объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-296

А.Б.Говорков

КАЛИБРОВОЧНЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ГИПЕР (ПАРА) ПОЛЕЙ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Если в физике элементарных частиц встречается вырождение по какой-либо внутренней координате, то можно рассматривать такие частицы как тождественные, но подчиняющиеся не обычным ферми- или бозе-статистикам, а промежуточным /пара/ статистикам. Поясним сказанное примером с нейтроном и протоном. Считая возможным произвести /мысленное/ выключение электрослабого взаимодействия и предполагая при этом равенство их масс, мы будем иметь две одинаковые частицы - нуклоны, не различимые в сильных взаимодействиях, но подчиняющиеся не ферми-, а параферми-статистике второго порядка, допускающей помещение двух тождественных частиц в одно и то же квантовомеханическое состояние. Соответствующей ей теорией поля является теория Грина-Волкова параферми-поля второго порядка [1,2]. Возможность описания изоспиновой симметрии /и ее нарушения/ в рамках этой теории рассматривалась ранее в работах [3-5].

Теперь мы сформулируем общий эвристический принцип: при наличии точного вырождения частиц по какой-либо внутренней координате этим частицам должна быть сопоставлена теория единственного параполя, порядок которого совпадает с числом вырожденных состояний. При наличии приближенного вырождения описывающая этот случай алгебра полей должна содержать подалгебру соответствующего параполя.

Такой подход, соединенный с требованием локальности взаимодействия полей, оказывается весьма избирательным в отношении различных теорий внутренних симметрий. Было показано, например, что в теории параполей из всех теорий янг-миллсовского типа выделяется единственно теория калибровочной $SO(3)$ -симметрии [6]. Доказательство было основано, однако, на возможности построения в теории параполей "копий" соответствующих янг-миллсовских лагранжианов. Желательно, однако, сформулировать калибровочный принцип непосредственно в терминах самих параполей. В данной работе эта цель достигается посредством использования для параполей гиперкомплексного представления на основе алгебры Клиффорда. Параполя, выраженные в таком специальном представлении, мы будем называть гиперполями. Ранее возможность такого представления указывалась в работах [4,5,7,8]. Мы опишем его в разделе 2. В разделе 3 будет дана формулировка калибровочного принципа для гиперполей и произведено исследование возникающих калибровочных лагранжианов для последовательно увеличивающихся порядков параполей. Результаты рассмотрения кратко сформулированы в заключительном разделе.

2. ГИПЕРПОЛЯ

Рассмотрим совокупность p вырожденных по массе фермионных полей, описываемых свободным дираковским лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{\text{св}}(x) = \sum_{A=1}^{p} \bar{\Psi}_A(x)(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi_A(x) . \qquad /1/$$

Поля $\Psi_A(x)$ и ему дираковски-сопряженное $\bar{\Psi}_A(x)$ подчиняются обычным антикоммутационным соотношениям:

$$\{\bar{\Psi}_A(x),\ \Psi_B(y)\} = -i\delta_{AB} S(y-x),$$

$$\{\Psi_A(x),\ \Psi_B(y)\} = \{\bar{\Psi}_A(x),\ \bar{\Psi}_B(y)\} = 0 . \qquad /2/$$

Здесь фигурные скобки означают антикоммутатор. Квадратные скобки в дальнейшем будут обозначать коммутатор.

Исходя из ранее сформулированного принципа будем считать, что форма /1/ должна быть заменена /и являться следствием/ квадратичной формы для одного парафермиполя $\psi(x)$:

$$\mathcal{L}_{\text{св.}}(x) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ (i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi(x)] . \qquad /3/$$

Необходимость использования коммутаторов /антикоммутаторов/ для наблюдаемых величин в теории парафермиаразбозе/-поля, описывающего парафермиапарабозе/-статистику, была показана в [9]. Параполе $\psi(x)$ удовлетворяет общим соотношениям Грина [1]:

$$[\psi(x),\ [\bar{\psi}(y),\ \psi(z)]] = -2iS(x-y)\psi(z) , \qquad /4а/$$

$$[\psi(x),\ [\psi(y),\ \psi(z)]] = 0 , \qquad /4б/$$

и соотношениям, получающимся из них путем применения тождества Якоби и эрмитового сопряжения, а также частным соотношениям, фиксирующим порядок парастатистики /трилинейным при p =2 [1,2], четырехлинейным при p =3 и т.д. [10,11] /.

Предположим теперь, что параполе можно представить в виде линейной комбинации обычных ферми-полей /2/:

$$\psi(x) = \sum_{A=1}^{p} a_A \Psi_A(x), \qquad /5а/$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{A=1}^{p} a^+_A \bar{\Psi}_A(x) , \qquad /5б/$$

где a_A и a^+_A представляют собою некоторые пока неизвестные алгебраические величины - гиперчисла, причем заранее не предполагается, что $a^+_A = a_A$, предполагается лишь, что $(a^+_A)^+ = a_A$. Подстановка /5а,б/ в /4а,б/ приводит к следующим условиям:

$$[a_C, \{a_A, a_B\}] = 0, \quad \text{для любых A,B,C,} \qquad /6а/$$

$$[a_C, \{a^+_A, a_B\}] = 0 \qquad /6б/$$

$$\sum_{A=1}^{p} a_A \{a^+_A, a_B\} = 2a_B , \qquad /6в/$$

$$[a_B,\ \sum_{A=1}^{p} a_A a^+_A] = 0 \quad \text{при любом B.} \qquad /6г/$$

Кроме того, эрмитовое сопряжение /6б/ дает

$$[a^+_C, \{a^+_A, a_B\}] = 0 \quad \text{для любых A,B,C.} \qquad /6д/$$

Наконец, следствием /6б/ является

$$[a^+_A, \{a_C, a_B\}] \equiv -[a_C, \{a^+_A, a_B\}] - [a_B, \{a^+_A, a_C\}] = 0 . \qquad /6е/$$

Согласно /6а,б,д, и е/ антикоммутаторы $\{a^+_A, a_B\}$ и $\{a_A, a_B\}$ коммутируют со всеми a_A и a^+_A и потому должны быть просто числами

$$\{a^+_A, a_B\} = f_{AB} , \qquad /7а/$$

$$\{a_A, a_B\} = h_{AB} . \qquad /7б/$$

Подстановка /7а/ в /6в/ определяет значение $f_{AB} = 2\delta_{AB}$. Теперь из /6г/ получаем

$$[a_B,\ \sum a_A a^+_A] = \sum_A (\{a_A, a_B\} a^+_A - 2\delta_{AB} a_A) =$$

$$= \sum_A h_{AB} a^+_A - 2a_B = 0 .$$

Отсюда следует, что a_B является линейной комбинацией a^+_A. Всегда можно выбрать h_{AB} так, что

$$a_B = a^+_B$$

и вместо /7а,б/

$$\{a_A, a_B\} = 2\delta_{AB} . \qquad /7/$$

Таким образом, комбинации /5а/ и /5б/ /при $a_A^+ = a_A$/являются гриновскими параполями, если и только если входящие в них гиперчисла a_A представляют собою клиффордовы числа, подчиняющиеся /7/. Легко проверить, что при этом форма /3/ превращается в /1/. Поле /5/ действительно описывает частицы, подчиняющиеся параферми-статистике порядка p, поскольку их число в симметричном состоянии не может превосходить p:

$$\sum_{\mathcal{P}} \mathcal{P}\{\psi^{(+)*}(\vec{x}_1, s_1)\ldots\psi^{(+)*}(\vec{x}_N, s_N)\} = 0 \quad \text{при} \quad N > p.$$

Здесь $\psi^{(+)*}(\vec{x}, s)$ - оператор рождения частицы в пространственной точке $\vec{x}$ с проекцией спина s, а $\mathcal{P}$ - произвольная перестановка индексов $1,\ldots,N$.

Поля, представимые в виде /5/, будем называть гиперполями.

3. КАЛИБРОВОЧНЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ГИПЕРПОЛЕЙ

Лагранжиан /1/ или /3/ является скаляром и потому инвариантен относительно следующих преобразований гиперполей:

$$\psi'(x) = e^{i\phi}\psi(x)e^{-i\phi}, \quad \bar{\psi}'(x) = e^{i\phi}\bar{\psi}(x)e^{-i\phi}, \qquad /8/$$

где ϕ является произвольным самосопряженным гиперкомплексным числом из алгебры Клиффорда:

$$\phi = \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{A_1,\ldots,A_k=1}^{p} (i)^{k(k-1)/2} \phi^{A_1\ldots A_k} a_{A_1}\ldots a_{A_k}/k! . \qquad /9/$$

Коэффициенты $\phi^{A_1\ldots A_k}$ представляют собою произвольные вещественные числа, антисимметричные относительно перестановок индексов $A_1,\ldots,A_k$. Очевидно, фазы, соответствующие обычным числам /k =0/, а также гиперчислу $a_1\ldots a_p$ при нечетном p, коммутирующему в этом случае со всеми a_A, выпадают и потому максимальное число k_m в сумме /9/ составляет всегда четное число /p в случае четного p и p-1 в случае нечетного p /.

Очевидна также инвариантность гриновских паракоммутационных соотношений /4/ относительно преобразований /8/.

Отметим, что можно рассматривать преобразование /8/ как переход от одного канонического базиса алгебры Клиффорда к другому:

$$a'_A = e^{i\phi} a_A e^{-i\phi}, \quad A = 1,\ldots,p, \qquad /10/$$

а инвариантность лагранжиана /3/ и паракоммутационных соотношений /4/ - как инвариантность теории относительно такого внутреннего автоморфизма алгебры Клиффорда.

Калибровочный принцип для гиперполей формулируется как требование инвариантности не только относительно глобальных преобразований /8/, но и относительно локальных преобразований, когда гиперкомплексные фазы становятся функциями

координат и времени. Можно сказать, что оно означает независимость теории от различного выбора канонического базиса алгебры Клиффорда в различных точках пространства и времени:

$$a'_A(x) = e^{i\phi(x)} a_A e^{-i\phi(x)}, \quad A = 1,\ldots,p. \qquad /11/$$

Для того, чтобы указанное требование выполнялось, необходимо предположить существование дополнительного векторного гипербозонного поля:

$$g_\mu(x) = \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{A_1,\ldots,A_k=1}^{p} (i)^{k(k-1)/2} G_\mu^{A_1\ldots A_k}(x)\, a_{A_1}\ldots a_{A_k}/k!, \qquad /12/$$

составленного из обычных бозонных полей $G_\mu^{A_1\ldots A_k}(x)$, антисимметричных относительно перестановок индексов $A_1,\ldots,A_k$ и удовлетворяющих соотношениям

$$[G_\mu^{A_1\ldots A_k}(x), G_\nu^{B_1\ldots B_k}(y)] = -i\Delta_{\mu\nu}(x-y)\sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\eta(\mathcal{P})}\delta_{A_1 B_{\mathcal{P}_1}}\ldots\delta_{A_k B_{\mathcal{P}_k}}, \qquad /13/$$

где $\mathcal{P}$ - перестановки индексов $1,\ldots,k$, а $\eta(\mathcal{P})$ - их четности.

Ковариантная производная определяется в виде

$$D_\mu(x) = \partial_\mu - \frac{ig}{2} g_\mu(x), \qquad /14/$$

где g - постоянная взаимодействия. Следует подчеркнуть, что ковариантная производная /14/ всегда должна входить в коммутатор с тем полем, на которое она действует. Только тогда имеет место ковариантное преобразование

$$[D'_\mu(x), \psi'(x)] = e^{i\phi(x)}[D_\mu(x), \psi(x)]e^{-i\phi(x)}, \qquad /15/$$

если, кроме того, гипербозонное поле /12/ имеет такой закон преобразования:

$$g'_\mu(x) = e^{i\phi} g_\mu(x) e^{-i\phi} - \frac{2i}{g}(\partial_\mu e^{i\phi})e^{-i\phi}. \qquad /16/$$

Ковариантный тензор напряженностей гипербозонного поля определяется как коммутатор ковариантных производных:

$$F_{\mu\nu} = \frac{2i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu g_\nu - \partial_\nu g_\mu - \frac{ig}{2}[g_\mu, g_\nu]. \qquad /17/$$

Таким образом, калибровочный принцип для гиперполей приводит к следующему лагранжиану:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(x) + \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), [i\partial_\mu + \frac{g}{2}g_\mu(x), \gamma_\mu\psi(x)]] - \frac{m}{2}[\bar{\psi}(x), \psi(x)]. \qquad /18/$$

Здесь и ниже все выражения подразумеваются в нормальной форме, то есть как выражения, из которых вычтены средние по вакууму.

При преобразованиях /11/, /16/ этот лагранжиан, вообще говоря, изменяется:

$$\mathfrak{L}'(\psi', g'_\mu) = e^{i\phi(x)}\, \mathfrak{L}(\psi, g_\mu)\, e^{-i\phi(x)} \quad . \qquad /19/$$

Наше требование будет заключаться в том, чтобы он был инвариантом или являлся гиперскаляром:

$$\mathfrak{L}'(\psi', g'_\mu) = \mathfrak{L}(\psi, g_\mu). \qquad /20/$$

Оказывается, это требование приводит к резкому отбору допустимых лагранжианов. Ему удовлетворяют лишь лагранжианы в теории 2-го, 3-го и при некотором ограничении 4-го порядков, тогда как для высших порядков требование /20/ не выполняется никогда. Для того, чтобы в этом убедиться, начнем последовательное рассмотрение различных порядков.

p =2. Гиперфермионное поле представляет собою параферми-поле второго порядка:

$$\psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 \ , \quad \bar\psi = a_1 \bar\Psi_1 + a_2 \bar\Psi_2 \ , \qquad /21/$$

а гипербозонное поле /12/ - парабозе-поле третьего порядка:

$$g_\mu = a_1 G^1_\mu + a_2 G^2_\mu + i a_1 a_2 G^{12}_\mu \ . \qquad /22/$$

Лагранжиан /18/ приобретет вид

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}\vec F^2_{\mu\nu} + \bar\Psi (i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi - g G^{12}_\mu \bar\Psi \sigma\gamma_\mu \Psi \ , \qquad /23/$$

где $\Psi(\bar\Psi)$ представляет собою столбец /строку/

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}, \quad \bar\Psi = (\bar\Psi_1 \ , \bar\Psi_2 \ ),$$

на который действует матрица

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор напряженностей векторного поля является изовектором

$$\vec F_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec G_\nu - \partial_\nu \vec G_\mu - g\vec G_\mu \times \vec G_\nu \ ,$$
$$\vec G_\mu = (G^1_\mu \ , G^2_\mu \ , G^{12}_\mu \ ) \ . \qquad /24/$$

Знак $\times$ означает векторное произведение.

Лагранжиан /23/ не содержит гиперчисел a_A и потому инвариантен относительно преобразований /19/. Однако в смысле обычной калибровочной SU(2) -симметрии он не является инвариантом, поскольку взаимодействие выделяет одну из компонент изовекторного тока $\bar\Psi \vec\sigma \Psi$ и поля G_μ .

p =3. В этом случае гиперфермионное поле представляет собою параферми-поле третьего порядка:

$$\psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 + a_3 \Psi_3 \ , \quad \bar\psi = a_1 \bar\Psi_1 + a_2 \bar\Psi_2 + a_3 \bar\Psi_3 \ . \qquad /25/$$

Гипербозонное поле записывается в виде

$$g_\mu = a_1 G^1_\mu + a_2 G^2_\mu + a_3 G^3_\mu + i a_1 a_2 G^{12}_\mu + i a_1 a_3 G^{13}_\mu +$$
$$+ i a_2 a_3 G^{23} + i a_1 a_2 a_3 G^{123} \ .$$

Однако гиперчисло

$$i' = a_1 a_2 a_3$$

коммутирует со всеми a_1, a_2, a_3 , и потому поле G^{123}_μ должно быть исключено. Далее, i' можно считать обычным числом $i = \sqrt{-1}$, и поэтому

$$a_1 a_2 = i a_3 \ .$$

Теперь можно объединить поля G^1_μ и G^{23}_μ , G^2_μ и G^{13}_μ , G^3_μ и G^{12}_μ и записать окончательно гипербозонное поле в виде

$$g_\mu = a_1 G^1_\mu + a_2 G^2_\mu + a_3 G^3_\mu \ . \qquad /26/$$

Оно является парабозе-полем третьего порядка. Лагранжиан /18/ записывается в виде

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}\vec F^2_{\mu\nu} + \bar{\vec\Psi}\cdot(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\vec\Psi - i g \vec G_\mu \cdot \bar{\vec\Psi} \times \vec\Psi \ , \qquad /27/$$

$\vec\Psi$ и $\vec G_\mu$ есть векторы:

$$\vec\Psi = (\Psi_1 \ , \Psi_2 \ , \Psi_3 \ ), \quad \vec G_\mu = (G^1_\mu \ , G^2_\mu \ , G^3_\mu \ ). \qquad /28/$$

Тензор напряженностей поля

$$\vec F_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec G_\nu - \partial_\nu \vec G_\mu + g\vec G_\mu \times \vec G_\nu \ . \qquad /29/$$

Лагранжиан /27/ является инвариантом относительно преобразований /19/ и в то же время является янг-миллсовским лагранжианом калибровочной SO(3)-симметрии, у которой фундаментальное представление $\vec\Psi$ и присоединенное представление $\vec G_\mu$- векторные. Как было указано выше, ранее удалось построить "копию" такого лагранжиана в теории параферми- и парабозе-полей третьего порядка /6/. Теперь мы получили этот лагранжиан на основе калибровочного принципа для гиперполей.

$p=4$. Гиперфермионное поле представляет собою парафермиполе четвертого порядка:

$$\psi = \sum_{A=1}^{4} \alpha_A \Psi_A , \quad \bar\psi = \sum_{A=1}^{4} \alpha_A \bar\Psi_A . \qquad /30/$$

Гипербозонное поле имеет 15 бозонных компонент и записывается в виде

$$g_\mu = \sum_{A=1}^{4} \alpha_A G_\mu^A + \frac{1}{2} \sum_{A,B=1}^{4} \sigma_{AB} G_\mu^{AB} + \sum_{A=1}^{4} \alpha_{5A} G_\mu^{5A} + \alpha_5 G_\mu^5 , \qquad /31/$$

где

$$\sigma_{AB} = (\alpha_A \alpha_B - \alpha_B \alpha_A)/2i ,$$

$$\alpha_{5A} = i\alpha_5 \alpha_A ,$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 .$$

α_5 антикоммутирует со всеми α_A. Поле g_μ в общем случае не является параполем, если только какие-либо его компоненты не предполагаются тождественно равными нулю.

Тензор напряженностей имеет структуру /31/ с коэффициентами

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^{A} = \partial_\mu G_\nu^A - g\Big(G_\mu^{5A} G_\nu^5 + \sum\limits_{B=1}^{4} G_\mu^{AB} G_\nu^B\Big) - (\mu \rightleftarrows \nu), \\ F_{\mu\nu}^{AB} = \partial_\mu G_\nu^{AB} + g\Big(G_\mu^A G_\nu^B + G_\mu^{5A} G_\nu^{5B} + \sum\limits_{C=1}^{4} G_\mu^{AC} G_\nu^{BC}\Big) - (\mu \rightleftarrows \nu), \\ F_{\mu\nu}^{5A} = \partial_\mu G_\nu^{5A} - g\Big(G_\mu^5 G_\nu^A + \sum\limits_{B=1}^{4} G_\mu^{AB} G_\nu^{5B}\Big) - (\mu \rightleftarrows \nu), \\ F_{\mu\nu}^{5} = \partial_\mu G_\nu^5 + g \sum\limits_{B=1}^{4} G_\mu^{5B} G_\nu^B - (\mu \rightleftarrows \nu). \end{cases} \qquad /32/$$

Здесь $(\mu \rightleftarrows \nu)$ означает наличие второго слагаемого, получаемого заменой лоренц-индексов μ и ν друг на друга. Лагранжиан /18/ записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = -\frac{1}{4}\Big\{ & \sum_{A=1}^{4} (F_{\mu\nu}^A)^2 + \frac{1}{2} \sum_{A,B=1}^{4} (F_{\mu\nu}^{AB})^2 + \sum_{A=1}^{4} (F_{\mu\nu}^{5A})^2 + (F_{\mu\nu}^5)^2 + \\ & + \sum_{A,B,C,D=1}^{4} \epsilon_{ABCD} \Big[F_{\mu\nu}^{AB} F_{\mu\nu}^{5C} \alpha_D - \Big(F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^{5B} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{AB} F_{\mu\nu}^5\Big)\sigma_{CD} - \\ & - F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^{BC} \alpha_{5D} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{AB} F_{\mu\nu}^{CD} \alpha_5 \Big]\Big\} + \\ & + \sum_{A=1}^{4} \bar\Psi_A (i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi_A - \\ & - ig \sum_{A,B=1}^{4} \Big\{\bar\Psi_A G_\mu^{AB} \gamma_\mu \Psi_B - \sum_{C,D=1}^{4} \epsilon_{ABCD} \bar\Psi_A \Big(G_\mu^C \alpha_{5D} + \frac{1}{2} G_\mu^5 \sigma_{CD}\Big)\gamma_\mu \Psi_B\Big\}. \end{aligned} \qquad /33/$$

Здесь ϵ_{ABCD} - антисимметричный тензор: $\epsilon_{1234} = -\epsilon_{2134} = \ldots = 1$. Мы видим, что в общем случае этот лагранжиан не является гиперскаляром и потому не инвариантен относительно преобразований /19/. Он будет инвариантен относительно преобразований /19/, в которых отличны от нуля лишь фазы ϕ_{AB}, соответствующие σ_{AB}. В этом случае в гипербозонном поле /31/ отличны от нуля лишь компоненты

$$g_\mu = \frac{1}{2} \sum_{A,B=1}^{4} G_\mu^{AB} \sigma_{AB} . \qquad /34/$$

Тензор напряженностей принимает вид

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum\limits_{A,B} F_{\mu\nu}^{AB} \sigma_{AB} , \\ F_{\mu\nu}^{AB} = \partial_\mu G_\nu^{AB} + g \sum\limits_{C=1}^{4} G_\mu^{AC} G_\nu^{BC} - (\mu \rightarrow \nu), \end{cases} \qquad /35/$$

и лагранжиан /33/ переходит в

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = & -\frac{1}{8} \sum_{A,B=1}^{4} \{(F_{\mu\nu}^{AB})^2 - F_{\mu\nu}^{AB} \tilde F_{\mu\nu}^{AB} \alpha_5 \} + \\ & + \sum_{A=1}^{4} \bar\Psi_A (i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi - ig \sum_{A,B=1}^{4} \bar\Psi_A G_\mu^{AB} \gamma_\mu \Psi_B . \end{aligned} \qquad /36/$$

Здесь введено поле, дуальное к $F_{\mu\nu}^{AB}$:

$$\tilde F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{C,D} \epsilon_{ABCD} F_{\mu\nu}^{CD} . \qquad /37/$$

Хотя лагранжиан /36/ содержит гиперчисло α_5, он является инвариантом относительно преобразований /19/, включающих лишь фазы ϕ_{AB}, поскольку α_5 и σ_{AB} коммутируют. Далее, в этом случае гипербозонное поле /34/ оказывается парабозе-полем третьего порядка. Действительно, его можно представить в виде суммы трех компонент, антикоммутирующих между собою:

$$g_\mu = g_\mu^1 + g_\mu^2 + g_\mu^3 , \qquad /38/$$

где

$$\begin{cases} g_\mu^1 = G_\mu^{23} \sigma_{23} + G_\mu^{14} \sigma_{14} , \\ g_\mu^2 = G_\mu^{13} \sigma_{13} + G_\mu^{24} \sigma_{24} , \\ g_\mu^3 = G_\mu^{12} \sigma_{12} + G_\mu^{34} \sigma_{34} . \end{cases} \qquad /39/$$

В то же время две компоненты каждого из этих полей /39/ коммутируют друг с другом. Таким образом, компоненты /39/ можно считать компонентами гриновского анзатца [1] параполя, а точнее, суммы двух парабозе-полей третьего порядка. Соотношения между исходным параферми-полем /30/ и парабозе-полем /38/ уже не имеют характера гриновских соотношений, но определяются непосредственно алгеброй гиперчисел и потому существенно связаны с использованием для параполей гиперполевого представления. В этом смысле в рассматриваемом случае $p=4$ /так же, как и в ранее рассмотренном случае $p=2$/ мы выходим за рамки собственно теории параполей и придаем физический смысл их гиперполевому представлению. Напоминанием этого служит наличие гиперчисла α_5 в лагранжиане /36/. По форме лагранжиан /36/ соответствует янг-миллсовскому лагранжиану калибровочной $SO(4)$ -симметрии, в котором присутствуют оба инварианта, составленные из полей $F_{\mu\nu}^{AB}$, причем второй инвариант как раз и входит с множителем α_5.

Таким образом, мы заключаем, что в случае $p=4$ при гиперполевом представлении для параполей возникает янг-миллсовский лагранжиан калибровочной $SO(4)$ -симметрии, но только при определенном ограничении калибровочных гиперпреобразований. Кроме того, след от гиперполевого представления остается в лагранжиане для калибровочных полей в виде множителя α_5 перед вторым инвариантом.

Общий случай. Покажем, что при $p\geq 5$ построение инвариантных лагранжианов вообще невозможно. В общем виде гиперфермионные поля задаются формулами /5а,б/. Предыдущее рассмотрение для $p=4$ показывает, что достаточно ограничиться выбором гипербозонного поля в виде

$$g_\mu = \frac{1}{2}\sum_{A,B}\sigma_{AB}G_\mu^{AB}, \qquad /40/$$

где бозе-поля G_μ^{AB} подчиняются соотношениям

$$[G_\mu^{AB}(x),\ G_\nu^{CD}(y)] = -i\Delta_{\mu\nu}(x-y)(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}). \qquad /41/$$

Если даже при таком ограниченном выборе гипербозонного поля построение лагранжиана, инвариантного относительно преобразований /19/, в которых лишь фазы ϕ_{AB} отличны от нуля, окажется невозможным, то оно тем более будет невозможно в общем случае.

Для гипербозонного поля /40/ имеет место выражение

$$[g_\mu(x),\ \{g_\nu(y),\ g_\lambda(z)\}] = -2i[1+(p-2)(p-3)/2]\ \times \qquad /42/$$

$$\times[\Delta_{\mu\nu}(x-y)g_\lambda(z) + \Delta_{\mu\lambda}(x-z)g_\nu(y)] +$$

$$+\sum_{A\neq B\neq\ldots\neq E}\alpha_B\alpha_C\alpha_D\alpha_E\,[G_\mu^{AB}(x)\,G_\nu^{AC}(y)\,G_\lambda^{DE}(z) +$$

$$+\ G_\mu^{AB}(x)\,G_\nu^{CD}(y)\,G_\lambda^{AE}(z)].$$

В последнем слагаемом в правой части /42/ все пять индексов A, B, C, D, E должны быть различны, и потому оно появляется лишь при $p>5$. В этих случаях гипербозонное поле не является парабозе-полем, тогда как при $p\leq 4$ является им /для $p=4$ следует изменить нормировку, поделив правую часть /40/ на $2^{1/2}$).

Тензор напряженностей имеет форму /40/ с компонентами

$$F_{\mu\nu}^{AB} = \partial_\mu G_\nu^{AB} + g\sum_{C=1}^{p}G_\mu^{AC}G_\nu^{BC} - (\mu \rightleftarrows \nu). \qquad /43/$$

Лагранжиан /18/ преобразуется к следующему виду:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{8}\sum_{A\neq B=1}^{p}\{(F_{\mu\nu}^{AB})^2 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{C\neq A,B\\ D\neq A,B}}F_{\mu\nu}^{AB}F_{\mu\nu}^{CD}\alpha_A\alpha_B\alpha_C\alpha_D\} + \qquad /44/$$

$$+\sum_{A=1}^{P}\bar{\Psi}_A(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\Psi_A - ig\sum_{A\neq B}\bar{\Psi}_A G_\mu^{AB}\Psi_B .$$

Мы видим, что второй "кинетический член" поля $F_{\mu\nu}^{AB}$, стоящий в фигурных скобках, отсутствует при $p=2,3$ и содержит лишь гиперчисло $\alpha_5=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ при $p=4$. При $p\geq 5$ он содержит гиперчисла, не коммутирующие с σ_{AB}, и потому не будет инвариантен относительно преобразований /19/.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предыдущей работе [6] было показано, что в рамках теории параполя, когда между всеми полями подразумеваются параполевые гриновские соотношения, можно построить один локальный нелинейный лагранжиан, эквивалентный янг-миллсовскому лагранжиану калибровочной $SO(3)$-симметрии. Однако такой лагранжиан был построен как "копия" янг-миллсовского лагранжиана. В данной работе, используя гиперкомплексное представление для параполей, мы смогли сформулировать калибровочный принцип для фазовых преобразований параполей, в которых фазы являются клиффордовыми гиперчислами. Требование инвариантности полученных лагранжианов относительно таких преобразований ограничивает допустимые теории лишь тремя порядками $p=2,3,4$. При этом для $p=2,4$ исходные параферми-поля и калибровочные парабозе-поля имеют различные порядки /калибровочные поля всегда имеют третий порядок/. В этих случаях соотношения между ними не имеют параполевой формы, но зависят от данного гиперполевого представления. Вследствие этого для $p=2$ взаимодействие между полями нарушает $SU(2)$ -симметрию свободного лагранжиана, выделяя одну из компонент калибровочного гиперполя G^{12}_{μ}. Для $p=4$ лагранжиан оказывается инвариантным только относительно ограниченного класса фазовых преобразований, включающих лишь гиперчисла σ_{AB}. Кроме того, в лагранжиане остается след от гиперполевого представления в виде множителя a_5 перед вторым инвариантом поля $F_{\mu\nu}$.

Таким образом, теорией, не зависящей от данного представления параполей, является теория параферми- и парабозе-полей третьего порядка. Алгебра Клиффорда при $p=3$ изоморфна алгебре кватернионов и можно сказать, что параполя в этом случае представляются кватернионными гиперполями, а янг-миллсовский лагранжиан калибровочной $SO(3)$ -симметрии возникает на основе кватернионных калибровочных фазовых преобразований.

Отметим, наконец, что наше рассмотрение было ограничено ассоциативными гиперполями. Возможность формулировки калибровочного принципа для неассоциативных гиперполей, например, октанионных гиперполей /12/, является вопросом открытым.

Автор благодарит С.Б.Герасимова и В.А.Матвеева за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Green H.S. Phys.Rev., 1953, 90, p. 270.
2. Волков Д.В. ЖЭТФ, 1959, 36, с. 1560.
3. Chernikov N.A. Acta Physica Polonica, 1962, 21, p. 51.
4. Говорков А.Б. ЖЭТФ, 1968, 54, с. 1785.
5. Govorkov A.B. Ann.Phys. (N.Y.), 1969, 53, p. 349.
6. Говорков А.Б. ОИЯИ, Р2-81-749, Дубна, 1981.
7. Scharfstein H. J.Math.Phys., 1966, 7, p. 1707.
8. Domokosh G., Kövesi-Domokosh S. J.Math.Phys., 1978, 19, p. 1477.
9. Говорков А.Б. ОИЯИ, Р2-81-799, Дубна, 1981.
10. Kamefuchi S., Takahashi Y.A. Nucl.Phys., 1962, 36, p. 177.
11. Bracken A.J., Green H.S. Nuovo Cim., 1972, 9A, p. 349.
12. Günaydin M., Gürsey F. Phys.Rev., 1974, 9D, p. 3387.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 апреля 1982 года.