направления дальнейших исследований.

2. Поля Янга-Миллса /ЯМ/ задаются лагранжианом

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(A, \partial A), \quad /1/$$

$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$  - плотность лагранжиана;  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  - тензор напряжения;  $g$  - безразмерный параметр-константа связи;  $f^{abc}$  - структурные константы неабелевой группы симметрии модели /1/,  $SU(N)$ , задаваемой алгеброй

ОБЩЕУЧЕБНАЯ БИБЛИОТЕКА

С. У. Ч. 1. 1978

БИБЛИОТЕКА

генераторов группы,  $T^a$

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c;$$

$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ,  $x_\mu$  - координаты /псевдо/эвклидова четырехмерного пространства-времени;  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ;  $x_4 = ix_0 = it$ ;  $i, j, k = 1, 2, 3$ ;  $a = 1, \dots, N^2 - 1$  - индекс внутреннего, изотопического, цветного пространства;  $A_\mu^a$  - потенциал калибровочного поля.

Пространственные индексы располагаются внизу, изотопические - сверху; при повторяющихся индексах подразумевается суммирование. Модели /1/ соответствует функционал энергии

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x [(B_i^a)^2 + (E_i^a)^2], \quad /2/$$

где

$$E_i^a \equiv F_{0i}^a, \quad B_i^a \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a,$$

$\epsilon_{ijk}$  - антисимметричный тензор,  $\epsilon_{123} = 1$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ .  
Уравнения ЯМ

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}^a + gf^{abc} A_\mu^b F_{\mu\nu}^c = 0. \quad /3/$$

представляют собой условия экстремальности функционала /1/.  
Имеет место /см./, например /13/ / следующая

Теорема. Уравнения ЯМ не имеют стационарных решений с конечной энергией.

Доказательство этого утверждения проведем от обратного.  
Пусть имеются не зависящие от времени решения уравнения /3/,  $A_\mu^a \neq A_\mu^a(t)$ , на которых функционал /2/ ограничен. Рассмотрим двухпараметрический класс функций

$$A_0^a(\vec{x}; \eta, \lambda) = \eta \lambda A_0^a(\lambda \vec{x}), \quad /4/$$

$$A_i^a(\vec{x}; \lambda) = \lambda A_i^a(\lambda \vec{x}),$$

в котором содержится рассматриваемое решение - элемент с  $\eta = \lambda = 1$ .  
На функциях /4/ функционал /1/ принимает значение

$$L(\eta, \lambda) = \lambda^{4-D} L_1 - \eta^2 \lambda^{4-D} L_2, \quad /5/$$

где

$$L_1 = \frac{1}{2} \int d^Dx (B_i^a)^2,$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \int d^Dx (E_i^a)^2.$$

Заметим, что функционал /2/ имеет вид

$$H = L_1 + L_2,$$

и из ограниченности H следует ограниченность  $L_1$  и  $L_2$  по отдельности. Функционал L должен принимать экстремальное значение на решениях, в частности, на классе функции /4/. Из выражения /5/ следует

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} \Big|_{\eta = \lambda = 1} = 2L_2 = 0, \quad /6/$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{\eta = \lambda = 1} = (4-D)(L_1 - L_2) = 0.$$

В интересующем нас случае  $D=3$ , из /6/ имеем

$$L_1 = L_2 = 0$$

или

$$E_i^a = B_i^a = 0.$$

Следовательно, с точностью калибровочной свободы получаем тривиальное решение  $A_\mu^a = 0$ . Теорема доказана. Заметим, что мы доказали несколько более общее утверждение, чем требовалось для нашей цели - отсутствие стационарных решений уравнений ЯМ с конечной энергией при  $D \neq 4$ . Проведенное рассуждение не запрещает существования решений при  $D=4$ , в действительности такие решения с конечным действием, инстантоны, существуют /14/

Простой способ обойти трудность, заключающуюся в утверждении теоремы, состоит во введении внешнего источника, взаимодействующего с полем ЯМ. Плотность лагранжиана полей ЯМ с внешними источниками имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + J_\mu^a A_\mu^a. \quad /7/$$

где  $J_\mu^a$ , внешний источник ЯМ поля, - заданная функция. Лагранжиан имеет вид

$$L = L_1 - L_2 + L_3 - L_4, \quad /8/$$

где

$$L_3 = \int d^Dx J_i^a A_i^a,$$

$$L_4 = \int d^Dx J_0^a A_0^a.$$

На классе функций /4/ функционал /8/ принимает значения

$$L = \lambda^{4-D} L_1 - \eta^2 \lambda^{4-D} L_2 + \lambda^{1-D} L_3(\lambda) - \eta \lambda^{1-D} L_4(\lambda), \quad /9/$$

где

$$L_3(\lambda) = \int d^D x J_i^a \left( \frac{\vec{x}}{\lambda} \right) A_i^a(\vec{x}),$$

$$L_4(\lambda) = \int d^D x J_0^a \left( \frac{\vec{x}}{\lambda} \right) A_0^a(\vec{x}). \quad /10/$$

Условие экстремальности /9/ имеет вид

$$2L_2 + L_4 = 0,$$

$$(4-D)(L_1 - L_2) = \quad /11/$$

$$(1-D)(L_4 - L_3) + L'_4 - L'_3.$$

где

$$L'_3 = \int d^D x \frac{d}{d\lambda} J_i^a \left( \frac{\vec{x}}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=1} A_i^a(\vec{x}),$$

$$L'_4 = \int d^D x \frac{d}{d\lambda} J_0^a \left( \frac{\vec{x}}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=1} A_0^a(\vec{x}). \quad /12/$$

В случае  $D=1$  и  $D=4$  условия /11/ принимают более простой вид. Из положительной определенности  $L_2$  следует  $L_4 < 0$ , откуда для знакоопределенного источника решение  $A_0^a$  должно иметь нули, либо иметь противоположный к источнику знак. Полученные необходимые условия, вообще говоря, не запрещают существования стационарных решений уравнений ЯМ с конечной энергией при наличии внешних источников. Ниже мы конструктивно докажем существование таких решений.

3. Выясним характер приближения внешнего источника. Классическая хромодинамика /КХД/ задается плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{\Psi}_j^a (i \not{D}^{\alpha\beta} - m_j \delta^{\alpha\beta}) \Psi_j^{\beta}, \quad /13/$$

где  $\Psi_j^a$  (спинорное поле из фундаментального представления группы  $SU(N)$ ) - кварковые степени свободы;  $A_\mu^a$  - глюонное поле;

$\not{D}^{\alpha\beta} = \gamma_\mu (\partial_\mu \delta^{\alpha\beta} - ig(T^Y)^{\alpha\beta} A_\mu^Y)$ ;  $j=1, \dots, M$  - число аромата;  $a, \beta=1, \dots, N$  - число цвета; стандартно  $M=2 \div 6$ ,  $N=2, 3$ .

Из /13/ видно, что источником для поля глюонов служит кварковое поле материи. Взаимодействие между глюонами и кварками задается слагаемым

$$g A_\mu^a J_\mu^a, \quad /14/$$

где  $J_\mu^a = \bar{\Psi}_j^a \gamma_\mu (T^a)^{\alpha\beta} \Psi_j^{\beta}$  - кварковый ток.

Пусть уравнения движения модели /13/ имеют некоторое решение  $(\Psi, A)$ . Вычислив значение кваркового тока /14/ на этом решении для модели /7/, очевидно, получим решение  $A$ . Дело в том, что трудно найти решение уравнений модели /13/. Приближение внешнего тока к этой модели заключается в том, что рассматривается некоторое правдоподобное выражение для источника /14/ и далее решаются уравнения более простой модели /7/. В качестве внешних источников, как правило, рассматривают несколько неподвижных центров, что интуитивно соответствует наличию тяжелых кварков, на которых обратным действием поля  $A$  можно пренебречь. В качестве следующего шага можно учесть медленное, нерелятивистское движение источников. Заметим, что спектр масс тяжелых мезонов удовлетворительно описывается нерелятивистской квантовой механикой и наивной кварковой моделью /15/. Проиллюстрируем вышесказанное на примере относительно простой модели кварков, взаимодействующих посредством нейтрального массивного скалярного поля, задаваемой плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_j (i \not{\partial} - M) \Psi_j + \frac{1}{2} \Phi (\square - m^2) \Phi + g \bar{\Psi}_j \Psi_j \Phi. \quad /15/$$

Заметим, что зависимость от  $\Phi$  в модели /15/ квадратичная, поэтому с помощью уравнений движения можно исключить поле  $\Phi$ . Получаем модель кварков с нелокальным взаимодействием

$$L = \int d^D x \bar{\Psi}_j (i \not{\partial} - M) \Psi_j - \frac{g^2}{2} \int dx dy \rho(x) V(x-y) \rho(y), \quad /16/$$

где

$$\rho(x) = \bar{\Psi}_j \Psi_j(x),$$

$$V(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^{D+1}} \int d^{D+1} p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2}$$

$$= (\square - m^2)^{-1} \delta^{D+1}(x-y).$$

Для простоты рассмотрим локальное приближение для парного потенциала

$$V(x-y) \approx \frac{-1}{m^2} \delta^{D+1}(x-y). \quad /17/$$

В приближении /17/ кварки описываются уравнением движения

$$(i \not{\partial} - M) \Psi_j + \frac{g^2}{m^2} \Psi_j(x) (\bar{\Psi}_k \Psi_k) = 0. \quad /18/$$

Подействуем на /18/ слева оператором  $i\partial + M$ , получим

$$\begin{aligned} & (-\partial^2 - M^2) \Psi + \frac{g^2}{m^2} (i\partial - M + 2M) \Psi (\bar{\Psi} \Psi) \\ & = (-\partial^2 - M^2) \Psi + 2M \frac{g^2}{m^2} \Psi (\bar{\Psi} \Psi) \\ & - \left(\frac{g^2}{m^2}\right)^2 \Psi (\bar{\Psi} \Psi)^2 + \frac{g^2}{m^2} i \gamma_\mu \Psi \partial_\mu (\bar{\Psi} \Psi) = 0. \end{aligned} \quad /19/$$

Будем искать решения /19/ в виде

$$\Psi_j(x, t) = e^{-iMt} \Phi_j(x, t),$$

где  $\Phi$  - медленно меняющаяся функция  $t$ . Имеем

$$\begin{aligned} & 2iM \Phi_t + \Delta \Phi + 2M \frac{g^2}{m^2} \Phi (\bar{\Phi} \Phi) \\ & - \left(\frac{g^2}{m^2}\right)^2 \Phi (\bar{\Phi} \Phi)^2 + \frac{g^2}{m^2} i \gamma_\mu \Phi \partial_\mu (\bar{\Phi} \Phi) - \Phi_{tt} = 0, \end{aligned} \quad /20/$$

или, перейдя к переменной  $z = \sqrt{2M} x$ , получим

$$i \Phi_t + \Delta \Phi + 2\kappa^2 \Phi (\bar{\Phi} \Phi) - 3\eta^2 \Phi (\bar{\Phi} \Phi)^2 = 0, \quad /21/$$

где

$$2\kappa^2 = \frac{g^2}{m^2}, \quad 3\eta^2 = \frac{1}{2M} \left(\frac{g^2}{m^2}\right)^2$$

При получении /21/ мы, рассматривая решения, медленно меняющиеся с  $z$ , но с большой амплитудой, пренебрегли двумя последними слагаемыми в /20/. Уравнение /21/ получено в работе /11/ в зависимости от времени приближении Хартри-Фока и описывает динамику  $\alpha$ -частиц. Условия существования многомерных солитонных решений уравнения /21/ рассмотрены ранее в работах /16/. При малых  $\eta$  плоские решения уравнения /21/ описываются нелинейным векторным уравнением Шредингера /10/

$$i \Phi_t + \Phi_{zz} + 2\kappa^2 \Phi (\bar{\Phi} \Phi) = 0. \quad /22/$$

В случае  $N=1$  уравнение /22/ принимает вид

$$\begin{aligned} & i u_t + u_{zz} + 2\kappa^2 (|u|^2 - |v|^2) u = 0, \\ & i v_t + v_{zz} + 2\kappa^2 (|u|^2 - |v|^2) v = 0. \end{aligned} \quad /23/$$

Система уравнений /23/ имеет солитонное решение вида  $v=0$ ,

$$u = \frac{\omega}{\kappa} \exp(i\omega^2 t + \frac{V}{2}(z - \frac{V}{2}t)) \cdot \text{sech}(\omega(z - Vt)). \quad /24/$$

При этом со сделанными приближениями согласуется значение параметров,  $\omega, \kappa \sim 1$ . В статическом случае,  $V=0$ , решение локализовано в пространстве, с полушириной  $\sim 1/\sqrt{M}$ . Суперпозиция нескольких, достаточно удаленных друг от друга решений /24/ представляет собой многосолитонное решение системы /23/. С помощью этих решений можно вычислить кварковый источник скалярного поля модели /15/. Из приведенного рассуждения виден характер приближения внешнего источника, при этом внешние источники определяются солитонными, локализованными решениями исходной модели.

4. Рассмотрим уравнения ЯМ с внешними источниками. Некоторые выкладки удобно проводить в матричном представлении. Для простоты в качестве группы симметрии выберем группу  $SU(2)$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} & \equiv T^a F_{\mu\nu}^a, & A_\mu & \equiv T^a A_\mu^a, \\ J_\mu & \equiv T^a J_\mu^a, & T^a & = \frac{g\sigma^a}{2i}, \end{aligned} \quad /25/$$

где  $\sigma^a$  - матрицы Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^a \sigma^b) = \delta^{ab} = \begin{cases} 1, & a=b \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

$$\left[ \frac{\sigma^a}{2i}, \frac{\sigma^b}{2i} \right] = \epsilon^{abc} \frac{\sigma^c}{2i}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} & = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = \\ & = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \end{aligned} \quad /26/$$

Уравнение /3/ с внешним источником в матричной форме имеет вид

$$D_\mu F_{\mu\nu} = J_\nu, \quad /27/$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \quad].$$

Из уравнений /27/ и антисимметричности тензора напряжения - кривизны  $F_{\mu\nu}$ , /26/,  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ , следует сохранение тока

$$D_\mu J_\mu = 0, \quad /28/$$

или в векторной форме

$$\partial_{\mu} J_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b J_{\mu}^c = 0.$$

В случае стационарного источника, в отсутствие векторной части тока,  $J_i = 0$ , /28/ принимает вид

$$[A^0, \rho] = 0$$

или

$$f^{abc} A_0^b \rho^c = 0, \quad /29/$$

где

$$\rho \equiv J_0, \quad \rho_t = 0.$$

Уравнение /27/ калибровочно ковариантно: если  $(A_{\mu}, J_{\mu})$  является решением, то величины  $A'_{\mu}, J'_{\mu}$ , где

$$A'_{\mu} = \Omega^{-1} A_{\mu} \Omega + \Omega^{-1} \partial_{\mu} \Omega, \quad /30/$$

$$J'_{\mu} = \Omega^{-1} J_{\mu} \Omega, \quad \Omega \in SU(2),$$

тоже решение.

С помощью преобразования /30/ можно произвольно заданный источник  $\rho$  повернуть в изотопическом пространстве в нужном направлении, скажем, направить вдоль третьей оси

$$\rho^a = \delta^{a3} \rho \quad /31/$$

или

$$\rho = \frac{g\sigma^3}{2i} q.$$

Лагранжиан и энергия в матричной записи имеют вид

$$L = -\frac{1}{2g^2} \int d^3x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J_{\mu} A_{\mu}),$$

$$H = -\frac{1}{g^2} \int d^3x \operatorname{tr} (E_i^2 + B_i^2),$$

где

$$E_i = \frac{g\sigma^a}{2i} E_i^a, \quad B_i = \frac{g\sigma^a}{2i} B_i^a.$$

В статическом случае уравнения движения /27/, /3/ принимают вид

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a + g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^a + g f^{abc} \vec{A}^b \times \vec{B}^c = \vec{J}^a - g f^{abc} A_0^b \vec{E}^c, \quad /32/$$

где

$$\vec{E}_i^a = F_{0i}^a = -\nabla_i A_0^a + g f^{abc} A_0^b A_i^c,$$

$$\vec{B}_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a = (\nabla \times \vec{A}^a)_i + g f^{abc} \frac{1}{2} (\vec{A}^b \times \vec{A}^c)_i.$$

В случае абелевой группы симметрии,  $U(1)$ , т.е. для обычной электродинамики, состоянию с минимальной энергией соответствует кулоновское решение уравнений движения. Действительно, функционал энергии электромагнитного поля имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (E_{\perp}^2 + B^2) + \frac{1}{2} \int d^3x (E_{\parallel}^2). \quad /33/$$

Продольная компонента электрической напряженности,  $E_{\parallel}$ , определяется условием связи

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla E_{\parallel} = \rho,$$

$$\vec{E}_{\parallel} = -\vec{\nabla} A_0,$$

откуда следует

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \rho. \quad /34/$$

С учетом /34/ формула /33/ принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{E}_{\perp}^2 + B^2) - \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3x' \frac{\rho(x)\rho(x')}{|x-x'|}, \quad /35/$$

откуда заключаем, что при фиксированных источниках минимум энергии достигается при  $\vec{E}_{\perp} = \vec{B} = 0$  и равняется кулоновской энергии внешних источников

$$H_c = -\frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3x' \frac{\rho(x)\rho(x')}{|x-x'|}. \quad /36/$$

В неабелевой теории кулоновское решение имеет вид

$$\vec{A}^a = 0, \quad A_0^{1,2} = 0, \quad A_0^3 = -\frac{1}{\nabla^2} q. \quad /37/$$

Энергия решения /37/ определяется формулой /36/, однако, в отличие от абелева случая, кулоновское решение /37/ не имеет наименьшей энергии /7/. Построим решение уравнения /32/ по теории возмущений. Пусть источник характеризуется параметром малости  $\kappa$ . В отсутствие источника решению с конечной энергией соответствует  $E=B=H=0$ . Такое решение можно задавать тривиальным потенциалом  $A_{\mu} = 0$  или калибровочным потенциалом  $A_{\mu} = \Omega^{-1} \partial_{\mu} \Omega$ . Ищем решение уравнения /32/ в виде

$$A_{\mu} = \sum_{n \geq 1} \kappa^n A_{\mu}^{(n)},$$

$$\vec{E} = \sum_{n \geq 1} \kappa^n \vec{E}^{(n)}, \quad \vec{B} = \sum_{n \geq 1} \kappa^n \vec{B}^{(n)}. \quad /38/$$

Подставив /38/ в уравнение /32/, в первом порядке по  $\kappa$  имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E^{a(1)} &= \rho^{a(1)}, & E^{a(1)} &= -\nabla A_0^{a(1)} \\ \nabla \times B^{a(1)} &= J^{a(1)}, & B^{a(1)} &= \nabla \times A^{a(1)}. \end{aligned} \quad /39/$$

Решение уравнений /39/ имеет вид

$$\begin{aligned} A_0^{a(1)} &= -\frac{1}{\nabla^2} \rho^{a(1)}, & E^{a(1)} &= \nabla \frac{1}{\nabla^2} \rho^{a(1)}, \\ A^{a(1)} &= -\frac{1}{\nabla^2} J^{a(1)}, & B^{a(1)} &= -\nabla \times \frac{1}{\nabla^2} J^{a(1)}. \end{aligned} \quad /40/$$

При получении /40/ мы воспользовались калибровкой

$$\nabla \cdot A = 0 \quad /41/$$

или  $\nabla J^{(1)} = 0$ , что имеет место, если  $J^{(1)} = \nabla \times M$ , где  $M$  - магнитный момент источника.

Во втором порядке по  $\kappa$  получим

$$\begin{aligned} \nabla E^{a(2)} + g f^{abc} A^{b(1)} E^{c(1)} &= 0, \\ \nabla \times B^{a(2)} + g f^{abc} A^{b(1)} \times B^{c(1)} &= -g f^{abc} A_0^{b(1)} E^{c(1)}, \\ E^{a(2)} &= -\nabla A_0^{a(2)} + g f^{abc} A_0^{b(1)} A^{c(1)}, \\ B^{a(2)} &= \nabla \times A^{a(2)} + \frac{1}{2} g f^{abc} A^{b(1)} \times A^{c(1)}. \end{aligned} \quad /42/$$

Решение уравнений /42/ имеет вид

$$\begin{aligned} A_0^{a(2)} &= -\frac{1}{\nabla^2} \rho^{a(2)}, & E^{a(2)} &= \nabla \frac{1}{\nabla^2} \rho^{a(2)} + g f^{abc} A_0^{b(1)} A^{c(1)}, \\ A^{a(2)} &= -\frac{1}{\nabla^2} J^{a(2)}, & E^{a(2)} &= -\nabla \times \frac{1}{\nabla^2} J^{a(2)} + \frac{1}{2} g f^{abc} A^{b(1)} \times A^{c(1)}, \end{aligned} \quad /43/$$

где

$$\begin{aligned} \rho^{a(2)} &= 2g f^{abc} E^{b(1)} A^{c(1)}, \\ J^{a(2)} &= g f^{abc} [(A^{b(1)} \nabla) A^{c(1)} - A^{b(1)} \times E^{c(1)} - A_0^{b(1)} E^{c(1)}]. \end{aligned}$$

При получении решений /43/ мы воспользовались условием /41/

$$\nabla \cdot A^{a(2)} = 0,$$

или

$$\nabla J^{a(2)} = 0,$$

в соблюдении которого нетрудно убедиться:

$$\nabla \cdot J^{a(2)} = -g f^{abc} (A_0^b \rho^{c(1)} - A^b J^{c(1)}) = -(\nabla_\mu J_\mu^a)^a = 0.$$

Аналогичным образом можно определить дальнейшие члены разложения /38/. В случае, когда все четыре компоненты  $J_\mu^a$  в изопространстве параллельны, скажем,  $J_\mu^a = \delta^{a3} J_\mu$ , задача сводится к абелевому случаю. В разложении /38/ отличны от нуля только первые члены. Действительно, из решения /43/ видно  $\rho^{a(2)} = J^{a(2)} = 0$ , так как  $A^{(1)}$ ,  $E^{(1)}$  и  $B^{(1)}$  параллельны в изопространстве, найденное по теории возмущений решение сводится к кулоновскому.

5. Исследуем решения /32/, соответствующие внешнему источнику, состоящему из двух статических источников с цветными зарядом и магнитным моментом. Пусть источники с равным по величине и с противоположным по знаку зарядом расположены на оси  $z$  в точках  $z = \pm d$ . Пусть заряд направлен вдоль первой оси в изопространстве  $Q^a = \delta^{a1} Q$ . Заметим, что относительная ориентация источников не является калибровочно-инвариантной характеристикой, поэтому, решив уравнения с заданной конфигурацией источников, получим класс калибровочно связанных преобразованием /30/ решений. Если магнитные моменты источников параллельны зарядам, то имеем кулоновское решение,  $A_\mu^a = \delta^{a1} A_\mu$ . В общем случае магнитные моменты и заряды источников не параллельны. Пусть магнитные моменты направлены вдоль второй оси,  $M^a = \delta^{a2} M$ . Подстановка

$$\begin{aligned} A_0^a &= \delta^{a1} A_0, \\ A_i^a &= \delta^{a2} A_i, \end{aligned} \quad /44/$$

согласуется с сохранением тока, /28/, кварковые источники имеют вид

$$\begin{aligned} J_0^a &= \delta^{a1} \rho, \\ J^a &= \delta^{a2} \nabla \times M \equiv \delta^{a2} J. \end{aligned} \quad /45/$$

По формулам /32/, /44/, /45/ имеем

$$\begin{aligned} E^a &= -\nabla A_0 \delta^{a1} + g A_0 A \delta^{a3}, \\ B^a &= \nabla \times A \delta^{a2}, \\ -\Delta A_0 \delta^{a1} + 2g(A \nabla) A_0 \delta^{a3} &= (\rho - g^2 A_0 A^2) \delta^{a1}, \\ -\Delta A \delta^{a2} &= (J + g^2 A A^2) \delta^{a2}, \end{aligned} \quad /46/$$

или

$$\begin{aligned} -\Delta A_0 &= \rho - g^2 A_0 A^2, \\ -\Delta A &= J + g^2 A A_0^2, \\ g(A \nabla) A_0 &= 0. \end{aligned} \quad /47/$$

Из системы уравнений /47/ в пределе  $g \rightarrow 0$ , следуют уравнения электро- и магнитостатики. Из первого уравнения /47/ следует, что полный цветной заряд - заряд внешних источников плюс заряд глюонного поля - равняется нулю для достаточно быстро убывающих на бесконечности решений. В случае отсутствия источников имеем

$$\int d^3x ((\nabla A_0)^2 + (\nabla A)^2) = 0,$$

откуда, потребовав от решений затухание на бесконечности, получаем  $A_0 = A = 0$ . Из первого уравнения /47/ имеем

$$\int d^3x ((\nabla A_0)^2 + g^2 A_0^2 A^2) = \int d^3x A_0 \rho,$$

откуда при  $\rho = 0$  следует  $A_0 = 0$ , и второе уравнение /47/ имеет вид линейного уравнения магнитостатики с решением кулоновского типа. При  $J = 0$ , напротив, могут существовать некулоновские решения  $(A_0, A)$ . Условие кулоновской калибровки, /41/, и третье уравнение системы /47/ удовлетворяются подстановкой

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_z = 0, \quad A_\phi \neq 0, \\ A_0 &= A_0(z, \rho), \\ A_\phi &= A_\phi(z, \rho) \equiv A \end{aligned} \quad /49/$$

при  $J_\rho = J_z = 0$ ,  $J_\phi = J_\phi(z, \rho) \equiv J$ . Уравнения движения /47/ для величин  $A_0$  и  $A$  принимают вид

$$\begin{aligned} -\Delta A_0 &= \rho - g^2 A_0 A^2, \\ -\Delta A &= J + g^2 A A_0^2. \end{aligned} \quad /50/$$

Заметим, что система уравнений /50/ получается в скалярной электродинамике /12/ задаваемой плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \phi^* D_\mu^2 \phi - J_\mu A_\mu + J\phi, \quad /51/$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  
 $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ .

Уравнения движения модели /51/ имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} &= J_\nu + j_\nu, \\ D_\mu^2 \phi &= J, \end{aligned} \quad /52/$$

где

$$\begin{aligned} j_\nu &= ie(\phi^* D_\mu \phi - \phi (D_\mu \phi)^*) \\ &= ie(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) + 2e^2 A_\mu |\phi|^2. \end{aligned}$$

Уравнения /52/ имеют статические решения вида

$$\vec{J} = 0, \quad \vec{A} = 0, \quad A_0 \neq A(t), \quad \Phi \neq \Phi(t). \quad /53/$$

При этом уравнения, определяющие  $\Phi$  и  $A_0$ , проще получить подстановкой условий /53/ в /51/. Имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2 + \phi^* \Delta \phi + e^2 A_0^2 |\Phi|^2 - \rho A_0 + J\phi. \quad /54/$$

Из плотности лагранжиана /54/ получим уравнения

$$\begin{aligned} -\Delta A_0 &= \rho - 2e^2 A_0 |\phi|^2, \\ -\Delta \phi &= J + e^2 \phi A_0^2. \end{aligned} \quad /55/$$

После замены переменных

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow 1/\sqrt{2} A, \\ J &\rightarrow 1/\sqrt{2} J \end{aligned}$$

получим систему /50/. При этом магнитному потенциалу калибровочного поля соответствует комплексное скалярное поле модели /51/.

В матричной записи уравнение /50/ имеет вид

$$M\Psi \equiv -\Delta\Psi + U\Psi - I = 0, \quad /56/$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} A_0 \\ A \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}, \\ I &\equiv \begin{pmatrix} \rho \\ J \end{pmatrix}, \quad U = g^2 \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & -A_0^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решения  $A_0$  и  $A$  имеют свойства симметрии

$$\begin{aligned} A_0(-z) &= -A_0(z), \\ A(-z) &= \epsilon A(z), \end{aligned} \quad /57/$$



где  $\epsilon = \pm 1$ , в зависимости от четности  $J$ . Плотность заряда  $\rho$  - нечетная функция.

В матричной записи условия /57/ имеют вид

$$\Psi(-z) = \sigma \Psi(z),$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Построим решение уравнений /56/ по теории возмущений. Для этого удобно перейти к новой зависимой переменной

$$\Phi = g\Psi,$$

которая удовлетворяет уравнению

$$-\Delta\Phi + U\Phi = gI, \quad /58/$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \Phi^2 & 0 \\ 0 & -\Phi_0^2 \end{pmatrix}.$$

Решение /58/ ищем в виде

$$\Phi = \sum_{n \geq 0} g^n \Phi_n. \quad /59/$$

Подставив /59/ в /58/, получим

$$-\Delta\Phi_1 = I,$$

$$-\Delta\Phi_3 + U_2\Phi_1 = 0,$$

$$-\Delta\Phi_5 + U_2\Phi_3 = 0, \quad /60/$$

$$-\Delta\Phi_7 + U_6\Phi_1 + U_2\Phi_5 = 0$$

$$\vdots$$

$$\Phi_0 = \Phi_2 = \Phi_4 = \dots = 0.$$

Бесконечная система линейных уравнений /60/ имеет единственное, убывающее на бесконечности, решение. Вопрос сходимости ряда /59/ проще исследовать на скалярном аналоге уравнения /58/

$$-\Delta\Phi + \Phi^3 = gI. \quad /61/$$

При этом решению вида /59/ соответствует система линейных уравнений

$$-\Delta\Phi_1 = I,$$

$$-\Delta\Phi_3 + \Phi_1^3 = 0,$$

$$-\Delta\Phi_5 + 3\Phi_1^2\Phi_3 = 0,$$

$$-\Delta\Phi_7 + 3\Phi_3^2\Phi_1 + 3\Phi_1^2\Phi_5 = 0,$$

$$\vdots$$

$$\Phi_0 = \Phi_2 = \Phi_4 = \dots = 0. \quad /62/$$

Система уравнений /62/ в классе достаточно быстро убывающих функций имеет, аналогично системе /60/, единственное решение. Характер сходимости ряда /59/ для решения уравнений /61/, /58/ исследуется нами в другой работе.

Уравнение движения /50/ вытекает из экстремальности функционала

$$L = \int \left( \frac{1}{2} (\nabla \cdot A_0)^2 + \frac{1}{2} g^2 A_0^2 A^2 - \frac{1}{2} (\nabla \cdot A)^2 - \rho A_0 + JA \right) dx^3 \quad /63/$$

$$= \int \left( \frac{1}{2} (E_i^a)^2 - \frac{1}{2} (B_i^a)^2 - A_\mu^a J_\mu^a \right) d^3x$$

$$= \int \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - A_\mu^a J_\mu^a \right) d^3x.$$

где  $E, B$  и  $J$  определены соответственно по формулам /46/, /45/. Расположение внешних источников допускает вращательную симметрию вокруг  $z$ -оси. Поэтому удобно работать в сферической системе координат /18/

$$\zeta = \frac{r_1 + r_2}{R}, \quad \eta = \frac{r_1 - r_2}{R}, \quad /64/$$

с областью определения  $\Omega = \{1 \leq \zeta < \infty, -1 \leq \eta \leq 1\}$ , где  $r_1$  и  $r_2$  - соответственно расстояние от рассматриваемой точки до первого и второго источника, расположенных в точках  $z = \pm R/2, x=y=0$ . Лапласиан в представлении /64/ имеет вид

$$\Delta = \frac{4}{R^2(\zeta^2 - \eta^2)} \{ \partial_\zeta(\zeta^2 - 1) \partial_\zeta + \partial_\eta(1 - \eta^2) \partial_\eta \}. \quad /65/$$

На решения  $\Psi$  уравнения /56/ наложим граничные условия

$$(\zeta^2 - 1)\Psi_\zeta = 0, \quad (1 - \eta^2)\Psi_\eta = 0,$$

$$\zeta \rightarrow 1+0 \quad \eta \rightarrow -1+0, \quad /66/$$

$$U(\zeta = L, \eta; R) = 0, \quad L \gg 1.$$

Источники выберем в виде

$$\rho = \frac{\kappa}{8\pi} (e^{-r_1} - e^{-r_2}) = \frac{\kappa}{8\pi} (e^{-d(\zeta+\eta)} - e^{-d(\zeta-\eta)})$$

$$= -\frac{\kappa}{4\pi} e^{-d\zeta} \operatorname{sh}(d\eta), \quad /67/$$

$$J = \frac{m}{8\pi} \left( \frac{\rho}{r_1} e^{-r_1} - \epsilon \frac{\rho}{r_2} e^{-r_2} \right)$$

$$= \frac{m}{8\pi} \sqrt{\zeta^2 + \eta^2 - \zeta^2 \eta^2 - 1} \frac{e^{-d\zeta}}{\zeta^2 - \eta^2} [(\zeta - \eta) e^{-d\eta} - \epsilon (\zeta + \eta) e^{d\eta}],$$

$$\epsilon = \pm 1, \quad d = R/2.$$

Решения уравнения /56/ с источниками /67/ зависят от параметров  $R, g, m$  и  $\kappa$ . Для энергии калибровочного поля имеем выражение

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2) = \frac{1}{2} \int d^3x ((\nabla \cdot A_0)^2 + (\nabla \cdot A)^2 + g^2 A_0^2 A^2)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x (\rho A_0 + JA + g^2 A_0^2 A^2). \quad /68/$$

К численному решению задачи /56/ при условиях /66/ естественно применить непрерывный аналог метода Ньютона /НАМН/, предложенный в работе Гавурина<sup>/19/</sup>. Этот метод успешно использовался при решении задач магнитостатики<sup>/20/</sup>, квантовой механики<sup>/21/</sup> ряда обратных задач для уравнения Штурма-Лиувилля и теории рассеяния<sup>/22,23/</sup> и др. Согласно<sup>/19/</sup> вводится непрерывный параметр  $t, 0 \leq t < \infty$  и рассматривается задача Коши

$$M' \Psi_t = -M\Psi, \quad /69/$$

$$\Psi(\zeta, \eta; 0) = \hat{\Psi}(\zeta, \eta).$$

Здесь  $M' \Psi$  означает производную Фреше оператора  $M\Psi$ , вычисленную в точке  $\Psi$ ; функция  $\Psi$  задана. Пусть  $\Psi^*$  - решение задачи /56/, /66/. Тогда при некоторых предположениях относительно ограниченности и обратимости оператора  $M'$  доказывается<sup>/20/</sup>, что имеет место соотношение

$$\lim \Psi(\zeta, \eta, t) = \Psi^*(\zeta, \eta), \quad /70/$$

где  $\Psi(\zeta, \eta, t)$  - решение задачи /69/.

Обозначим

$$\Phi = \frac{d\Psi}{dt}, \quad \left( \Phi = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi \end{pmatrix} \right). \quad /71/$$

Из /69/ получим уравнение

$$-\Delta\Phi + B\Phi = -M\Psi, \quad /72/$$

где

$$B = g^2 \begin{pmatrix} \Psi_1^2 & 2\Psi_0\Psi_1 \\ -2\Psi_0\Psi_1 & -\Psi_0^2 \end{pmatrix}.$$

При этом функция  $\Phi$  удовлетворяет краевым условиям /66/.

Применяя к /72/ метод Эйлера, получим итерационный процесс

$$-\Delta\Phi_n + B\Phi_n = -M\Psi_n,$$

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \tau_n \Phi_n \quad /73/$$

$$\Psi_0 = \hat{\Psi}.$$

В частности, при  $\tau_n = 1$  /73/ переходит в обычный метод Ньютона.

Система уравнений /73/ обычно решается численно. В данной работе дискретизация производится по методу конечных элементов /МКЭ/. Приближенное решение  $\Phi_n$  представляется в виде

$$\Phi_n(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^N \Phi_{ni} h_i(\zeta, \eta), \quad /74/$$

где  $h_i(\zeta, \eta)$  - набор линейно независимых функций, удовлетворяющих условию первого рода, а  $\Phi_{ni}$  - некоторые коэффициенты.

В МКЭ базисные функции отличны от нуля только в некоторых специально выбранных подобластях области  $\Omega$ , называемых конечными элементами<sup>/27/</sup>. Наиболее распространенными являются треугольные и четырехугольные конечные элементы. Выбор типа конечных элементов определяется гладкостью решения, аппроксимацией краевых условий типа Неймана и границей области  $\Omega$ .

В работе нами использованы 8-узловые биквадратичные изопараметрические элементы, имеющие высокую теоретическую степень точности<sup>/24,25/</sup> и хорошо зарекомендовавшие себя при решении ряда практических задач<sup>/25,26/</sup>. Базисная функция  $h_i$  полагается равной 1 в  $i$ -том узле и обращается в нуль на границах эле-

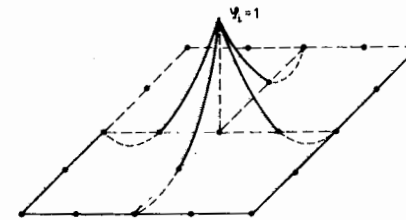


Рис. 1

ментов, окружающих этот узел /одна из этих функций показана на рис.1/.

В случае изопараметрических элементов базисные функции выписываются в локальных координатах  $-1 \leq r, s \leq 1$ . Выражений для них не будем приводить /см., напр., /27/ стр.299/.

Применяя метод Галеркина к /73/ и подставляя  $\Phi_n$  из /74/, получим разностную задачу

$$K\Phi^{(1)} + M_1\Phi^{(1)} + M_2\Phi^{(2)} = -(K\Psi^{(1)} + M_1\Psi^{(1)} - M_4F_1^{(1)}),$$

$$K\Phi^{(2)} - M_2\Phi^{(1)} - M_3\Phi^{(2)} = -(K\Psi^{(2)} - M_3\Psi^{(2)} - M_4F_2^{(2)}), \quad /75/$$

где использованы обозначения

$$\Phi^{(j)} = (\Phi_1^{(j)}, \dots, \Phi_N^{(j)}), \quad \Psi^{(j)} = (\Psi_1^{(j)}, \dots, \Psi_N^{(j)}),$$

$$j = 1, 2$$

$$F^{(1)} = (\rho_1, \dots, \rho_N), \quad F^{(2)} = (J_1, \dots, J_N),$$

$$K = \sum_e k_e, \quad M_j = \sum_e m_e^j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$k_e, m_e^j$  - локальные матрицы жесткости и масс,

$$k_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB |J_e| dr ds,$$

$$m_e^j = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a_j d^3 (\zeta^2 - \eta^2) H^T H |J_e| dr ds,$$

$$a_1 = g^2 \Psi_1^1, \quad a_2 = 2g^2 \Psi_0 \Psi_1, \quad a_3 = g^2 \Psi_0^2, \quad a_4 = 1.$$

В этих выражениях использованы обозначения  $J_e$  - якобиан преобразования

$$\zeta(r, s) = \sum_{i=1}^8 \zeta_i^e h_i(r, s),$$

$$\eta(r, s) = \sum_{i=1}^8 \eta_i^e h_i(r, s),$$

$(\zeta_i^e, \eta_i^e)$  - координаты узлов в элементе  $e$ ;

$$|J_e| = \det J_e; \quad B = J_e^{-1} C$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial h_8}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial h_8}{\partial s} \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} \zeta^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 - \eta^2 \end{pmatrix}, \quad H^T = (h_1(r, s), \dots, h_8(r, s)).$$

Остановимся более подробно на решении системы /75/, которую перепишем в виде

$$K\Phi^{(1)} + M_1\Phi^{(1)} + M_2\Phi^{(2)} = G^{(1)} = -(K\Psi^{(1)} + M_1\Psi^{(1)} - M_4F_1^{(1)}),$$

$$K\Phi^{(2)} - M_2\Phi^{(1)} - M_3\Phi^{(2)} = G^{(2)} = -(K\Psi^{(2)} - M_3\Psi^{(2)} - M_4F_2^{(2)}).$$

Матрицы  $K, M_1, M_2, M_3, M_4$  симметричны и имеют ленточную структуру. Матрица системы /75/ несимметрична. Решение такой системы требует большой памяти, при этом успешное применение итерационных методов представляется сомнительным. Нами предлагается следующий стационарный метод решения задачи /75/. Пусть заданы векторы  $\Phi_0^{(1)}, \Phi_0^{(2)}$ . Тогда  $\Phi_{n+1}^{(1)}, \Phi_{n+1}^{(2)}$  вычисляются из уравнений

$$(K + M_1) \Phi_{n+1}^{(1)} = G^{(1)} - M_2 \Phi_n^{(2)},$$

$$(K - M_3) \Phi_{n+1}^{(2)} = G^{(2)} - M_2 \Phi_n^{(1)}. \quad /76/$$

Итерации прекращаются при выполнении критерия точности

$$\{ (\Phi_{n+1}^{(1)} - \Phi_n^{(1)})^T K (\Phi_{n+1}^{(1)} - \Phi_n^{(1)}) + (\Phi_{n+1}^{(2)} - \Phi_n^{(2)})^T K (\Phi_{n+1}^{(2)} - \Phi_n^{(2)}) \}^{1/2} < \epsilon_1.$$

Это условие является дискретным аналогом полунормы

$$\{ \iint_{\Omega} (|\nabla(\Phi_{n+1}^{(1)} - \Phi_n^{(1)})|^2 + |\nabla(\Phi_{n+1}^{(2)} - \Phi_n^{(2)})|^2) d\zeta d\eta \}^{1/2} < \epsilon.$$

В рассмотренных ниже примерах на каждую ньютоновскую итерацию приходилось примерно 2-3 итерации /76/, при  $\epsilon_1 = 10^{-5}$ . Каждое из уравнений /76/ решалось при помощи метода Гаусса, при этом эффективно использовались симметричность и ленточность матриц  $K + M_1$  и  $K - M_3$ . Итерационный процесс Ньютона /73/ заканчивался по достижении условия

$$\{ (\Psi_0^{(k+1)} - \Psi_0^{(k)})^T K (\Psi_0^{(k+1)} - \Psi_0^{(k)}) + (\Psi_1^{(k+1)} - \Psi_1^{(k)})^T K (\Psi_1^{(k+1)} - \Psi_1^{(k)}) \}^{1/2} < \epsilon_2.$$

В рассмотренных ниже примерах шаг  $r_n$  выбирался равным единице. Отметим следующий важный для численных расчетов факт. Поскольку функции  $\rho$  и  $J$  в примерах имеют определенную четность относительно переменной  $\eta$ , то решения  $\Psi_0(\zeta, \eta)$  и  $\Psi_1(\zeta, \eta)$  обладают соответственной четностью. Это позволило нам решать задачу в области  $\Omega = \{1 \leq \zeta < L, 0 \leq \eta \leq 1\}$ , следовательно, уменьшить требуемую память без потери точности. Перейдем к анализу полученных решений.

Таблица 1

Зависимость полной энергии ЯМ поля от  $g$  и  $R$ ,  
при  $\kappa = m = 1$ ,  $\epsilon = 1$ .

$g \backslash R$	3	5	10	15	20	30
0	0,01996	0,0215	0,02376	0,02483	0,0257	0,02795
3	0,02006	0,02162	0,02361	0,02437	0,02498	0,02681
5	0,01975	0,02078	0,02163	0,02185	0,02219	0,02363

Таблица 2

Зависимость полной энергии ЯМ поля от  $g$  и  $R$ ,  
при  $\kappa = m = 1$ ,  $\epsilon = -1$ .

$g \backslash R$	3	5	10	20
0	0,005915	0,01092	0,01777	0,02247
3	0,005937	0,011	0,01803	0,02264
5	0,005967	0,01108	0,01763	0,2086

На рис.2-4 приведены решения уравнений /56/ /нижние кривые/ и значения плотности энергий /68/ при  $\epsilon = -1$ . На рис.5-7 дано поведение плотности энергий при  $\epsilon = 1$ .

Отметим, что задача двух центров для точечных источников ранее рассматривалась в работах /28,29/, протяженные источники рассмотрены в работе /30/, где система уравнений /47/ исследовалась методом минимизации функционала /63/. Результаты нашей работы согласуются с вычислениями работы /30/ при  $\epsilon = -1$ . Интересный метод исследования устойчивости решений уравнений Янга-Миллса с внешними источниками предложен в работе /31/.

В заключение формулируем основные результаты данной работы и наметим путь к дальнейшим исследованиям. Получены необходимые условия существования статических решений уравнений Янга-Миллса с конечной энергией. Для частного вида внешнего источника сформулирована нелинейная задача двух центров. Предложен и реализован эффективный алгоритм численного решения полученных уравнений. Проведены расчеты, в результате которых найдены решения с нулевым значением полного цветного заряда. Развитые в работе итерационные методы в настоящее время применяются для вычисления решеточной функции распространения кварка, что является основным моментом для вычисления спектра адронов в решеточных теориях поля.

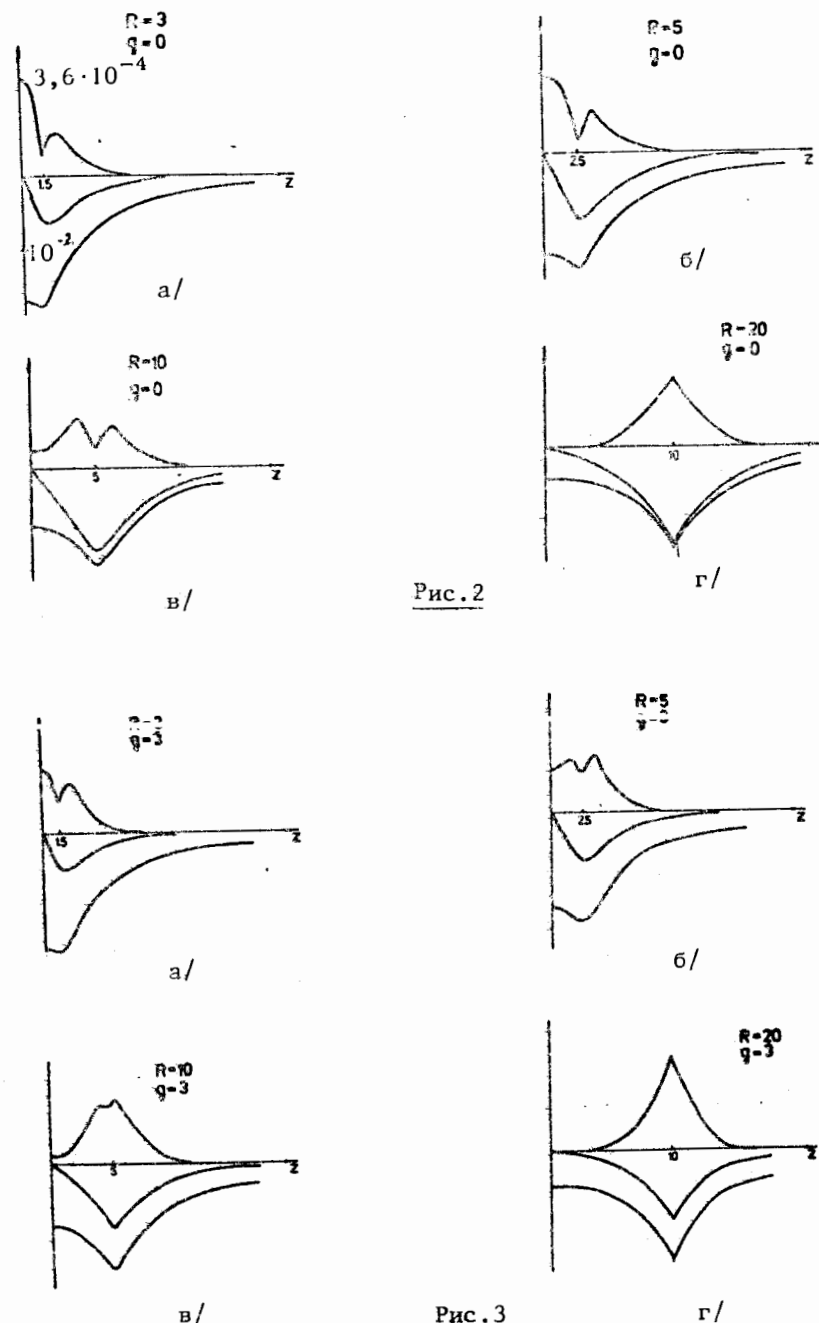


Рис. 2

Рис. 3

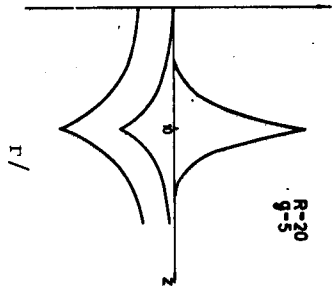
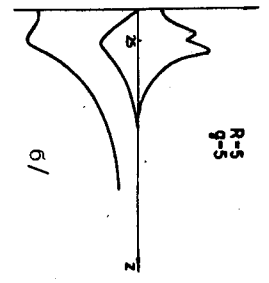
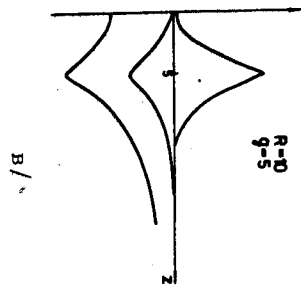
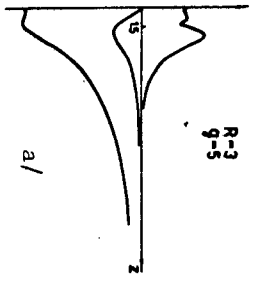


Рис.4.

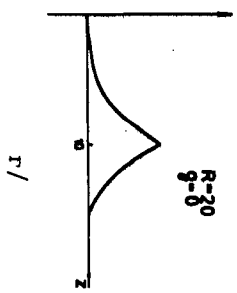
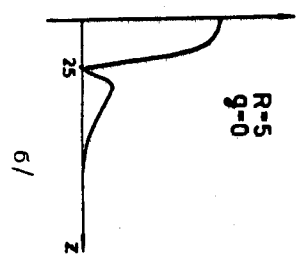
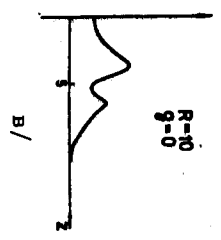
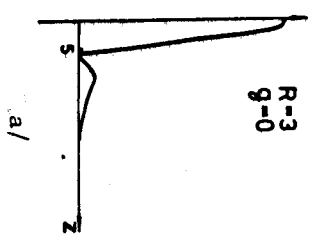


Рис.5

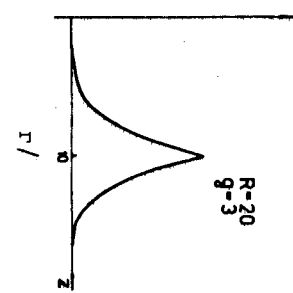
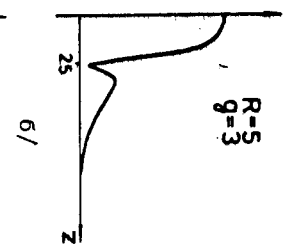
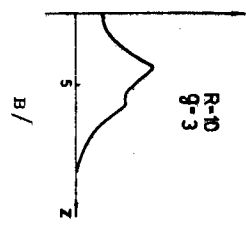
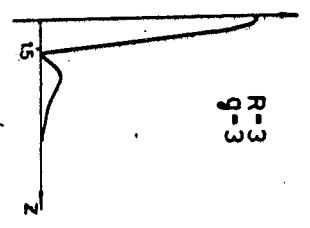


Рис.6.

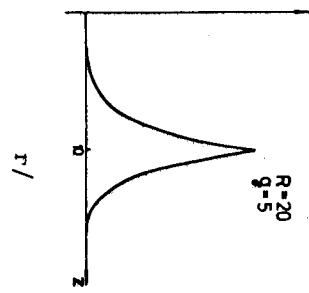
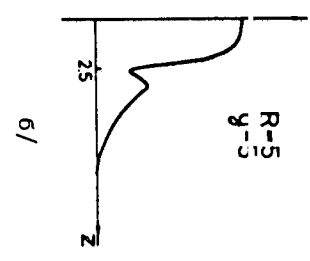
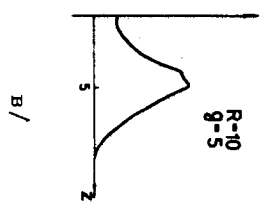
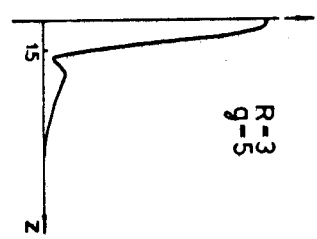


Рис.7.

В последующих работах мы намерены исследовать решения уравнений Янга-Миллса с простым видом внешнего источника /осесимметричный, сферический симметричный источники/, а также задачу двух центров в квантовой хромодинамике с привлечением методов Монте-Карло для вычисления функциональных интегралов и методов исследования операторных нелинейных стохастических эволюционных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Abers E.S., Lee B.W. Phys.Rep., 1973, 9С, р.1; /см. пер. в кн.: Квантовая теория калибровочных полей. "Мир", М., 1977/; Marciano W.J., Pagels H. Phys.Rep., 1978, 36С, р.137.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, 3-е изд., "Наука", М., 1976; Квантованные поля "Наука", М., 1980.
3. Peterman A. Phys.Rep., 1979, 53С, р.157.
4. Callan C., Dashen R., Gross D. Phys.Rev., 1978, D17, р.2717; 1979, D19, р.1826.
5. 't Hooft G. Nucl.Phys., 1974, B75, р.461; Coleman S. Preprint SLAC-PUB-2484, 1980.
6. Polyakov A.M. Phys.Lett., 1975, 59В, р.82; Feynman R.P., The Qualitative Behaviour of Yang-Mills Theory in 2+1 Dimensions. California Inst. of Techn. Preprint. 1981.
7. Jackiw K., Jacobs L., Rebbi C. Phys.Rev., 1979, D20, р.474; Jackiw R., Rossi P. Phys.Rev., 1980, D21, р.426.
8. Yang C.N., Mills R.L. Phys.Rev., 1954, vol.96, р.191.
9. Gross D., Neveu A. Phys.Rev., 1974, D10, р.3235.
10. Makhankov V.G., Makhaldiani N.V., Pashaev O.K. Phys.Lett. 1981, 81A, р.161; Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г. ОИЯИ, P2-81-822, Дубна, 1981.
11. Sandhya Devi K.R., Stayer M.R., Irvin J.M. J.Phys., 1975, G5, р.281.
12. Катышев Ю.В., Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г. ОИЯИ, P2-12941, Дубна, 1979.
13. Coleman S. 1975 Erice Lectures. In: New Phenomena in Subnuclear Physics (ed. by A.Zichichi), Plenum Press, 1977.
14. Belavin A.A. et al. Phys.Lett., 1975, 59В, р.85.
15. Greenberg O.W. Quarks. Annual Reviews of Nuclear and Particle Science, 1978, vol.28; Appelquist T., Barnett R., Lane K. Charm and Beyond. Там же.
16. Маханьков В.Г., Катышев Ю.В. ОИЯИ, P2-10547, Дубна, 1977; Makhankov V.G. Phys.Lett., 1977, 61A, р.431.
17. Katyshev Yu.V., Makhaldiani N.V., Makhankov V.G. Phys. Lett., 1978, 66A, р.456.
18. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976.
19. Гавурин М.К. Изв. вузов, сер.матем., 1958, №5 с.18-31.
20. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, вып.1, с.123-158.
21. Ponomarev L.I. et al. Ann.Phys., 1978, 110, р.274.
22. Визнер Я. и др. ЭЧАЯ, 1978, т.8, вып.3, с.710-768.
23. Касчиев М., Христов Е.Х. ОИЯИ, P5-12915, Дубна, 1979.
24. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. "Мир", М., 1977.
25. Bathe K.J., Wilson E. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice Hall, Englewood NC, Clif., N.J., 1976.
26. Kaschiev M.S. et al. Phys.Rev.A, 1980, vol.22, р.557.
27. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. "Мир", М., 1979.
28. Хриплович И.Б. ЖЭТФ, 1978, т.74, с.38.
29. Ernst W. Bielefeld Univ. Preprint, Bi-TP81/15, 1981.
30. Freedman R.A. et al. Washington Univ.Preprint, RLO-1388-820, 1980.
31. Боголюбов П.Н., Дорохов А.Е. ОИЯИ, P2-81-508, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел  
19 января 1982 года.



Касчиева В.А. и др.

P2-82-35

Решения классических уравнений Янга-Миллса с внешними источниками.  
Численное исследование нелинейной задачи двух центров

Получены необходимые условия существования локализованных стационарных решений уравнений Янга-Миллса с конечной энергией в присутствии внешних источников. Сформирована нелинейная задача двух центров для частного вида таких источников. Полученные нелинейные уравнения решены с помощью непрерывного аналога метода Ньютона, при этом дискретизация проводилась по методу конечных элементов. Найдены решения с конечной энергией, соответствующие нулевому полному цветному заряду.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Kaschieva V.A. et al.

P2-82-35

Solutions of Classical Yang-Mills Equations with External Sources.  
Numerical Study of Two-Centre Nonlinear Problem

The necessary conditions for the existence of stationary solutions with finite energy to the Yang-Mills equations with external sources are obtained. For a special form of the external source the nonlinear two-centre problem is formulated. Using continuous analog of Newton's method and the method of finite element for discretization the solutions with finite energy and zero total colour charge are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.