сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-345

Р.П.Зайков

ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ ДЛЯ SU(N) МОДЕЛИ ТИРРИНГА

1982

Для некоторых двумерных классических теоретико-полевых моделей /вполне интегрируемых моделей/ существует бесконечное число интегралов движения. В релятивистском случае вышеуказанным свойством обладают: модель синус-Гордона, модель Тирринга, киральные модели и т.д. Для киральных моделей существуют как локальные, так и нелокальные сохраняющиеся величины. В работах /1,2/ было показано, что нелокальные заряды для киральных полей имеют нетеровский характер - они порождаются нелокальными преобразованиями. Групповая структура этих нелокальных преобразований была исследована в работах /3-5/. В /6/ было показано, что высшие тензоры энергии-импульса для конформно-инвариантных моделей и высшие локальные заряды для моделей, инвариантных относительно обычных и γ_5-калибровочных преобразований, например, модель Тирринга, имеют также нетеровский характер.

В настоящей работе исследуется групповая структура преобразований скрытой симметрии, порождающая высшие локальные заряды для безмассовой SU(N) модели Тирринга. Показано, что множество всех преобразований, сохраняющих действия на экстремалях /решения уравнения движения/, содержит класс преобразований, которые сохраняют лагранжиан /с точностью до полной производной/ для произвольных полевых конфигураций. Найдены также генераторы преобразований, которые образуют бесконечную алгебру Ли, совпадающую по форме с алгеброй симметрий для киральных полей /3-5/.

Лагранжиан безмассовой SU(N) модели Тирринга имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = i\,\bar{\Psi}_j \overleftrightarrow{\partial\!\!\!/}\, \Psi_j + g\,\bar{\Psi}_j \gamma^{\mu} \Psi_j\, \bar{\Psi}_k \gamma_{\mu} \Psi_k\,, \qquad /1/$$

где g - безразмерная константа связи; Ψ есть классический спинор с коммутирующими или антикоммутирующими компонентами. Отметим, что лагранжиан /1/ инвариантен относительно глобальных калибровочных и γ_5-калибровочных преобразований. Соответствующие сохраняющиеся ток и аксиальный ток имеют вид

$$\begin{aligned}(j_{\mu}(x))_{jk} &= \bar{\Psi}_j \gamma_{\mu} \Psi_k(x)\,,\\ (j^5_{\mu}(x))_{jk} &= \bar{\Psi}_j \gamma_5 \gamma_{\mu} \Psi_k = \epsilon_{\mu\nu} j^{\nu}_{jk} \qquad (j,k = 1,\dots,N),\end{aligned} \qquad /2/$$

где

$$\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}\,, \qquad \epsilon_{10} = -\epsilon_{01} = 1.$$

Следуя работе /6/, рассмотрим следующие калибровочные преобразования:

$$\begin{aligned}\Psi'_1(x) &= \exp\{ i\,\eta^{(k)}_{1,a}(x)\,\omega^{(k)}_{1,a}\}\Psi_1(x),\\ \Psi'_2(x) &= \exp\{ i\,\eta^{(k)}_{2,a}(x)\,\omega^{(k)}_{2,a}\}\Psi_2(x),\end{aligned} \qquad /3/$$

которые преобразуют обе компоненты спинора $\Psi(x)$ отдельно. Здесь $\eta^{(k)}_{a,a}(x)$ $(a=1,2)$ - генераторы преобразований, зависящие от x и $\omega^{(k)}_{a,a}$ - соответствующие параметры. Отметим, что преобразования /3/ сохраняют лоренцевскую инвариантность, однако могут нарушать инвариантность относительно пространственных отражений. Генераторные функции определим из условия инвариантности лагранжиана относительно преобразований /3/, то есть

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\{j_+(x)\partial_-[(\eta^{(k)}_{1,a}(x))^T+(\eta^{(k)}_{1,a}(x))^*]\}=0,\\
&\mathrm{tr}\{j_-(x)\partial_+[(\eta^{(k)}_{2,a}(x))^T+(\eta^{(k)}_{2,a}(x))^*]\}=0,
\end{aligned}
\qquad /4/
$$

где ввели переменные светового конуса $x_\pm=(x_0\mp x_1)/2$ и соответствующие компоненты токов /2/:

$$
j_+(x)=\bar{\Psi}\gamma_+\Psi(x)=\Psi^*_1(x)\Psi_1(x),\quad j_-(x)=\bar{\Psi}\gamma_-\Psi(x)=\Psi^*_2(x)\Psi_2(x).
$$

Здесь звездочка обозначает комплексное сопряжение. Отметим, кроме того, что генераторы $\eta^{(k)}_a(x)$ вообще могут быть неэрмитовыми операторами.

Тогда очевидно, что

$$
\eta^{(k)}_{1,a}(x)=f^{(k)}_{1,a}(x_+),\quad \eta^{(k)}_{2,a}(x)=f^{(k)}_{2,a}(x_-)\qquad /5/
$$

удовлетворяют уравнениям /4/, где $f^{1,2}_a$ - матричные функции, для которых выполнено следующее граничное условие:

$$
\lim_{x_1\to\pm\infty} f^{(k)}_{1,2}(x)\leq M<\infty\ .\qquad /6/
$$

Лоренцевская размерность $f^{(k)}_{1,2}(x)$ имеет обратный знак лоренцевской размерности соответствующего параметра преобразования $\omega^{(k)}_{1,2}$. Следовательно, $f^{(k)}_{1,a}\omega^{(k)}_{1,a}$ и $f^{(k)}_{2,a}\omega^{(k)}_{2,a}$ являются лоренцевскими скалярами. Отметим, что если $f_1(x_\mp)=f_2(x_\mp)$, преобразования /3/ не нарушают инвариантности относительно пространственных отражений. Существуют полиномиальные относительно Ψ решения:

$$
\eta^{(n,m)}_{a,\pm}(x)=\partial_\pm^{m_1}(j_\pm)^{n_1}\dots\partial_\pm^{m_q}(j_\pm)^{n_q}T_a\,\partial_\pm^{m_{q+1}}(j_\pm)^{n_{q+1}}\dots\partial_\pm^{m_n}(j_\pm)^{n_n},\qquad /7/
$$

где числа m_j, n_j ограничены условиями $\sum_{j=1}^{n}m_j=m$, $\sum_{j=1}^{n}n_j=n$, которые являются симметрией лагранжиана только на экстремалях. В этом случае параметры преобразований $\omega^{n-m}_\pm$ имеют лоренцевскую размерность $\pm(m+n)$.

Чтобы выделить класс преобразования с полиномиальными генераторами, сохраняющими лагранжиан с точностью до полной производной, рассмотрим сначала абелевый случай. Рассмотрим преобразования с генераторами $\eta^{(0,n)}_\pm(x)$. Подставляя $\eta^{(0,n)}_\pm(x)$ в условия инвариантности /4/, получаем

$$
j_\pm\partial\,(j_\pm)^n=\frac{n}{n+1}\partial\,(j_\pm)^{n+1},\qquad /8/
$$

то есть лагранжиан /1/ изменяется на полной производной для произвольных полей ($\partial^\mu j_\mu\neq 0$). В неабелевом случае комбинации от полиномиальных решений /7/ в виде

$$
\eta^{(0,n)}_a(x)=j^n(x)T_a+T_a j^n+(n-1)jT_a j^{n-1}\qquad /9/
$$

также меняют лагранжиан на полной производной для произвольных полей.

Легко проверяется, что преобразования /3/ с генераторами /5/ и /7/ являются также симметрией уравнения движения для модели Тирринга.

Теперь исследуем групповую структуру преобразований /3/. Для этой цели рассмотрим коммутатор двух бесконечно малых преобразований:

$$
\begin{aligned}
(U_1U_2-U_2U_1)_{jk}\Psi_k(x)={}&\{\delta_{j\ell}+i(\eta^{(p)}_a)_{j\ell}[\Psi_m+i(\eta^{(q)}_b)_{mn}\Psi_n\,\delta\omega^{(q)}_{2b}]\times\\
&\times\delta\omega^{(p)}_{1,a}\}\{\delta_{\ell k}+i(\eta^{(q)}_b)_{\ell k}\delta\omega^{(q)}_{2,b}\}\Psi_k-\\
&-\{\delta_{j\ell}+i(\eta^{(q)}_b)_{j\ell}[\Psi_m+i(\eta^{(p)}_a)_{mn}\Psi_n\,\delta\omega^{(p)}_{a,1}]\delta\omega^{(q)}_{2b}\}\times\\
&\times\{\delta_{\ell k}+i(\eta^{(p)}_a)_{\ell k}\,\delta\omega^{(p)}_{1,a}\}\Psi_k=\\
={}&\{[\eta^{(p)}_a(x),\eta^{(q)}_b(x)]_{jk}+\frac{\delta(\eta^{(p)}_a)_{jk}}{\delta\Psi_m}(\eta^{(q)}_b\Psi)_m-\frac{\delta(\eta^{(q)}_b)_{jk}}{\delta\Psi_m}(\eta^{(p)}_a\Psi)_m-\\
&-(\bar{\Psi}(\eta^{q}_b)^+)_n\frac{\delta(\eta^{p}_a)_{jk}}{\delta\bar{\Psi}_n}+(\bar{\Psi}(\eta^{(p)}_a)^+)_n\frac{\delta(\eta^{q}_b)_{jk}}{\delta\bar{\Psi}_n}\}\Psi_k\,\delta\omega^{(p)}_{1,a}\delta\omega^{(q)}_{2,b}=\\
={}&[\![\eta^{(p)}_a(x),\eta^{(q)}_b(x)]\!]_{jk}\Psi_k(x)\,\delta\omega^{(p)}_{1,a}\delta\omega^{(q)}_{2,b}\ ,
\end{aligned}
\qquad /10/
$$

где ввели обозначение $[\![\,.\,]\!]$ для коммутатора двух генераторных функций, а $[\,,\,]$ обозначает обычный матричный коммутатор. Очевидно, что когда генераторы не зависят от полей, /10/ выражается посредством обычного матричного коммутатора. Из /10/ имеем, что когда исходная группа симметрий рассматриваемой модели является абелевой, абелевой является и соответствующая группа скрытых симметрий.

Рассмотрим следующие генераторные функции типа /5/:

$$\eta^{(\nu)}_{\pm,a}(x) = x_\pm^{\nu}\, T_a \,, \qquad /11/$$

где ν - любое комплексное число. Подставляя /11/ в коммутатор /10/, имеем

$$[\eta^{(\nu)}_{\pm,a}(x),\ \eta^{(\nu')}_{\pm,b}(x)] = [\eta^{(\nu)}_{\pm,a}(x),\ \eta^{(\nu')}_{\pm,b}(x)] = \qquad /12/$$

$$= (x_\pm)^{\nu+\nu'}\,[T_a, T_b] = iC_{abc}(x_\pm)^{\nu+\nu'}\,T_c = iC_{abc}\,\eta_c^{\nu+\nu'}(x),$$

где C_{abc} - структурные постоянные группы G. Следовательно, /11/ удовлетворяет бесконечной алгебре Ли, рассматриваемой в работе /3/. Отметим, что преобразования /11/ с $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ не удовлетворяют граничному условию /6/.

Рассмотрим также преобразования с генераторами

$$(\eta_a^{(0,m)}(x))_{jk} = (j^m)_{j\ell}\,(T_a)_{\ell k} = \Psi_j\,(\bar\Psi T_a)_k(\bar\Psi\Psi)^{m-1}, \qquad /13/$$

$$(\tilde\eta_a^{(0,m)}(x))_{jk} = \mathrm{tr}(j^m)(T_a)_{jk} = (\bar\Psi\Psi)^m (T_a)_{jk}\,. \qquad /14/$$

Легко проверяется, что

$$[\eta_a^{(0,m)}(x),\ \eta_b^{(0,n)}(x)] = iC_{abc}\,\eta_c^{(0,m+n)}(x), \qquad /15/$$

$$[\tilde\eta_a^{(0,m)}(x),\ \tilde\eta_b^{(0,n)}(x)] = iC_{abc}\,\tilde\eta_c^{(0,m+n)}(x), \qquad /16/$$

то есть генераторы $\eta_a^{(0,m)}$ и $\tilde\eta_a^{(0,m)}$ образуют ту же самую бесконечную алгебру Ли, что и генераторы /11/.

В заключение отметим, что нам не удалось получить замкнутую алгебру Ли для генераторов с производными $\eta_a^{(m,n)}$ /7/, а также для полиномиальных генераторов /9/, реализующих симметрию для произвольных полей. Также отметим, что наши рассмотрения применимы для обоих случаев спиноров с коммутирующими или антикоммутирующими компонентами. В последнем случае число генераторов $\eta_a^{(0,m)}$ /13/ и /14/ является конечным ($m=0,1,\dots,N$).

Автор выражает глубокую благодарность И.Я.Арефьевой, А.А.Славнову, Д.Робашику, В.Герджикову и Ю.М.Зиновьеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dalan L., Roos A. Phys.Rev., 1980, vol.D22, No.8, p.2014.
2. Markowsky B.L., Zaikov R.P. JINR, E2-80-654, Dubna, 1980.
3. Dalan L. Phys.Rev.Lett., 1981, vol.47, p.1371.
4. Ge Mo-la, Wu Y. Phys.Lett., 1982, vol.108B, No.6, p.412.
5. Devchand C., Fairle D.D. Nucl.Phys., 1982, vol.B194, No.2, p.232.
6. Зайков Р.П. ОИЯИ, P2-81-423, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел 13 мая 1982 года.

Зайков Р.П. P2-82-345

Групповая структура преобразования скрытой симметрии для SU(N) модели Тирринга

Исследуется групповая структура преобразований скрытой симметрии, порождающие высшие локальные сохраняющиеся заряды для безмассовой SU(N) модели Тирринга. Найден класс преобразований, которые изменяют лагранжиан модели на полной производной для произвольных полей. Показано также, что существуют преобразования, генераторы которых образуют бесконечную алгебру Ли.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zaikov R.P. P2-82-345

Group Structure of the Hidden Symmetry Transformations for the SU(N) Thirring Model

The group structure of the hidden symmetry transformations, which generate the higher local conserved charges for the massless SU(N) Thirring model is investigated. A class of transformations which changes the Lagrangian of the model by the full derivative, for arbitrary fields, is found. It is shown that there exist the transformations generators of which form an infinite Lie algebra.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод авторов.