ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Р2-82-272

В.Н.Капшай, Н.Б.Скачков

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО И ЛИНЕЙНОГО ЗАПИРАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛОВ

Направлено в ТМФ

1982

## § I. Введение

В последние годы в физике элементарных частиц все большее применение находят волновые функции, являющиеся решениями ковариантных трехмерных двухчастичных уравнений, полученных Логуновым-Тавхелидзе /1/ и другими авторами /2-6/.

Интерес к этим уравнениям обусловлен тем, что по своей структуре они гораздо ближе к нерелятивистским уравнениям Шредингера и Липмана-Швингера, чем четырехмерное уравнение Бете-Солпитера. Это свойство делает их более удобными в практических приложениях, а,кроме того,позволяет рассматривать их как прямое трехмерное релятивистское обобщение аппарата нерелятивистской квантовой механики.

С этой точки зрения представляет большой интерес нахождение таких ядер этих уравнений (или квазипотенциалов), которые, с одной стороны, являлись бы релятивистскими аналогами широко используемых в нерелятивистской теории феноменологических потенциалов, а с другой стороны,допускали бы нахождение точных решений релятивистских уравнений.

Эта задача ставилась и уже решалась для некоторых квазипотенциалов в ряде работ. Так, в /7/ были найдены релятивистские аналоги потенциала Кулона, допускающие точные решения двухчастичных квазипотенциальных уравнений, а в работах /8,9/-решение для запирающих потенциалов типа линейного и осцилляторного.

В этой работе, в § 2, мы рассмотрим одномерное квазипотенциальное уравнение для линейного потенциала*).

В § 3 методом фурье-преобразования решены одномерные квазипотенциальные уравнения с кулоновским взаимодействием. В иллюстративных целях показано также, что рассматриваемым методом может быть решено уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом.

В § 4 решено нелокальное трехмерное уравнение Логунова-Тавхелидзе в случае квазипотенциала, являющегося обобщением кулоновского. С использованием результатов § I найдено условие квантования и волновые функции для запирающего, линейного в релятивистском конфигурационном представлении, потенциала.

## § 2. Решение одномерного квазипотенциального уравнения с линейным потенциалом

В случае одной пространственной переменной квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе может быть записано в импульсном представлении как

---

*) Решения одномерного квазипотенциального уравнения для квазипотенциалов, являющихся обобщением осцилляторного, рассматривались в /10/.

$$\left(E_p^2 - E^2\right)\phi(p) = -\frac{m}{2\pi}\int V(p,k,E)\phi(k)\,\frac{m\,dk}{E_k}, \tag{2.1}$$

где $E_p \equiv p^0 = \sqrt{m^2+p^2}$; $E_k \equiv k^0 = \sqrt{k^2+m^2}$, то есть "2-импульсы" частиц принадлежат "массовому гиперболоиду"

$$p_0^2 - p^2 = m^2; \qquad k_0^2 - k^2 = m^2. \tag{2.2}$$

Поэтому в уравнении (2.1) удобно перейти к параметризации величин в терминах быстрот:

$$p_0 = m\,ch\chi_p,\ p = m\,sh\chi_p;\ k_0 = m\,ch\chi_k,\ k = m\,sh\chi_k, \tag{2.3}$$

$$V(p,k) \equiv V(\chi_p,\chi_k);\ \phi(\chi_p) = \phi(p), \tag{2.4}$$

и переписать его в виде

$$\left(m^2 ch^2\chi_p - E^2\right)\phi(\chi_p) = -\frac{m}{2\pi}\int V(\chi_p,\chi_k,E)\phi(\chi_k)\,m\,d\chi_k. \tag{2.5}$$

Отметим здесь, что в нерелятивистском пределе $m \to \infty$ быстроты переходят в обезразмеренные импульсы:

$$E_p = \sqrt{m^2+p^2} \to m + p^2/2m\ ;\ m\chi \to p,$$

а уравнение (2.1) переходит в одномерное уравнение Шредингера, записанное в импульсном представлении.

Для уравнения (2.5) мы будем особо интересоваться случаем, когда квазипотенциал $V(\chi_p,\chi_k;E)$ является локальным в пространстве быстрот, то есть зависит от разности $\chi_p - \chi_k$. В этом случае в уравнении (2.5) можно совершить интегральное преобразование с функциями $e^{i\chi_p m r}$:

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\chi_p m r}\phi(\chi_p)\,m\,d\chi_p\ ;\ \phi(\chi_p) = \int e^{-i\chi_p m r}\phi(r)\,dr, \tag{2.6}$$

$$V(\chi_p-\chi_k;E) = \int e^{-i\chi_p m r}V(r,E)\,e^{i\chi_k m r}\,dr. \tag{2.7}$$

Преобразования (2.6), (2.7) есть не что иное, как разложение по функциям, реализующим унитарное представление „группы Лоренца" $SO(1,1)$ /10/

$$\xi(p,r) = \left(\frac{E_p - p}{m}\right)^{-imr}, \tag{2.8}$$

и являющимся одномерным аналогом используемых в /II/ релятивистских "плоских волн", то есть функций

$$\xi'(\vec{p},\vec{r}) = \left(\frac{E_p - \vec{p}\vec{n}}{m}\right)^{-1-imr} . \qquad (2.8')$$

С использованием того факта, что

$$\hat{H}_0\, \xi(p,r) = E_p\, \xi(p,r) = m\,ch\chi_p\, \xi(p,r) , \qquad (2.9)$$

где

$$\hat{H}_0 = m\, ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) , \qquad (2.10)$$

уравнение (2.5) после преобразований (2.6), (2.7) можно представить в виде одномерного разностного уравнения:

$$\left(\hat{H}_0^2 - E^2\right)\phi(r) = -m\, V(r;E)\,\phi(r) . \qquad (2.11)$$

Отметим, что нерелятивистский предел разностного уравнения, аналогичного (2.11), исследовался в работе /12/.

Рассмотрим теперь уравнения (2.5), (2.11) для квазипотенциала, имеющего в $r$ -представлении (заметим, что переменная $r$ изменяется в пределах от $-\infty$ до $\infty$ ) вид

$$V(r,E) = \frac{m^2\lambda}{4} r , \qquad (2.12)$$

где $\lambda$ - безразмерный параметр потенциала, а множитель $1/4$ выбран из соображений удобства. Интегральное уравнение (2.5) с потенциалом (2.12), преобразованным по (2.7):

$$V(\chi_p,\chi_k;E) = -i\,\frac{\lambda}{4}\,\frac{d}{d\chi_k}\,\delta(\chi_p-\chi_k) , \qquad (2.13)$$

легко сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left(m^2 ch^2\chi_p - E^2\right)\phi(\chi_p) = -i\,\frac{m^2\lambda}{4}\,\frac{d}{d\chi_p}\,\phi(\chi_p) . \qquad (2.14)$$

Решения этого уравнения существуют при любых значениях энергии $E$, однако ниже нам особенно потребуется случай $E > m$, поэтому введем параметризацию $E = m\,ch\chi$. Из (2.14) легко находим волновую функцию в импульсном пространстве :

$$\phi(\chi_p) = C\, e^{\frac{i}{\lambda}\left(sh\,2\chi_p - 2\chi_p\, ch\,2\chi\right)} . \qquad (2.15)$$

С помощью интегрального представления для функций Макдональда мнимого индекса ( см., например, /13/)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\, sh u - i\beta u}\, du = 2 e^{-\beta\frac{\pi}{2}} K_{i\beta}(\alpha)$$

находим затем вид волновой функции в $r$ -представлении:

$$\phi(r) = C' e^{-\frac{\pi}{2}\frac{mr}{2}} K_{i\left(\frac{ch 2x}{\lambda} - \frac{mr}{2}\right)}\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{2.16}$$

Непосредственной подстановкой (2.16) в разностное уравнение (2.11) с потенциалом (2.12) легко убедиться при использовании рекуррентного соотношения для функций Макдональда

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = \frac{-2\nu}{z} K_\nu(z) \quad ,$$

что функция (2.16) является решением этого уравнения.

Рассмотрим подробнее поведение волновой функции (2.16) в различных областях переменной $r$ . Для простоты ограничимся случаем малых $\lambda$ . Тогда, используя асимптотическое представление функций Макдональда /13/, находим, что в "классически доступной" области

$$\frac{ch 2x}{\lambda} - \frac{mr}{2} > \frac{1}{\lambda} \tag{2.17}$$

волновая функция $\phi(r)$ имеет осциллирующий характер:

$$\phi(r) \cong \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{ch 2x}{\lambda} - \frac{mr}{2}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}}} \sin\left\{\left(\frac{ch 2x}{\lambda} - \frac{mr}{2}\right) Arch\left(ch 2x - \frac{\lambda mr}{2}\right) - \right. \tag{2.18}$$

$$\left. - \sqrt{\left(\frac{ch 2x}{\lambda} - \frac{mr}{2}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}} + \frac{\pi}{4}\right\} + O(\lambda).$$

В области $ch 2x - 1 < \lambda mr/2 < ch 2x$ поведение волновой функции носит затухающий характер:

$$\phi(r) \cong \left[\lambda^{-2} - (\lambda^{-1} ch 2x - 2^{-1} mr)^2\right]^{-1/4} \times \tag{2.19}$$

$$\times \exp\left[-\sqrt{\lambda^{-2} - (\lambda^{-1} ch 2x - 2^{-1} mr)^2} + (\lambda^{-1} ch 2x - 2^{-1} mr) \arccos(ch 2x - 2^{-1} mr)\right] + O(\lambda).$$

Отметим, что к аналогичным результатам приводит ВКБ- приближение для разностных уравнений /14/.

## § 3. Решения одномерного квазипотенциального уравнения с кулоновским взаимодействием

Рассмотрение кулоновского взаимодействия мы начнем с рассмотрения нерелятивистского случая в рамках трехмерного уравнения Шредингера:

$$\left(\hat{\vec{p}}^{\,2} + mW\right)\Psi(\vec{r}) = -m\,V(r)\,\Psi(\vec{r}). \tag{3.1}$$

Здесь $W = -E$ -энергия связи, $m$ -масса каждой из частиц, $c = \hbar = 1$. Для центрально-симметричного потенциала

$$V(r) = -\alpha/r \tag{3.2}$$

и волновой функции с $\ell = 0\left(\Psi(\vec{r}) = \frac{\phi(r)}{r}\right)$ приходим от (3.1) к одномерному уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + mW\right)\phi(r) = m\,\frac{\alpha}{r}\,\phi(r) \tag{3.3}$$

Распространив в уравнении (3.3) область изменения переменной $r$ от $-\infty$ до $\infty$ (вместо $0 \leq r < \infty$), применим к (3.3) одномерное преобразование Фурье

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{p}r}\phi(\tilde{p})\,d\tilde{p}\ ;\ \phi(\tilde{p}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tilde{p}r}\phi(r)\,dr \tag{3.4}$$

и преобразуем его к виду интегрального уравнения:

$$\left(\tilde{p}^{\,2} + mW\right)\phi(\tilde{p}) = -i\,\frac{m\alpha}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tilde{p}-\tilde{k})\,\phi(\tilde{k})\,d\tilde{k}\ , \tag{3.5}$$

где $\varepsilon(\tilde{p}) = \theta(\tilde{p}) - \theta(-\tilde{p})$ – знаковая функция. Уравнение (3.5) легко сводится к дифференциальному, первого порядка:

$$i\,\frac{d}{d\tilde{p}}\left[\left(\tilde{p}^{\,2} + mW\right)\phi(\tilde{p})\right] = m\alpha\,\phi(\tilde{p})\ , \tag{3.6}$$

решениями которого являются функции

$$\phi(\tilde{p}) = \frac{C}{\tilde{p}^{\,2} + mW}\left(\frac{\tilde{p} + i\sqrt{mW}}{\tilde{p} - i\sqrt{mW}}\right)^{\frac{\alpha m}{2\sqrt{mW}}}. \tag{3.7}$$

С использованием известного нерелятивистского условия квантования

$\alpha m = 2\sqrt{mW}\, n$ из (3.4) находим волновую функцию $n$ -го состояния в координатном представлении:

$$\phi^{(n)}(r) = \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{p}r}\left(\tilde{p}+i\sqrt{mW}\right)^{n-1}\left(\tilde{p}-i\sqrt{mW}\right)^{-n-1} d\tilde{p}. \tag{3.8}$$

Интеграл (3.8) легко может быть вычислен, например, с помощью теории вычетов. В результате приходим к известному в квантовой механике решению

$$\phi^{(n)}(r) = C'\,\theta(r)\, r\, e^{-\frac{\alpha m r}{2n}} L_n^1\left(\frac{\alpha m r}{n}\right), \tag{3.9}$$

где

$$L_n^{\nu}(z) = \frac{n!}{(n-m)!}\, e^{z}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n} e^{-z} z^{n-m} -$$

обобщенные полиномы Лагерра.

Обратимся теперь к решениям одномерного квазипотенциального уравнения (2.I), (2.5) и по аналогии с (3.5) рассмотрим квазипотенциал вида

$$V(\chi_p, \chi_k) = -i\alpha\pi\,\varepsilon(\chi_p - \chi_k) \,. \tag{3.I0}$$

Уравнение (2.5) с потенциалом (3.I0) принимает вид, аналогичный (3.5):

$$\left(m^2 ch^2\chi_p - E^2\right)\phi(\chi_p) = -\frac{i\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\chi_p - \chi_k)\,\phi(\chi_k)\, m^2 d\chi_k\,, \tag{3.II}$$

и легко сводится к дифференциальному уравнению первого порядка $(E = m\cos x)$

$$i\frac{d}{d\chi_p}\left[\left(m^2 ch^2\chi_p - m^2\cos^2 x\right)\phi(\chi_p)\right] = \alpha m^2\,\phi(\chi_p) \,. \tag{3.I2}$$

Решение (3.I2) имеет вид ( ср. с (3.7))

$$\phi(\chi_p) = C\left(ch^2\chi_p - \cos^2 x\right)^{-1}\left(e^{2\chi_p} - e^{-2ix}\right)^{\frac{\alpha}{\sin 2x}}\left(e^{2\chi_p} - e^{2ix}\right)^{-\frac{\alpha}{\sin 2x}} . \tag{3.I3}$$

Разноотное уравнение (2.II) с потенциалом, отвечающим (3.I0), может быть записано как

$$\left(m^2 ch^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) - m^2\cos^2 x\right)\phi(r) = \frac{\alpha m}{r}\,\phi(r) \,, \tag{3.I4}$$

а волновая функция (3.I3) после преобразования (2.6) принимает вид:

$$\phi(r) = C'\hat{\theta}\left(\frac{mr}{2}\right) r e^{-mr\chi} {}_2F_1\left(1+\frac{irm}{2}, 1-\frac{\alpha}{\sin 2\chi}; 2; 1-e^{i4\chi}\right), \quad (3.I5)$$

где "обобщенная" $\hat{\theta}$ - функция /II/ задается как

$$\hat{\theta}\left(\frac{mr}{2}\right) = \left(1-e^{-\pi rm}\right)^{-1} . \quad (3.I6)$$

Из требования убывания функции $\phi(r)$ при $r \to \infty$ находим условие квантования

$$\frac{\alpha}{\sin 2\chi} = n \; ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.I7)$$

Непосредственной подстановкой (3.I5) в уравнение (3.I4) нетрудно с помощью рекуррентных соотношений для гипергеометрической функции (см., например, /I3/) убедиться, что волновая функция (3.I5) удовлетворяет уравнению (3.I4). Заметим, что другим методом уравнение (3.I4) было решено в работе /I5/, при этом волновая функция (3.I5) отличается от найденной в /I5/ на $2i$ - периодический множитель $\hat{\theta}(mr/2)$, который в нерелятивистском пределе переходит в обычную ступенчатую функцию $\theta(r)$. В том же пределе волновая функция (3.I5) с учетом (3.I7), как нетрудно показать, переходит в (3.9). Обычная $\theta(r)$ - функция обеспечивает равенство нулю нерелятивистской волновой функции (3.9) при $r<0$ (бесконечный барьер в точке $r=0$ для потенциала (3.2)). В случае же разностного уравнения (3.I4) множитель $\hat{\theta}(mr/2)$ обеспечивает быстрое убывание функции (3.I5) в области отрицательных $r$ при $r \sim m^{-1}$ .

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (2.5), выбирая в качестве потенциала $V(\chi_p, \chi_k; E)$ величину $-i\alpha\pi\varepsilon(\chi_p-\chi_k)\,\mathrm{ch}\,\chi_k$ , и соответствующее ему разностное уравнение

$$\left(\hat{H}_0^2 - E^2\right)\phi(r) = \frac{\alpha}{r}\hat{H}_0 \cdot \phi(r) . \quad (3.I8)$$

Интегральное уравнение (2.5) в этом случае также легко может быть решено, так что волновая функция в импульсном представлении есть ( сравн. с (3.7) и (3.I3))

$$\phi(\chi_p) = C\left(\mathrm{ch}^2\chi_p - \cos^2\chi\right)^{-1}\left(\mathrm{sh}\,\chi_p + i\sin\chi\right)^{\frac{\alpha}{2\sin\chi}}\left(\mathrm{sh}\,\chi_p - i\sin\chi\right)^{-\frac{\alpha}{2\sin\chi}} . \quad (3.I9)$$

С использованием (2.6) находим В.Ф. в $r$ -представлении, причем требования конечности В.Ф. при $r=0$ и убывания при $r\to\infty$ приводят к условию квантования

$$\frac{\alpha}{2\sin x}=n \quad , \text{ где } n = 1,2,3,\ldots, \text{ то есть } E_n=\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^2}\cdot m ,$$

так что

$$\phi^{(n)}(r)=\frac{C^{(n)}}{2\pi}\int e^{i\chi_p mr}\,\frac{(sh\,\chi_p+i\sin x)^{n-1}}{(sh\,\chi_p-i\sin x)^{n+1}}\,m\,d\chi_p \, . \tag{3.20}$$

При этом волновая функция основного состояния $(n=1)$ имеет вид

$$\phi^{(1)}(r)=C^{(1)}\hat{\theta}(mr)\,\frac{d}{d\sin x}\,\frac{1}{\cos x}\left[e^{-xrm}-e^{-(\pi-x)rm}\right]=$$

$$=C^{(1)}\frac{d}{d\sin x}\,\frac{1}{\cos x}\left[\frac{sh(\pi/2-x)mr}{sh(\pi/2\,mr)}+\frac{sh(\pi/2-x)mr}{ch(mr\,\pi/2)}\right] \tag{3.21}$$

и также, благодаря множителю $\hat{\theta}(mr)$, быстро убывает в области отрицательных $r$ . Легко показать, что эта (3.21) удовлетворяет уравнению (3.18) при условии $2\sin x=\alpha$ . Волновые функции для $n>1$ могут быть теперь построены с использованием метода, изложенного в /7/, либо найдены с помощью (3.20).

## § 4. Решения трехмерного квазипотенциального уравнения с кулоновским и линейным потенциалами

Обратимся теперь к трехмерному квазипотенциальному уравнению Логунова-Тавхелидзе, записанному в С.Ц.М. двухчастичной связанной системы /1/:

$$\left(E_{\vec p}^2-E^2\right)\Psi(\vec p)=-\frac{m}{(2\pi)^3}\int V(\vec p,\vec k;E)\,\Psi(\vec k)\,\frac{m\,d\vec k}{E_k}\,, \tag{4.1}$$

где $E_{\vec p}^2=\vec p^{\,2}+m^2$ , $E_{\vec k}^2=\vec k^{\,2}+m^2$ . Выберем в (4.1) в качестве квазипотенциала

$$V(\vec p,\vec k;E)=-\frac{g^2}{(\vec p-\vec k)^2}\,. \tag{4.2}$$

Совершая преобразование

$$\Psi(\vec r)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec p\vec r}\,\Psi(\vec p)\,d\vec p\ ;\quad \Psi(\vec p)=\int e^{-i\vec p\vec r}\,\Psi(\vec r)\,d\vec r\,, \tag{4.3}$$

имеем для функции $\Psi(\vec r)$ нелокальное уравнение $(\alpha=g^2/4\pi)$

$$\left(\hat{\vec{p}}^{\,2}+m^2-E^2\right)\Psi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r}\,\frac{m^2}{\sqrt{m^2+\hat{\vec{p}}^{\,2}}}\,\Psi(\vec{r}). \tag{4.4}$$

В этом уравнении $\hat{\vec{p}}^{\,2} = -d^2/d\vec{r}^{\,2}$, так что в центрально-симметричном случае $\Psi(\vec{r}) = \frac{\phi(r)}{r}$ для функции $\phi(r)$ получаем

$$\left(-d^2/dr^2 + m^2-E^2\right)\phi(r) = \frac{m^2\alpha}{r}\,\frac{1}{\sqrt{m^2-d^2/dr^2}}\,\phi(r). \tag{4.5}$$

В уравнении (4.5) переменная $r=|\vec{r}|$ по своему смыслу изменяется в пределах от 0 до $\infty$. Будем, однако, аналогично тому, как и выше, считать, что $-\infty<r<\infty$, и применим к уравнению (4.5) одномерное преобразование Фурье (3.4), в котором, чтобы избежать путаницы, будем отмечать тильдой переменные $\tilde{p}$, $\tilde{k}$, так что $\tilde{p}\neq p=|\vec{p}|$ и т.д. То есть функцию $\phi(\tilde{p})$ мы вводим вне прямой связи с $\Psi(\vec{p})$. С помощью (3.4) имеем тогда для $\phi(\tilde{p})$ одномерное интегральное уравнение

$$\left(\tilde{p}^2+m^2-E^2\right)\phi(\tilde{p}) = -i\,\frac{m^2\alpha}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tilde{p}-\tilde{k})\,\frac{1}{\sqrt{m^2+\tilde{k}^2}}\,\phi(\tilde{k})\,d\tilde{k}, \tag{4.6}$$

из которого без труда находим $(E=m\cos x)$ :

$$\phi(\tilde{p}) = \frac{C}{\tilde{p}^2+m^2\sin^2 x}\left(\frac{\sin x\sqrt{\tilde{p}^2+m^2}-i\tilde{p}\cos x}{\sqrt{\tilde{p}^2+m^2\sin^2 x}}\right)^{\frac{\alpha}{\sin x\cos x}}. \tag{4.7}$$

Тогда, с использованием (3.4), находим волновую функцию уравнения Логунова-Тавхелидзе (4.4) в виде

$$\Psi(r) = \frac{C}{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\tilde{p}r}\left(\sin x\sqrt{\tilde{p}^2+m^2}-i\tilde{p}\cos x\right)^{\frac{\alpha}{\sin x\cos x}}\cdot\left(\tilde{p}^2+m^2\sin^2 x\right)^{-1-\frac{\alpha}{2\sin x\cos x}}d\tilde{p}. \tag{4.8}$$

Из условия конечности $\Psi(r)$ при $r=0$ получаем условие квантования в интегральной форме :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sin x\sqrt{\tilde{p}^2+m^2}-i\tilde{p}\cos x\right)^{\frac{\alpha}{2\sin x\cos x}}\left(\tilde{p}^2+m^2\sin^2 x\right)^{-1-\frac{\alpha}{2\sin x\cos x}}d\tilde{p}=0. \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь трехмерное уравнение (4.1), выбирая в нем в качестве квазипотенциала сингулярное при $\vec{p}=\vec{k}$ выражение (для простоты, не зависящее от энергии $2E$ )

$$V(\vec{p},\vec{k}) = (-2\pi\lambda)\cdot\left(m^2\chi_\Delta^3\cdot\operatorname{sh}\chi_\Delta\right)^{-1}, \tag{4.10}$$

где переменная $\chi_\Delta$ определяется из

$$\vec{\Delta}_{p,k} = \vec{p} - \frac{\vec{k}}{m}\left(p^0 - \frac{\vec{p}\vec{k}}{k^0+m}\right) = m\,\vec{n}_\Delta\, sh\chi_\Delta\,,$$

$$\Delta^0_{p,k} = \frac{p^0k_0 - \vec{p}\vec{k}}{m} = m\,ch\,\chi_\Delta\,. \tag{4.11}$$

Переходя в релятивистское конфигурационное представление /11/ с помощью разложения волновой функции $\Psi(\vec{p})$ и квазипотенциала (4.10) по функциям (2.8[1]), то есть совершая преобразования, аналогичные (2.6), (2.7), мы будем иметь локальное уравнение

$$\left(\hat{H}^2_{0(3)} - E^2\right)\Psi(\vec{r}) = -m\,V(r)\Psi(\vec{r}), \tag{4.12}$$

где явный вид трехмерного "свободного гамильтониана" $\hat{H}_{0(3)}$ приведен, например, в /11/, а потенциал $V(r)$ определяется формулой (2.12). Обратное преобразование от квазипотенциала (2.12) к выражению в импульсном представлении (4.10) при этом понимается в смысле той же регуляризации, с учетом которой, например, находят выражение в трехмерном импульсном пространстве для квантовомеханического кулоновского потенциала.

В центрально-симметричном случае для функции $r\,\Psi(r)$, где $r = |\vec{r}|$, имеем из (4.12) уравнение, полностью аналогичное уравнению (2.11) с потенциалом (2.12), в котором, однако, область изменения $r$ есть $0 \leq r < \infty$. Следовательно, с учетом параметризации $E = m\,ch\,\chi$ (поскольку квазипотенциал $V(r) \sim r$ является запирающим, $E > m$) решением (4.12) являются функции

$$\Psi(r) = C\,\frac{1}{r}\,e^{-\frac{\pi m r}{4}}\,K_{i\left(\frac{ch\,2\chi}{\lambda} - \frac{mr}{2}\right)}\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4.13}$$

Из условия конечности волновой функции $\Psi(r)$ при $r = 0$ получаем точное условие квантования уровней энергии $2E_n = 2m\,ch\,\chi_n$ для трехмерного уравнения (4.12) с линейным запирающим потенциалом:

$$K_{i\frac{ch\,2\chi_n}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0. \tag{4.14}$$

В случае малых $\lambda$ с помощью асимптотической формулы (2.18) приходим к приближенному условию квантования

$$2\chi_n\,ch\,2\chi_n - sh\,2\chi_n = \lambda\pi\left(n - \frac{1}{4}\right);\ n = 1, 2, \ldots, \tag{4.15}$$

которое в нерелятивистском пределе переходит в приближенное условие квантования для уравнения Шредингера с линейным потенциалом. Отметим, что к условию квантования (4.15) приводит также /14/ использование для уравнения (4.12) ВКБ - приближения.

## § 5. Заключение

В данной работе мы рассмотрели несколько примеров точно решаемых релятивистских квазипотенциальных уравнений в случае взаимодействий, являющихся релятивистскими обобщениями квантовомеханических потенциалов. Для квазипотенциала, линейно растущего в одномерном релятивистском конфигурационном представлении, точные волновые функции выражены через функции Макдональда. С использованием этого решено в центрально-симметричном случае трехмерное уравнение Логунова-Тавхелидзе с квазипотенциалом, имеющим в импульсном пространстве вид $V \sim k_\Delta^{-3}\,\mathrm{sh}^{-1}\chi_\Delta$, который в нерелятивистском пределе переходит в фурье-образ $(\vec{p}-\vec{k})^{-4}$ линейного квантовомеханического потенциала. Рассмотрены также однородные квазипотенциальные интегральные уравнения и соответствующие им уравнения в конфигурационном представлении для потенциалов, имеющих вид, аналогичный кулоновскому потенциалу. В § 3 найдены волновые функции для одномерного варианта квазипотенциальных уравнений, а в § 4 решено для центрально-симметричного случая нелокальное трехмерное уравнение Логунова-Тавхелидзе с потенциалом, имеющим в импульсном пространстве такой же вид, как и нерелятивистский кулоновский потенциал.

В заключение авторы выражают благодарность В.Г. Кадышевскому, С.П. Кулешову, С.П. Курловичу, А.Д. Линкевичу, В.И. Саврину и И.Л. Соловцову за обсуждения.

## Литература

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, v.29, N 2, p.380-400.
2. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. В кн.: Проблемы теоретической физики, Сб., посвященный Н.Н.Боголюбову в связи с его 60-летием. М.,"Наука", 1969, с.261-277.
3. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1968, v. B6, N 1, p.125-142; Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cimento, 1968, v.55A, N 2, p.275-300.

4. Логунов А.А., Саврин В.И., Тюрин М.Е., Хрусталев О.А. ТМФ, 1971, т.6, №2, с.654-662.
5. Faustov R.N. Annals of Phys., 1973, v.78, N 1, p.176-189.
6. Kvinikhidze A.N., Stoyanov D.Ts. Preprint JINR, E2-5746, Dubna, 1971.
7. Kapshay V.N., Skachkov N.B. Preprint JINR E2-81-618, Dubna, 1981; JINR E2-82-155, Dubna, 1982.
8. Донков А.Д., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. ТМФ, 1971, т.8, №1, с.61-72.
9. Голоскоков С.В., Кулешов С.П., Сидоров А.В. Письма в ЖЭТФ, 1980, т.31, с.154-156.
10. Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М., Нагиев Ш.М. ТМФ, 1980, т.44, №1, с.47-63.
11. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЭЧАЯ, 1972, т.2, вып.3, с.635.
12. Жидков Е.П., Кадышевский В.Г., Катышев Ю.В. ТМФ, 1970, т.3, № 2, с.191-197.
13. Бейтмен Г., Ардейи. Высшие трансцендентные функции, т.I-II, М., "Наука", 1974.
14. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ЯФ, 1980, т.31, №5, с.1332-1340, 1980.
15. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Фриман М. ЯФ, 1969, т.9, № 3, с.646-652.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1982 года.