объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-82-337

В.К.Мельников

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

Направлено в Оргкомитет "V Международного семинара по физике высоких энергий и теории поля"
/Протвино, 12-18 июля 1982 г./

1982

В настоящей работе речь идет о нелинейных эволюционных уравнениях, интегрируемых методом обратной задачи для оператора X вида

$$X = \begin{vmatrix} \partial^{k_0+1} + \sum\limits_{k=0}^{k_0} u_k \partial^k - \eta \Lambda_0^{k_0+1} & v \\ w & \partial \end{vmatrix}, \quad k_0 \geq 0, \qquad /1/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x , $u_k = u_k(x,t)$ - квадратные матрицы порядка r_0 , $v = v(x,t)$ - прямоугольная матрица, имеющая r_0 строк и r_1 столбцов, $w = w(x,t)$ - прямоугольная матрица, имеющая r_1 строк и r_0 столбцов, Λ_0 - диагональная матрица с отличными от нуля диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0} \in \mathbf{C}$, удовлетворяющими неравенству

$$\lambda_r^{k_0+1} \neq \lambda_{r'}^{k_0+1} \quad \text{при} \quad r \neq r', \qquad /2/$$

а η - спектральный параметр. Среди этих уравнений находится несколько систем, описывающих различные модели самосогласованного поля, т.е. систем, содержащих уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + u \Psi$$

и, например, нелинейное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(u, \Psi, u_x', \Psi_x', \ldots),$$

описывающее эволюцию во времени потенциала $u = u(x,t)$. Ниже излагается алгоритм для получения этих уравнений и некоторые их свойства.

1. Получение уравнений. Рассмотрим уравнение

$$Xh = 0, \quad h = (\phi, \psi), \qquad /1.1/$$

где $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{r_0})$ и $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{r_1})$ - вектора с r_0 и r_1 компонентами соответственно. С помощью решений уравнения /1.1/ образуем матрицу Вронского W вида

$$W = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \ldots & \phi_{k_0} & \phi_{k_0+1} \\ \phi_0' & \phi_1' & \ldots & \phi_{k_0}' & \phi_{k_0+1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi_0^{(k_0)} & \phi_1^{(k_0)} & \ldots & \phi_{k_0}^{(k_0)} & \phi_{k_0+1}^{(k_0)} \\ \psi_0 & \psi_1 & \ldots & \psi_{k_0} & \psi_{k_0+1} \end{vmatrix}, \qquad /1.2/$$

где ϕ_0 , $\phi_1, \ldots, \phi_{k_0}$ - квадратные матрицы порядка r_0 , ϕ_{k_0+1} - прямоугольная матрица, имеющая r_0 строк и r_1 столбцов, ψ_0 , $\psi_1, \ldots, \psi_{k_0}$ - прямоугольные матрицы, имеющие r_1 строк и r_0 столбцов, ψ_{k_0+1} - квадратная матрица порядка r_1, а штрихами обозначены производные по x. Очевидно, что W - квадратная матрица порядка $\rho_0 = (k_0+1)r_0 + r_1$. В силу /1/, /1.1/ и /1.2/ имеем

$$\frac{\partial W}{\partial x} + UW = \Gamma W, \qquad /1.3/$$

где

$$U = \begin{vmatrix} & 0 & & & \\ u_0 & u_1 & \ldots & u_{k_0} & v \\ w & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & E_{k_0 r_0} & 0 \\ \eta \Lambda_0^{k_0+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad /1.4/$$

На основании /1.2/-/1.4/ получаем, что $\det W$ не зависит от x. Следовательно, матрица Вронского W вида /1.2/ может быть выбрана так, что $\det W \equiv 1$. С учетом этого замечания положим

$$F = WCW^{-1}, \qquad /1.5/$$

где

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0. \qquad /1.6/$$

Согласно /1.3/, /1.5/ и /1.6/ справедливо равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [U, F] = [\Gamma, F]. \qquad /1.7/$$

Определенная таким образом матрица F в дальнейшем играет важную роль. Действительно, пусть $F_{\mu,\nu}$ - квадратные матрицы порядка r_0, образуемые элементами матрицы F, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0+1,\dots,(\mu+1)r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0+1,\dots,(\nu+1)r_0$, $\mu,\nu=0,1,\dots,k_0$; F_{μ,k_0+1} - прямоугольные матрицы, образуемые элементами матрицы F, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0+1,\dots,(\mu+1)r_0$ и столбцов с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$, $\mu=0,1,\dots,k_0$; $F_{k_0+1,\nu}$ - прямоугольные матрицы, образуемые элементами матрицы F, стоящими на пересечении строк с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$ и столбцов с номерами $\nu r_0+1,\dots,(\nu+1)r_0$, $\nu=0,1,\dots,k_0$; и, наконец, F_{k_0+1,k_0+1} - квадратная матрица порядка r_1, образуемая элементами матрицы F, стоящими на пересечении строк и столбцов с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$. С помощью полученных таким образом матриц $F_{\mu,\nu}$ определим операторы

$$D_\mu=\sum_{k=0}^{k_0}F_{\mu,k}\,\partial^k,\quad \mu=0,1,\dots,k_0,\ k_0+1,$$
$$\hat D_\nu=\sum_{k=0}^{k_0}\partial^{k_0-k}\cdot F_{k,\nu}+\sum_{k=1}^{k_0}u_k\sum_{k'=0}^{k-1}\partial^{k-k'-1}\cdot F_{k',\nu}\ ,\qquad \nu=0,1,\dots,k_0,\ k_0+1. \qquad /1.8/$$

Пусть, далее,

$$A=\left|\begin{matrix}D_0 & F_{0,k_0+1}\\ D_{k_0+1} & F_{k_0+1,k_0+1}\end{matrix}\right|,\quad \hat A=\left|\begin{matrix}\hat D_{k_0} & \hat D_{k_0+1}\\ F_{k_0+1,k_0} & F_{k_0+1,k_0+1}\end{matrix}\right|. \qquad /1.9/$$

Нетрудно убедиться, что в силу /1.7/-/1.9/ справедливо операторное соотношение

$$X\cdot A=\hat A\cdot X\,. \qquad /1.10/$$

Возьмем теперь произвольную точку $\eta_s\in\mathbf{C}$ и положим

$$F=\sum_{p=0}^{\infty}f_p^{(s)}(\eta-\eta_s)^p,\qquad F_{\mu,\nu}=\sum_{p=0}^{\infty}f_{p,\mu,\nu}^{(s)}(\eta-\eta_s)^p,$$
$$D_\mu=\sum_{p=0}^{\infty}d_{p,\mu}^{(s)}(\eta-\eta_s)^p,\qquad \hat D_\nu=\sum_{p=0}^{\infty}\hat d_{p,\nu}^{(s)}(\eta-\eta_s)^p, \qquad /1.11/$$
$$A=\sum_{p=0}^{\infty}a_p^{(s)}(\eta-\eta_s)^p,\qquad \hat A=\sum_{p=0}^{\infty}\hat a_p^{(s)}(\eta-\eta_s)^p.$$

Путем сравнения равенств /1.8/, /1.9/ и /1.11/ получаем следующие выражения:

$$a_p^{(s)}=\left|\begin{matrix}d_{p,0}^{(s)} & f_{p,0,k_0+1}^{(s)}\\ d_{p,k_0+1}^{(s)} & f_{p,k_0+1,k_0+1}^{(s)}\end{matrix}\right|,\quad \hat a_p^{(s)}=\left|\begin{matrix}\hat d_{p,k_0}^{(s)} & \hat d_{p,k_0+1}^{(s)}\\ f_{p,k_0+1,k_0}^{(s)} & f_{p,k_0+1,k_0+1}^{(s)}\end{matrix}\right|, \qquad /1.12/$$

где

$$d_{p,\mu}^{(s)}=\sum_{k=0}^{k_0}f_{p,\mu,k}^{(s)}\,\partial^k,$$
$$\hat d_{p,\nu}^{(s)}=\sum_{k=0}^{k_0}\partial^{k_0-k}\cdot f_{p,k,\nu}^{(s)}+\sum_{k=1}^{k_0}u_k\sum_{k'=0}^{k-1}\partial^{k-k'-1}\cdot f_{p,k',\nu}^{(s)}\ . \qquad /1.13/$$

Пусть Γ_0 равно значению при $\eta=0$ определенной посредством равенства /1.4/ матрицы Γ, а $\Gamma_1=\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}$. Пусть, далее, оператор X_s получается из X вида /1/ при $\eta=\eta_s$, а матрица I имеет вид

$$I=-\frac{\partial X}{\partial\eta}=\mathrm{diag}\,(\lambda_1^{k_0+1},\dots,\lambda_{r_0}^{k_0+1},0,\dots,0).$$

Тогда на основании /1.7/ и /1.10/-/1.13/ получаем уравнения, которым удовлетворяют матрицы $f_p^{(s)}$,

$$\frac{\partial f_0^{(s)}}{\partial x}+[U,f_0^{(s)}]=[\Gamma_0+\eta_s\Gamma_1,\ f_0^{(s)}],$$
$$\frac{\partial f_p^{(s)}}{\partial x}+[U,f_p^{(s)}]=[\Gamma_0+\eta_s\Gamma_1,f_p^{(s)}]+[\Gamma_1,f_{p-1}^{(s)}],\quad p>0, \qquad /1.14/$$

и операторные соотношения для $a_p^{(s)}$ и $\hat a_p^{(s)}$

$$X_s\cdot a_0^{(s)}=\hat a_0^{(s)}\cdot X_s\,,$$
$$X_s\cdot a_p^{(s)}-I\cdot a_{p-1}^{(s)}=\hat a_p^{(s)}\cdot X_s-\hat a_{p-1}^{(s)}\cdot I\,,\quad p>0. \qquad /1.15/$$

Кроме того, уравнение /1.7/ имеет формальное решение F вида

$$F \sim \sum_{m=-k_0}^{\infty} F_m \zeta^{-m}, \quad \zeta=\eta^{1/(k_0+1)}, \qquad /1.16/$$

где F_m - квадратные матрицы порядка $\rho_0=(k_0+1)r_0+r_1$, элементы которых являются полиномами от элементов матриц u_0, $u_1,\dots,u_{k_0}$, v, w и их производных по x соответствующего порядка. Действительно, пусть

$$\Theta=\begin{vmatrix} E_{r_0} & E_{r_0} & \dots & E_{r_0} & 0 \\ \zeta\Lambda_0 & \zeta\Lambda_1 & \dots & \zeta\Lambda_{k_0} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\zeta\Lambda_0)^{k_0} & (\zeta\Lambda_1)^{k_0} & \dots & (\zeta\Lambda_{k_0})^{k_0} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{r_1} \end{vmatrix}, \qquad /1.17/$$

где $\Lambda_k=\Lambda_0\exp(i\frac{2\pi k}{k_0+1})$. Положим

$$F=\Theta G\Theta^{-1}. \qquad /1.18/$$

В силу /1.7/ справедливо равенство

$$\frac{\partial G}{\partial x}+[V,G]=\zeta[\Lambda,G], \qquad /1.19/$$

где

$$V=\Theta^{-1}U\Theta, \quad \zeta\Lambda=\Theta^{-1}\Gamma\Theta. \qquad /1.20/$$

С помощью равенств /1.4/, /1.17/ и /1.20/ нетрудно убедиться, что

$$V=\sum_{k=0}^{k_0} V_k\zeta^{k-k_0}, \qquad /1.21/$$

где

$$V_0=\frac{1}{k_0+1}\begin{vmatrix} \Lambda_0^{-k_0}u_0 & \Lambda_0^{-k_0}u_0 & \dots & \Lambda_0^{-k_0}u_0 & \Lambda_0^{-k_0}v \\ \Lambda_1^{-k_0}u_0 & \Lambda_1^{-k_0}u_0 & \dots & \Lambda_1^{-k_0}u_0 & \Lambda_1^{-k_0}v \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_0 & \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_0 & \dots & \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_0 & \Lambda_{k_0}^{-k_0}v \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /1.22/$$

при $0<k<k_0$

$$V_k=\frac{1}{k_0+1}\begin{vmatrix} \Lambda_0^{-k_0}u_k\Lambda_0^k & \Lambda_0^{-k_0}u_k\Lambda_1^k & \dots & \Lambda_0^{-k_0}u_k\Lambda_{k_0}^k & 0 \\ \Lambda_1^{-k_0}u_k\Lambda_0^k & \Lambda_1^{-k_0}u_k\Lambda_1^k & \dots & \Lambda_1^{-k_0}u_k\Lambda_{k_0}^k & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_k\Lambda_0^k & \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_k\Lambda_1^k & \dots & \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_k\Lambda_{k_0}^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /1.23/$$

$$V_{k_0}=\frac{1}{k_0+1}\begin{vmatrix} \Lambda_0^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_0^{k_0} & \Lambda_0^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_1^{k_0} & \dots & \Lambda_0^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_{k_0}^{k_0} & 0 \\ \Lambda_1^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_0^{k_0} & \Lambda_1^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_1^{k_0} & \dots & \Lambda_1^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_{k_0}^{k_0} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_0^{k_0} & \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_1^{k_0} & \dots & \Lambda_{k_0}^{-k_0}u_{k_0}\Lambda_{k_0}^{k_0} & 0 \\ (k_0+1)w & (k_0+1)w & \dots & (k_0+1)w & 0 \end{vmatrix}, \qquad /1.24/$$

а

$$\Lambda=\begin{vmatrix} \Lambda_0 & & & 0 \\ & \Lambda_1 & & \\ & & \ddots & \Lambda_{k_0} \\ 0 & & & 0 \end{vmatrix}. \qquad /1.25/$$

Согласно результатам работы [1] уравнение /1.19/ имеет формальное решение G вида

$$G\sim\sum_{m=0}^{\infty} G_m\zeta^{-m}, \qquad /1.26/$$

где матрица G_0 удовлетворяет условию

$$[\Lambda,G_0]=0, \qquad /1.27/$$

при $1\le m\le k_0$ матрицы G_m удовлетворяют уравнению

$$[\Lambda,G_m]-\sum_{k=k_0-m+1}^{k_0}[V_k,G_{m+k-k_0-1}]-\frac{\partial G_{m-1}}{\partial x}=0, \qquad /1.28/$$

а при $m > k_0$ справедливо рекуррентное соотношение

$$[\Lambda, G_m] - \sum_{k=0}^{k_0} [V_k, G_{m+k-k_0-1}] - \frac{\partial G_{m-1}}{\partial x} = 0. \qquad /1.29/$$

Из равенств /1.27/ и /1.28/ следует, что G_0 - диагональная матрица с не зависящими от x диагональными элементами, т.е.

$$G_0 = \mathrm{diag}(c_1,\dots,c_{(k_0+1)r_0}, c_{(k_0+1)r_0+1},\dots,c_{(k_0+1)r_0+r_1}). \qquad /1.30/$$

При этом оказывается, что если в равенстве /1.30/ положить

$$c_{(k_0+1)r_0+1} = \dots = c_{(k_0+1)r_0+r_1}, \qquad /1.31/$$

то из уравнений /1.28/ и /1.29/ вытекает, что элементы матриц G_m при $m > 0$ будут полиномами от элементов матриц u_0, $u_1,\dots,u_{k_0}$, v, w и их производных по x соответствующего порядка. Более точно, на основании равенств /1.22/-/1.24/ матрицы G_m при $m>0$ можно выбрать так, чтобы их элементы были квазиоднородными многочленами ранга m от элементов матриц u_0, $u_1,\dots,u_{k_0}$, v, w и их производных по x. Это значит, что при замене элементов матриц $\frac{\partial^\kappa u_k}{\partial x^\kappa}$ на $\rho^{k_0-k+\kappa+1}$, а элементов матриц $\frac{\partial^\kappa v}{\partial x^\kappa}$ и $\frac{\partial^\kappa w}{\partial x^\kappa}$ соответственно на $\rho^{k_0+\kappa+1}$ и $\rho^{\kappa+1}$ любой одночлен Q_α, входящий в какой-нибудь элемент матрицы G_m, принимает вид $C_\alpha \rho^m$, где C_α - отличная от нуля константа. Отсюда, в частности, следует, что при $m > 0$ имеем $G_m \equiv 0$, если $u_0 = u_1 = \dots = u_{k_0} = v = w \equiv 0$.

Исходя из равенства /1.18/, подвергнем теперь полученный описанным выше способом ряд /1.26/ преобразованию подобия с помощью матрицы Θ вида /1.17/, т.е. положим

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta G_m \Theta^{-1} \zeta^{-m}. \qquad /1.32/$$

Нетрудно видеть, что полученный таким образом ряд имеет вид /1.16/ и формально удовлетворяет уравнению /1.7/. Отсюда, в частности, следует, что при любом выборе матрицы G_0, удовлетворяющей условиям /1.30/ и /1.31/, справедливо равенство

$$[\Gamma_1, F_m] = 0, \quad \text{если} \quad -k_0 \le m \le 0, \qquad /1.33/$$

а при $m > 0$ справедливо рекуррентное соотношение

$$[\Gamma_1, F_m] + [\Gamma_0, F_{m-k_0-1}] - [U, F_{m-k_0-1}] - \frac{\partial}{\partial x} F_{m-k_0-1} = 0. \qquad /1.34/$$

Таким образом, последовательность матриц F_m, $m \ge -k_0$, распадается на k_0+1 бесконечные серии, образуемые матрицами с номерами $m=(k_0+1)q$, $m=(k_0+1)q-1,\dots,m=(k_0+1)q-k_0$, $q \ge 0$, соответственно. Пусть теперь $F_{m,\mu,\nu}$ /соответственно $G_{m,\mu,\nu}$/ - матрицы порядка r_0, образуемые элементами матрицы F_m /соответственно G_m/, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0+1,\dots,(\mu+1)r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0+1,\dots,(\nu+1)r_0$, $\mu,\nu=0,1,\dots,k_0$; F_{m,μ,k_0+1} /соответственно G_{m,μ,k_0+1}/ - прямоугольные матрицы, образуемые элементами матрицы F_m /соответственно G_m/, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0+1,\dots,(\mu+1)r_0$ и столбцов с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$, $\mu=0,1,\dots,k_0$; $F_{m,k_0+1,\nu}$ /соответственно $G_{m,k_0+1,\nu}$/ - прямоугольные матрицы, образуемые элементами матрицы F_m /соответственно G_m/, стоящими на пересечении строк с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$ и столбцов с номерами $\nu r_0+1,\dots,(\nu+1)r_0$, $\nu=0,1,\dots,k_0$; и, наконец, F_{m,k_0+1,k_0+1} /соответственно G_{m,k_0+1,k_0+1}/ - квадратная матрица порядка r_1, образуемая элементами матрицы F_m /соответственно G_m/, стоящими на пересечении строк и столбцов с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$. Тогда в силу /1.17/ из /1.32/ следуют равенства

$$
\begin{aligned}
F_{m,\mu,\nu} &= \frac{1}{k_0+1} \sum_{\alpha,\beta=0}^{k_0} \Lambda_\alpha^{\mu} G_{m+\mu-\nu,\alpha,\beta} \Lambda_\beta^{-\nu}, \quad \mu,\nu=0,1,\dots,k_0,\\
F_{m,\mu,k_0+1} &= \sum_{\alpha=0}^{k_0} \Lambda_\alpha^{\mu} G_{m+\mu,\alpha,k_0+1}, \quad \mu=0,1,\dots,k_0,\\
F_{m,k_0+1,\nu} &= \frac{1}{k_0+1} \sum_{\beta=0}^{k_0} G_{m-\nu,k_0+1,\beta} \Lambda_\beta^{-\nu}, \quad \nu=0,1,\dots,k_0,\\
F_{m,k_0+1,k_0+1} &= G_{m,k_0+1,k_0+1}.
\end{aligned}
\qquad /1.35/
$$

С помощью этих равенств получаем, что

$$F_{m,\mu,\nu} \equiv 0 \quad \text{при} \quad m+\mu-\nu<0, \quad \mu,\nu=0,1,\dots,k_0,$$

$$F_{m,\mu,k_0+1} \equiv 0 \quad \text{при} \quad m+\mu<0, \quad \mu=0,1,\dots,k_0,$$

$$F_{m,k_0+1,\nu}\equiv 0 \quad \text{при} \quad m-\nu<0, \quad \nu=0,1,\dots,k_0, \qquad /1.36/$$

$$F_{m,k_0+1,k_0+1}\equiv 0 \quad \text{при} \quad m<0.$$

В действительности из уравнения /1.28/ на основании равенств /1.23/ и /1.24/ вытекает, что

$$G_{m,\mu,k_0+1}\equiv 0 \quad \text{при} \quad 0\le m\le k_0, \quad \mu=0,1,\dots,k_0.$$

Значит, согласно /1.35/ имеем

$$F_{m,\mu,k_0+1}\equiv 0 \quad \text{при} \quad m+\mu\le k_0, \quad \mu=0,1,\dots,k_0. \qquad /1.37/$$

Определим теперь операторы

$$D_{m,\mu}=\sum_{k=0}^{k_0}F_{m,\mu,k}\,\partial^k, \quad \mu=0,1,\dots,k_0,\ k_0+1,$$

$$\hat D_{m,\nu}=\sum_{k=0}^{k_0}\partial^{k_0-k}\cdot F_{m,k,\nu}+\sum_{k=1}^{k_0}u_k\sum_{k'=0}^{k-1}\partial^{k-k'-1}\cdot F_{m,k',\nu}, \qquad /1.38/$$

$$\nu=0,1,\dots,k_0,\ k_0+1.$$

Далее, положим

$$A_m=\begin{vmatrix} D_{m,0} & F_{m,0,k_0+1}\\ D_{m,k_0+1} & F_{m,k_0+1,k_0+1}\end{vmatrix}, \qquad /1.39/$$

$$\hat A_m=\begin{vmatrix} \hat D_{m,k_0} & \hat D_{m,k_0+1}\\ F_{m,k_0+1,k_0} & F_{m,k_0+1,k_0+1}\end{vmatrix}. \qquad /1.40/$$

Из равенств /1.39/ и /1.40/ в силу /1.36/-/1.38/ следует, что

$$A_m=\hat A_m=0 \quad \text{при} \quad -k_0\le m<0,$$

при $0\le m\le k_0$ согласно /1.33/ и /1.34/ имеем

$$I\cdot A_m=\hat A_m\cdot I, \qquad /1.41/$$

а при $m>k_0$ справедливо рекуррентное соотношение

$$X_0\cdot A_{m-k_0-1}-I\cdot A_m=\hat A_{m-k_0-1}\cdot X_0-\hat A_m\cdot I, \qquad /1.42/$$

где оператор X_0 получается из X вида /1/ при $\eta=0$, а $I=-\dfrac{\partial X}{\partial\eta}$.

Возьмем теперь произвольные величины $c_{m,\kappa}$ и положим

$$\mathcal{A}=\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{k_0}c_{m,\kappa}\sum_{r=0}^{m}A_{(k_0+1)r+\kappa}\,\eta^{m-r}+\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{p=0}^{p_s}\frac{\alpha_p^{(s)}}{(\eta-\eta_s)^{p_s-p+1}}, \qquad /1.43/$$

$$\hat{\mathcal{A}}=\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{k_0}c_{m,\kappa}\sum_{r=0}^{m}\hat A_{(k_0+1)r+\kappa}\,\eta^{m-r}+\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{p=0}^{p_s}\frac{\hat\alpha_p^{(s)}}{(\eta-\eta_s)^{p_s-p+1}}.$$

Далее, положим

$$T=\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{A}, \qquad \hat T=\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\mathcal{A}} \qquad /1.44/$$

и рассмотрим операторное соотношение

$$X\cdot T=\hat T\cdot X. \qquad /1.45/$$

Это соотношение эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial X}{\partial t}+[\mathcal{A},X]=\mathcal{B}\cdot X, \qquad \mathcal{B}=\mathcal{A}-\hat{\mathcal{A}}. \qquad /1.46/$$

Подставляя в /1.46/ выражения /1.43/, с помощью равенств /1.15/, /1.41/ и /1.42/ получаем уравнение

$$\frac{\partial X}{\partial t}+\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{k_0}c_{m,\kappa}\left(\hat A_{(k_0+1)(m+1)+\kappa}\cdot I-I\cdot A_{(k_0+1)(m+1)+\kappa}\right)=$$
$$=\sum_{s=1}^{s_0}\left(\hat\alpha^{(s)}_{p_s}\cdot I-I\cdot\alpha^{(s)}_{p_s}\right). \qquad /1.47/$$

На основании равенств /1.12/, /1.13/ и /1.38/-/1.40/ уравнение /1.47/ может быть записано в виде следующей системы:

$$\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{k_0}c_{m,\kappa}\Big(\Lambda_0^{-(k_0+1)}\cdot\hat D_{(k_0+1)(m+1)+\kappa,k_0}\cdot\Lambda_0^{k_0+1}-$$
$$-D_{(k_0+1)(m+1)+\kappa,0}\Big)=\sum_{s=1}^{s_0}\left(\Lambda_0^{-(k_0+1)}\cdot\hat d^{(s)}_{p_s,k_0}\cdot\Lambda_0^{k_0+1}-d^{(s)}_{p_s,0}\right), \qquad /1.48/$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{k_0}c_{m,\kappa}\,\Lambda_0^{k_0+1}F_{(k_0+1)(m+1)+\kappa,0,k_0+1}=$$
$$=-\sum_{s=1}^{s_0}\Lambda_0^{k_0+1}f^{(s)}_{p_s,0,k_0+1}, \qquad /1.49/$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{k_0} c_{m,\kappa}\, F_{(k_0+1)(m+1)+\kappa,\,k_0+1,\,k_0}\Lambda_0^{k_0+1} = \sum_{s=1}^{s_0} f^{(s)}_{p_s,\,k_0+1,\,k_0}\Lambda_0^{k_0+1}, \qquad /1.50/$$

где согласно определению оператора X вида /1/ полагаем

$$L=\Lambda_0^{-(k_0+1)}\Big(\partial^{k_0+1}+\sum_{k=0}^{k_0} u_k\partial^{k}\Big).$$

2. Редукция к операторам первого порядка. Равенство /1.45/ означает, что оператор T вида /1.44/ переводит любое решение $h=(\phi,\psi)$ уравнения /1.1/ в решение этого же уравнения. Таким образом, справедливо равенство

$$Th_a=\sum_{a'=1}^{(k_0+1)r_0+r_1} h_{a'}\omega_{a',a}, \quad a=1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1, \qquad /2.1/$$

где h_a - линейно-независимые решения уравнения /1.1/, а величины $\omega_{a',a}$ не зависят от x. Исходя из равенств /1.12/, /1.13/, /1.38/ и /1.43/, положим

$$\mathfrak{A}=\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{k_0}\mathcal{F}_{0,k}\partial^{k} & \mathcal{F}_{0,k_0+1} \\ \sum\limits_{k=0}^{k_0}\mathcal{F}_{k_0+1,k}\partial^{k} & \mathcal{F}_{k_0+1,k_0+1}\end{vmatrix}. \qquad /2.2/$$

Очевидно, что определенные таким образом матрицы $\mathcal{F}_{0,k}$ и $\mathcal{F}_{k_0+1,k}$, $k=0,1,\dots,k_0,\ k_0+1$ зависят рационально от параметра η. В том случае, когда в равенстве /1.43/ имеем $a_p^{(s)}=\hat{a}_p^{(s)}=0$, т.е. когда операторы $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ зависят полиномиально от параметра η, элементы матриц $\mathcal{F}_{0,k}$ и $\mathcal{F}_{k_0+1,k}$ также будут полиномами от параметра η. В силу /1.2/, /1.44/ и /2.2/ равенство /2.1/ запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial\phi_\nu}{\partial t}+\sum_{\kappa=0}^{k_0}\mathcal{F}_{0,\kappa}\frac{\partial^{\kappa}\phi_\nu}{\partial x^{\kappa}}+\mathcal{F}_{0,k_0+1}\psi_\nu=\sum_{\mu=0}^{k_0+1}\phi_\mu\Omega_{\mu,\nu}, \qquad /2.3/$$

$$\frac{\partial\psi_\nu}{\partial t}+\sum_{\kappa=0}^{k_0}\mathcal{F}_{k_0+1,\kappa}\frac{\partial^{\kappa}\phi_\nu}{\partial x^{\kappa}}+\mathcal{F}_{k_0+1,k_0+1}\psi_\nu=\sum_{\mu=0}^{k_0+1}\psi_\mu\Omega_{\mu,\nu}, \qquad /2.4/$$

где матрицы $\Omega_{\mu,\nu}$ образованы не зависящими от x величинами $\omega_{a',a}$. Дифференцируя равенство /2.3/ k раз по x, $k=1,\dots,k_0$, с учетом уравнения /1.1/ получаем

$$\frac{\partial^{k+1}\phi_\nu}{\partial t\,\partial x^{k}}+\sum_{\kappa=0}^{k_0}\mathcal{F}_{k,\kappa}\frac{\partial^{\kappa}\phi_\nu}{\partial x^{\kappa}}+\mathcal{F}_{k,k_0+1}\psi_\nu=\sum_{\mu=0}^{k_0+1}\frac{\partial^{k}\phi_\mu}{\partial x^{k}}\Omega_{\mu,\nu}, \qquad /2.5/$$

где при $0\le k<k_0$ и $0<\kappa\le k_0$ имеем

$$\mathcal{F}_{k+1,\kappa}=\frac{\partial\mathcal{F}_{k,\kappa}}{\partial x}+\mathcal{F}_{k,\kappa-1}-\mathcal{F}_{k,k_0}u_\kappa, \qquad /2.6/$$

а при $0\le k<k_0$ и $\kappa=0$ или $\kappa=k_0+1$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}_{k+1,0}=\frac{\partial\mathcal{F}_{k,0}}{\partial x}+\eta\mathcal{F}_{k,k_0}\Lambda_0^{k_0+1}-\mathcal{F}_{k,k_0}u_0-\mathcal{F}_{k,k_0+1}w, \qquad /2.7/$$

$$\mathcal{F}_{k+1,k_0+1}=\frac{\partial\mathcal{F}_{k,k_0+1}}{\partial x}-\mathcal{F}_{k,k_0}V. \qquad /2.8/$$

Полученные таким образом матрицы $\mathcal{F}_{\mu,\nu}$ образуют матрицу $\mathcal{F}$, у которой на пересечении строк с номерами $\mu r_0+1,\dots,(\mu+1)r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0+1,\dots,(\nu+1)r_0$ стоит матрица $\mathcal{F}_{\mu,\nu}$, $\mu,\nu=0,1,\dots,k_0$; на пересечении строк с номерами $\mu r_0+1,\dots,(\mu+1)r_0$ и столбцов с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$ стоит матрица $\mathcal{F}_{\mu,k_0+1}$, $\mu=0,1,\dots,k_0$; на пересечении строк с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$ и столбцов с номерами $\nu r_0+1,\dots,(\nu+1)r_0$ стоит матрица $\mathcal{F}_{k_0+1,\nu}$, $\nu=0,1,\dots,k_0$; и, наконец, на пересечении строк и столбцов с номерами $(k_0+1)r_0+1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$ стоит матрица $\mathcal{F}_{k_0+1,k_0+1}$. Положим

$$\mathcal{T}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{F},\quad \mathcal{X}=\frac{\partial}{\partial x}+U-\Gamma. \qquad /2.9/$$

Тогда равенства /2.3/-/2.5/ означают, что

$$\mathcal{T}W=W\Omega, \qquad /2.10/$$

где матрица Ω образована не зависящими от x величинами $\omega_{a',a}$, $a',a=1,\dots,(k_0+1)r_0+r_1$. На основании /1.3/ и /2.9/ справедливо равенство

$$\mathcal{X}W=0. \qquad /2.11/$$

Отсюда с помощью /2.10/ получаем

$$\mathcal{X}\mathcal{T}W=0. \qquad /2.12/$$

где матрицы Δ и δ образованы соответственно матрицами

$$\Delta_{k,\kappa} = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{k-\kappa-1} C_{s+\kappa}^{\kappa} \dfrac{\partial^s B_{k-\kappa-s-1}}{\partial x}, & \text{если} \quad 0 \le \kappa < k \le k_0, \\ 0, \text{ если } 0 \le k \le \kappa \le k_0+1 & \text{или} \quad k = k_0+1, 0 \le \kappa \le k_0+1, \end{cases}$$

$$\delta_{k,\kappa} = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{k-\kappa-1} C_{s+\kappa}^{\kappa} \dfrac{\partial^s \beta_{k-\kappa-s-1}}{\partial x^s}, & \text{если} \quad 0 \le \kappa < k \le k_0, \\ 0, \text{ если } 0 \le k \le \kappa \le k_0+1 & \text{или } k = k_0+1, 0 \le \kappa \le k_0+1. \end{cases}$$

Подставляя выражение /2.29/ в уравнение /2.14/, с помощью соотношений /1.14/ и /1.33/, /1.34/ получаем систему /1.48/-/1.50/.

3. Преобразование Миуры. С системой уравнений /1.48/-/1.50/ тесно связана приводимая ниже система уравнений. Эта связь определяется нелинейным преобразованием, аналогичным хорошо известному преобразованию Миуры, осуществляющему переход от уравнения Кортевега-де-Вриза к модифицированному уравнению Кортевега-де-Вриза. Для нахождения интересующего нас преобразования возьмем оператор

$$\mathfrak{L} = \partial + P \qquad /3.1/$$

с матрицей P вида

$$P = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{k_0} & q \\ p_{k_0} & p_0 & p_1 & \dots & p_{k_0-1} & q \\ p_{k_0-1} & p_{k_0} & p_0 & \dots & p_{k_0-2} & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_0 & q \\ w & w & w & \dots & w & 0 \end{vmatrix}, \qquad /3.2/$$

где $p_0, p_1, \dots, p_{k_0}$ - квадратные матрицы порядка r_0, q - прямоугольная матрица, имеющая r_0 строк и r_1 стобцов, а w - прямоугольная матрица, имеющая r_1 строк и r_0 стобцов. Рассмотрим, далее, уравнение

$$(\mathfrak{L} - \zeta\Lambda)\,\Phi = 0, \qquad /3.3/$$

где диагональная матрица Λ определена посредством равенства /1.25/. Возьмем теперь матрицу J вида

$$J = \begin{vmatrix} 0 & E_{r_0} & 0 \\ E_{k_0 r_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{r_1} \end{vmatrix}. \qquad /3.4/$$

С помощью /1.25/ и /3.2/ нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$[J, P] = 0, \quad J^{-1}\Lambda J = \epsilon\Lambda, \quad \epsilon = \exp\left(i\frac{2\pi}{k_0+1}\right). \qquad /3.5/$$

Возьмем, далее, матрицы R и $\mathfrak{S}$ следующего вида:

$$R = \begin{vmatrix} E_{r_0} & E_{r_0} & \dots & E_{r_0} & 0 \\ E_{r_0} & \epsilon_1 E_{r_0} & \dots & \epsilon_{k_0} E_{r_0} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{r_0} & \epsilon_1^{k_0} E_{r_0} & \dots & \epsilon_{k_0}^{k_0} E_{r_0} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{r_1} \end{vmatrix}, \qquad /3.6/$$

$$\mathfrak{S} = \begin{vmatrix} E_{r_0} & & & & 0 \\ & \epsilon_1 E_{r_0} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \epsilon_{k_0} E_{r_0} & \\ 0 & & & & E_{r_1} \end{vmatrix}, \qquad /3.7/$$

где $\epsilon_k = \exp\left(i\frac{2\pi k}{k_0+1}\right)$. Согласно /3.4/, /3.6/ и /3.7/ имеем

$$RJ = \mathfrak{S}R, \quad JR = R\mathfrak{S}^{-1}. \qquad /3.8/$$

Отсюда в силу /3.5/ следует, что матрица

$$Q = RPR^{-1} \qquad /3.9/$$

перестановочна с матрицей $\mathcal{E}$ вида /3.7/. Это значит, что матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{vmatrix} q_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (k_0+1)q \\ 0 & q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k_0} & 0 \\ w & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /3.10/$$

где $q_0, q_1, \dots, q_{k_0}$ – квадратные матрицы порядка r_0, связанные с матрицами $p_0, p_1, \dots, p_{k_0}$ равенствами

$$q_k = \sum_{\kappa=0}^{k_0} \epsilon_k^{-\kappa} p_\kappa, \quad p_k = \frac{1}{k_0+1} \sum_{\kappa=0}^{k_0} \epsilon_k^{\kappa} q_\kappa . \qquad /3.11/$$

Отсюда на основании /3.1/, /3.3/ и /3.9/ следует, что

$$\Psi = R\Phi \qquad /3.12/$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + Q\Psi = \zeta \hat{\Gamma} \Psi , \qquad /3.13/$$

где

$$\hat{\Gamma} = R \Lambda R^{-1} . \qquad /3.14/$$

С учетом /3.8/ и /3.14/ получаем

$$\hat{\Gamma} = J^{-1} \mathcal{E}^{-1} \Lambda . \qquad /3.15/$$

Положим теперь $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{k_0}, \Psi_{k_0+1})$, где Ψ_0, $\Psi_1, \dots, \Psi_{k_0}$ – векторы, имеющие r_0 компонент, а Ψ_{k_0+1} – вектор с r_1 компонентами. Тогда из уравнения /3.13/ с помощью /3.10/ и /3.15/ получаем систему

$w\Psi_0 = f_0 \psi_1$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_0 + q_0\Psi_0 + (k_0+1)q\Psi_{k_0+1} = \zeta\Lambda_0\Psi_1 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_k + q_k\Psi_k = \zeta\Lambda_0\Psi_{k+1}, \quad 0 < k < k_0 , \qquad /3.16/$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_{k_0} + q_{k_0}\Psi_{k_0} = \zeta\Lambda_0\Psi_0 , \quad \frac{\partial}{\partial x}\Psi_{k_0+1} + w\Psi_0 = 0.$$

Определим теперь операторы

$$D_k = \Lambda_0^{-1}(\partial + q_k), \quad k = 0,1,\dots,k_0 . \qquad /3.17/$$

Пусть, далее,

$$D = D_{k_0} \dots D_1 \cdot D_0 , \quad D' = D_{k_0} \dots D_1 . \qquad /3.18/$$

Тогда пара векторов

$$\phi = \Psi_0 , \quad \psi = \Psi_{k_0+1} \qquad /3.19/$$

согласно /3.16/ удовлетворяет системе уравнений

$$D\phi + (k_0+1)D'(q\psi) = \zeta^{k_0+1}\phi , \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi + w\phi = 0 . \qquad /3.20/$$

В силу /3.17/ и /3.18/ система /3.20/ может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial^{k_0+1}\phi}{\partial x^{k_0+1}} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k} + v\psi = \zeta^{k_0+1}\Lambda_0^{k_0+1}\phi , \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} + w\phi = 0,$$

где матрицы $u_0, u_1, \dots, u_{k_0}, v$ с учетом /3.11/ являются полиномами от матриц $p_0, p_1, \dots, p_{k_0}$, q, w и их производных по x, т.е.

$$u_k = g_k(p_0, p_1, \dots, p_{k_0}, q, w), \quad k = 0, 1, \dots, k_0 ,$$

$$v = h(p_0, p_1, \dots, p_{k_0}, q, w). \qquad /3.21/$$

Это значит, что определенный посредством /3.19/ вектор $h = (\phi, \psi)$ удовлетворяет уравнению /1.1/, если $\eta = \zeta^{k_0+1}$, а матрицы u_0, u_1, ..., u_{k_0}, v, входящие в определение оператора X вида /1/, связаны с матрицами p_0, p_1, ..., p_{k_0}, q, w, определяющими оператор $\mathfrak{L}$ вида /3.1/, соотношениями /3.21/.

Оператор $\mathfrak{L}$ вида /3.1/ порождает нелинейные эволюционные уравнения, получаемые следующим образом. Пусть A^*_0 - диагональная матрица с не зависящими от x диагональными элементами $a_1,\dots,a_{(k_0+1)r_0},\ a_{(k_0+1)r_0+1},\ \dots,\ a_{(k_0+1)r_0+r_1}$, удовлетворяющими условию

$$a_{(k_0+1)r_0+1}=\dots=a_{(k_0+1)r_0+r_1}. \qquad /3.22/$$

Определим матрицы A^*_m при $m>0$ так, чтобы выполнялось равенство

$$[\Lambda, A^*_m]-[P, A^*_{m-1}]-\frac{\partial A^*_{m-1}}{\partial x}=0. \qquad /3.23/$$

В силу /3.22/ равенство /3.23/ однозначно определяет матрицы A^*_m с номером $m>0$, если наложить дополнительное условие

$$A^*_m\equiv 0 \quad \text{при} \quad P\equiv 0, \quad m>0. \qquad /3.24/$$

При этом согласно результатам работы[1] элементы матрицы A^*_m при $m>0$ будут полиномами от элементов матрицы P и ее производных по x. Возьмем теперь произвольное целое число κ и положим $A^*_{0,\kappa}=\Lambda^{\kappa}$. Тогда на основании /3.5/ легко получаем, что определяемые соотношением /3.23/ и условием /3.24/ матрицы $A^*_{m,\kappa}$ удовлетворяют равенству

$$J^{-1}A^*_{m,\kappa}J=\epsilon^{\kappa-m}A^*_{m,\kappa}, \quad \epsilon=\exp\left(i\frac{2\pi}{k_0+1}\right). \qquad /3.25/$$

Пусть, далее, $\Phi=\Phi(x,\zeta)$ - фундаментальная матрица решений уравнения /3.3/, удовлетворяющая при некотором $x=x_0$ и произвольном $\zeta\in C$ условию $\Phi=E$. Тогда согласно /3.5/ справедливо равенство

$$J^{-1}\Phi(x,\zeta)J=\Phi(x,\epsilon\zeta).$$

Из этого равенства следует, что матрица

$$A^{(s)}=\Phi C^{(s)}\Phi^{-1}, \quad \frac{\partial C^{(s)}}{\partial x}=0, \qquad /3.26/$$

удовлетворяет условию

$$J^{-1}A^{(s)}(\zeta)J=\epsilon^{\mu_s}A^{(s)}(\epsilon\zeta), \qquad /3.27/$$

если матрица $C^{(s)}=C^{(s)}(\zeta)$, входящая в /3.26/, удовлетворяет условию

$$J^{-1}C^{(s)}(\zeta)J=\epsilon^{\mu_s}C^{(s)}(\epsilon\zeta).$$

Положим

$$A^{(0)}=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p\zeta^p.$$

Тогда на основании /3.27/ имеем

$$J^{-1}\alpha_pJ=\epsilon^{\mu_0+p}\alpha_p. \qquad /3.28/$$

Возьмем теперь произвольную точку $\zeta_s\in C$, $\zeta_s\neq 0$, $s=1,\dots,s_0$, и положим

$$A^{(s)}=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^{(s)}_{p,k}(\zeta-\epsilon^k\zeta_s)^p, \quad k=0,1,\dots,k_0.$$

С помощью /3.27/ имеем

$$J^{-1}\alpha^{(s)}_{p,k}J=\epsilon^{\mu_s+p}\alpha^{(s)}_{p,k+1}, \quad k=0,1,\dots,k_0, \qquad /3.29/$$

где $\alpha^{(s)}_{p,k_0+1}=\alpha^{(s)}_{p,0}$. Пусть, наконец,

$$\mathfrak{A}^*=\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{k_0}c^*_{m,\kappa}\sum_{r=0}^{(k_0+1)m+\kappa}A^*_{r,\kappa}\zeta^{(k_0+1)m+\kappa-r}+\sum_{p=0}^{p_0}\frac{\alpha_p}{\zeta^{p_0-p+1}}+\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{p=0}^{p_s}\sum_{k=0}^{k_0}\frac{\alpha^{(s)}_{p,k}}{(\zeta-\epsilon^k\zeta_s)^{p_s-p+1}}. \qquad /3.30/$$

Из равенств /3.25/, /3.28/ и /3.29/ легко следует, что определенная посредством /3.30/ матрица $\mathfrak{A}^*$ удовлетворяет условию

$$J^{-1}\mathfrak{A}^*(\zeta)J=\mathfrak{A}^*(\epsilon\zeta), \qquad /3.31/$$

если существуют целые числа q_s, такие, что

$$\mu_s+p_s+1=(k_0+1)q_s, \quad s=0,1,\dots,s_0.$$

Отсюда следует, что условие совместности $[T^*,X^*]=0$ операторов T^* и X^* вида

$$T^*=\frac{\partial}{\partial t}+\mathfrak{A}^*, \qquad X^*=\mathfrak{L}-\zeta\Lambda$$

корректным образом определяет следующее нелинейное эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{A}^*}{\partial x}-[P,\mathfrak{A}^*]+\zeta[\Lambda,\mathfrak{A}^*]=0. \qquad /3.32/$$

Равенства /3.21/ устанавливают связь между системой /1.48/-/1.50/ и уравнением /3.32/. Действительно, на основании /3.31/ матрица $\mathcal{A}^*$ имеет следующую структуру:

$$\mathcal{A}^* = \left|\begin{array}{cccccc} a_0(\zeta) & a_1(\zeta) & a_2(\zeta) & \dots & a_{k_0}(\zeta) & a_{k_0+1}(\zeta) \\ a_{k_0}(\epsilon\zeta) & a_0(\epsilon\zeta) & a_1(\epsilon\zeta) & \dots & a_{k_0-1}(\epsilon\zeta) & a_{k_0+1}(\epsilon\zeta) \\ a_{k_0-1}(\epsilon^2\zeta) & a_{k_0}(\epsilon^2\zeta) & a_0(\epsilon^2\zeta) & \dots & a_{k_0-2}(\epsilon^2\zeta) & a_{k_0+1}(\epsilon^2\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1(\epsilon^{k_0}\zeta) & a_2(\epsilon^{k_0}\zeta) & a_3(\epsilon^{k_0}\zeta) & \dots & a_0(\epsilon^{k_0}\zeta) & a_{k_0+1}(\epsilon^{k_0}\zeta) \\ a_{k_0+2}(\zeta) & a_{k_0+2}(\epsilon\zeta) & a_{k_0+2}(\epsilon^2\zeta) & \dots & a_{k_0+2}(\epsilon^{k_0}\zeta) & a_{k_0+3}(\zeta) \end{array}\right|$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{k_0}$ - квадратные матрицы порядка r_0, a_{k_0+1} - прямоугольная матрица, имеющая r_0 строк и r_1 столбцов, a_{k_0+2} - прямоугольная матрица, имеющая r_1 строк и r_0 столбцов, и, наконец, a_{k_0+3} - квадратная матрица порядка r_1. Матрицы a_0, $a_1, \dots, a_{k_0+2}$ зависят рациональным образом от параметра ζ, причем $a_{k_0+3}(\zeta) = a_{k_0+3}(\epsilon\zeta)$. Согласно /3.32/ фундаментальную матрицу решений $\hat{\Phi}$ уравнения /3.3/ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t} + \mathcal{A}^*\hat{\Phi} = 0. \qquad /3.33/$$

Возьмем теперь произвольный столбец Φ матрицы $\hat{\Phi}$ и положим $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{k_0}, \Phi_{k_0+1})$, где $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{k_0}$ - векторы, имеющие r_0 компонент, а Φ_{k_0+1} - вектор с r_1 компонентами. Из равенства /3.33/ следует, что определенные посредством /3.12/ и /3.19/ вектора ϕ и ψ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{k=0}^{k_0} a(\epsilon^k\zeta)\Phi_k + b(\zeta)\psi = 0, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{k=0}^{k_0} c(\epsilon^k\zeta)\Phi_k + d(\zeta)\psi = 0, \end{aligned} \qquad /3.34/$$

где

$$a(\zeta) = \sum_{k=0}^{k_0} a_k(\epsilon^{k_0-k+1}\zeta), \qquad c(\zeta) = a_{k_0+2}(\zeta),$$

$$b(\zeta) = \sum_{k=0}^{k_0} a_{k_0+1}(\epsilon^k\zeta), \qquad d(\zeta) = a_{k_0+3}(\zeta).$$

Очевидно, что выполнены равенства $b(\zeta) = b(\epsilon\zeta)$, $d(\zeta) = d(\epsilon\zeta)$. Положим теперь $L_0 = \phi$, $L_1 = D_0\phi + (k_0+1)\Lambda_0^{-1}q\psi$, а при $0 < k < k_0$ пусть $L_{k+1} = D_k L_k$, где операторы D_k определены посредством /3.17/. Тогда с помощью /3.16/ получаем $\Psi_k = \zeta^{-k} L_k$, $k = 0, 1, \dots, k_0$. Отсюда с учетом /3.6/ и /3.12/ следует равенство

$$\Phi_k = \frac{1}{k_0+1}\sum_{\kappa=0}^{k_0} \epsilon^{-k\kappa}\zeta^{-\kappa} L_\kappa, \qquad k = 0, 1, \dots, k_0.$$

Подставляя полученное выражение для Φ_k в /3.34/, в результате будем иметь равенства

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{k=0}^{k_0} \tilde{\mathcal{F}}_{0,k}\frac{\partial^k\phi}{\partial x^k} + \tilde{\mathcal{F}}_{0,k_0+1}\psi = 0, \qquad /3.35/$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{k=0}^{k_0} \tilde{\mathcal{F}}_{k_0+1,k}\frac{\partial^k\phi}{\partial x^k} + \tilde{\mathcal{F}}_{k_0+1,k_0+1}\psi = 0, \qquad /3.36/$$

где матрицы $\tilde{\mathcal{F}}_{0,k}$ и $\tilde{\mathcal{F}}_{k_0+1,k}$ зависят рационально от параметра ζ и удовлетворяют условиям

$$\tilde{\mathcal{F}}_{0,k}(\zeta) = \tilde{\mathcal{F}}_{0,k}(\epsilon\zeta), \quad \tilde{\mathcal{F}}_{k_0+1,k}(\zeta) = \tilde{\mathcal{F}}_{k_0+1,k}(\epsilon\zeta). \qquad /3.37/$$

Равенства /3.37/ означают, что элементы матриц $\tilde{\mathcal{F}}_{0,k}$ и $\tilde{\mathcal{F}}_{k_0+1,k}$ в действительности являются рациональными функциями параметра $\eta = \zeta^{k_0+1}$. Далее, как уже отмечалось выше, при выполнении условий /3.21/ определенный посредством /3.19/ вектор $h = (\phi, \psi)$ удовлетворяет уравнению /1.1/. Причем получаемые из различных столбцов Φ матрицы $\hat{\Phi}$ вектора h на основании /3.12/ и /3.16/ образуют матрицу Вронского $\hat{W}$ уравнения /1.1/ с отличным от нуля определителем. В этой ситуации равенства /3.35/ и /3.36/ позволяют определить матрицу $\mathcal{F}$, удовлетворяющую уравнению /2.14/. Сходная задача уже рассматривалась в предыдущем пункте. Определенные с помощью матрицы $\mathcal{F}$ операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ согласно /2.14/ удовлетворяют уравнению /1.46/. Из этих рассуждений вытекает следующая

Теорема. При замене /3.21/ уравнение /3.32/ переходит в систему /1.48/-/1.50/.

Доказательство этой теоремы весьма сходно с доказательством аналогичного утверждения в работе [2] и поэтому опущено. Справедливость этого утверждения для приводимых ниже примеров может быть проведена непосредственно.

4. Примеры. В качестве простейшего примера возьмем следующие матрицы U и Γ вида /1.4/:

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & v \\ w & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Пусть, далее, матрица $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F} = c \begin{vmatrix} 0 & 0 & v \\ -vw & 0 & v' \\ -w' & w & \eta \end{vmatrix}.$$

В этой ситуации уравнение /2.14/ эквивалентно следующей системе:

$$\dot{u} + 2c(vw)' = 0, \quad \dot{v} = c(uv + v''), \quad \dot{w} + c(uw + w'') = 0. \qquad /4.1/$$

При $\operatorname{Im} u = 0$, $c = i$, $w = \pm i\bar{v}$ система /4.1/ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm 2 \frac{\partial |v|^2}{\partial x}, \quad i\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv = 0. \qquad /4.2/$$

В качестве следующего примера возьмем матрицы U и Γ вида

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_0 & u_1 & 0 & v \\ w & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а матрицу $\mathcal{F}$ положим равной

$$\mathcal{F} = c \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u_1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}u_1' - u_0 + \eta & -\frac{1}{3}u_1 & 0 & -v \\ \frac{2}{3}u_1'' - u_0' + vw & \frac{1}{3}u_1' - u_0 + \eta & -\frac{1}{3}u_1 & -v' \\ w' & -w & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В этом случае с помощью уравнения /2.14/ получаем систему

$$\dot{u}_0 = \frac{2c}{3}u_1u_1' + 2c(vw)' - cu_0'' + \frac{2c}{3}u_1''', \quad \dot{u}_1 = -2cu_0' + cu_1'',$$
$$\dot{v} + \frac{2c}{3}u_1 v + cv'' = 0, \qquad \dot{w} = \frac{2c}{3}u_1 w + cw''. \qquad /4.3/$$

Из первых двух уравнений этой системы удается исключить u_0 и получить уравнение для $u = \frac{2}{3}u_1$ вида

$$\ddot{u} + c^2\left(u^2 + \frac{8}{3}vw + \frac{1}{3}u''\right)'' = 0.$$

Полагая, далее, $c = i$, $w = \pm\bar{v}$, в результате получим следующую систему:

$$\ddot{u} - \left(u^2 \pm \frac{8}{3}|v|^2 + \frac{1}{3}u''\right)'' = 0, \quad i\dot{v} = v'' + uv. \qquad /4.4/$$

Наконец, в качестве последнего примера возьмем

$$U = \begin{vmatrix} & & 0 & & \\ u_0 & u_1 & u_2 & 0 & v \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & E_3 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{F} = c \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}u_2' & \frac{1}{2}u_2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}u_2'' - u_0 + \eta & u_2' - u_1 & -\frac{1}{2}u_2 & 0 & -v \\ \frac{1}{2}u_2''' - u_0' + vw & \frac{3}{2}u_2'' - u_1' - u_0 + \eta & \frac{1}{2}u_2' - u_1 & -\frac{1}{2}u_2 & -v' \\ w' & -w & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теорема. При замене /3.21/ уравнение /3.32/ переходит в систему /1.48/-/1.50/.

Доказательство этой теоремы весьма сходно с доказательством аналогичного утверждения в работе [2] и поэтому опущено. Справедливость этого утверждения для приводимых ниже примеров может быть проведена непосредственно.

4. Примеры. В качестве простейшего примера возьмем следующие матрицы U и Γ вида /1.4/:

$$U=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & v \\ w & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Пусть, далее, матрица $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}=c\begin{vmatrix} 0 & 0 & v \\ -vw & 0 & v' \\ -w' & w & \eta \end{vmatrix}.$$

В этой ситуации уравнение /2.14/ эквивалентно следующей системе:

$$\dot u + 2c(vw)' = 0, \quad \dot v = c(uv + v''), \quad \dot w + c(uw + w'') = 0 . \qquad /4.1/$$

При $\operatorname{Im} u = 0$, $c = i$, $w = \pm i\bar v$ система /4.1/ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm 2\frac{\partial |v|^2}{\partial x}, \quad i\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv = 0 . \qquad /4.2/$$

В качестве следующего примера возьмем матрицы U и Γ вида

$$U=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_0 & u_1 & 0 & v \\ w & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а матрицу $\mathcal{F}$ положим равной

$$\mathcal{F}=c\begin{vmatrix} \frac{2}{3}u_1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}u_1' - u_0 + \eta & -\frac{1}{3}u_1 & 0 & -v \\ \frac{2}{3}u_1'' - u_0' + vw & \frac{1}{3}u_1' - u_0 + \eta & -\frac{1}{3}u_1 & -v' \\ w' & -w & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В этом случае с помощью уравнения /2.14/ получаем систему

$$\dot u_0 = \frac{2c}{3}u_1 u_1' + 2c(vw)' - cu_0'' + \frac{2c}{3}u_1''', \quad \dot u_1 = -2cu_0' + cu_1'',$$
$$\dot v + \frac{2c}{3}u_1 v + cv'' = 0, \quad \dot w = \frac{2c}{3}u_1 w + cw''. \qquad /4.3/$$

Из первых двух уравнений этой системы удается исключить u_0 и получить уравнение для $u = \frac{2}{3}u_1$ вида

$$\ddot u + c^2\left(u^2 + \frac{8}{3}vw + \frac{1}{3}u''\right)'' = 0 .$$

Полагая, далее, $c = i$, $w = \pm\bar v$, в результате получим следующую систему:

$$\ddot u - \left(u^2 \pm \frac{8}{3}|v|^2 + \frac{1}{3}u''\right)'' = 0, \quad i\dot v = v'' + uv . \qquad /4.4/$$

Наконец, в качестве последнего примера возьмем

$$U=\begin{vmatrix} \multicolumn{5}{c}{0} \\ u_0 & u_1 & u_2 & 0 & v \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma=\begin{vmatrix} 0 & E_3 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{F}=c\begin{vmatrix} \frac{1}{2}u_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}u_2' & \frac{1}{2}u_2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}u_2'' - u_0 + \eta & u_2' - u_1 & -\frac{1}{2}u_2 & 0 & -v \\ \frac{1}{2}u_2''' - u_0' + vw & \frac{3}{2}u_2'' - u_1' - u_0 + \eta & \frac{1}{2}u_2' - u_1 & -\frac{1}{2}u_2 & -v' \\ w' & -w & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Получаемая в этом случае система уравнений согласно /2.14/ имеет вид

$$\dot u_0 = c\left[\frac{1}{2}u_2^{IV} + \frac{1}{2}u_1 u_2' + \frac{1}{2}u_2 u_2'' - u_0'' + 2(vw)'\right],$$

$$\dot u_1 = c\left(2u_2'' - u_1' - 2u_0 + \frac{1}{2}u_2^2\right)', \quad \dot u_2 = 2c(u_2' - u_1)', \qquad /4.5/$$

$$\dot v + c\left(v'' + \frac{1}{2}u_2 v\right) = 0, \quad \dot w = c\left(w'' + \frac{1}{2}u_2 w\right).$$

Положим $u_2 = 2u$, $u_1 = 2u' + \mu$, $u_0 = u^2 + u'' + \frac{1}{2}\mu' + \theta$. В результате первые три уравнения системы /4.5/ примут вид

$$\dot\theta = c\left[u'\mu + 2u\mu' + \frac{1}{2}\mu''' + 2(vw)'\right],$$

$$\dot\mu + 2c\theta' = 0, \quad \dot u + c\mu' = 0.$$

После исключения θ получаем

$$\ddot\mu + 2c^2\left[u'\mu + 2u\mu' + \frac{1}{2}\mu''' + 2(vw)'\right]' = 0, \quad \dot u + c\mu' = 0.$$

Положим теперь $c = i$, $w = \pm i\bar v$, $\mu = i\sigma$. В результате система /4.5/ примет вид

$$i\dot v = v'' + uv, \quad \dot u - \sigma' = 0,$$

$$\ddot\sigma - \left(4u\sigma' + 2u'\sigma + \sigma''' \pm 4\frac{\partial}{\partial x}|v|^2\right)' = 0. \qquad /4.6/$$

В заключение необходимо отметить, что все уравнения вида /2.14/ обладают рядом замечательных свойств. Все они допускают бесконечномерную группу симметрий и, как следствие, имеют несколько бесконечных серий локальных законов сохранения. Детальному рассмотрению этих вопросов, а также применению метода обратной задачи к нахождению решений этих уравнений /в частности, систем /4.2/, /4.4/ и /4.6// будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В.К. Матем.сб., 1979, 108, с.378-392.
2. Мельников В.К. ОИЯИ, Р2-81-205, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 мая 1982 года.

Мельников В.К. Р2-82-337

Некоторые новые вполне интегрируемые модели самосогласованного поля

Рассмотрен новый класс нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Среди уравнений этого класса найдено несколько моделей самосогласованного поля, описываемых уравнением Шредингера и нелинейным уравнением, определяющим эволюцию во времени потенциала уравнения Шредингера.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Mel'nikov V.K. P2-82-337

Some New Completely Integrable Models of Self-Consistent Field

A new class of nonlinear evolution equations integrable by the inverse problem method is considered. Among the equations of this class several models of self-consistent field are found, which are described by the Schrödinger equation and the nonlinear equation defining evolution in time of the Schrödinger equation potential.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

П.