объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-271

В.Н.Капшай, С.П.Кулешов, Н.Б.Скачков

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АНАЛОГОВ ПОТЕНЦИАЛОВ ЗАПИРАНИЯ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1982

I. Введение

В последние годы спектр масс мезонов как связанных состояний кварка и антикварка интенсивно исследуется на основе ковариантных двухчастичных уравнений, полученных в рамках квантовой теории поля /I-3/. Квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе для связанной системы двух скалярных частиц одинаковой массы $(m_1 = m_2 = m)$ имеет вид

$$\left(E^2 - E_p^2\right)\Psi(\mathring{\vec{p}}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int V(\mathring{\vec{p}},\mathring{\vec{k}};E)\,\Psi(\mathring{\vec{k}})\,\frac{d\mathring{\vec{k}}}{E_k} \,. \qquad (I.I)$$

Здесь $\Psi(\mathring{\vec{p}})$ – волновая функция относительного движения связанной системы, зависящая от ковариантно определенного /4/ вектора относительного импульса в системе центра масс (СЦМ) $\mathring{\vec{p}}$; $V(\mathring{\vec{p}},\mathring{\vec{k}};E)$ – квазипотенциал, $2E = M$ – полная энергия в СЦМ, а все 4- импульсы принадлежат массовой поверхности

$$E_p^2 - \mathring{\vec{p}}^{\,2} = m^2 \ ; \quad E_k^2 - \mathring{\vec{k}}^{\,2} = m^2 . \qquad (I.2)$$

Спектр масс мезонов, особенно J/ψ- и Υ - частиц, исследовался также на основе нерелятивистского уравнения Шредингера (см. обзор /5/) с феноменологическими потенциалами, содержащими запирающую часть (гипотеза о конфайнменте).

На основе квазипотенциальных уравнений типа (I.I) с квазипотенциалами, содержащими запирающую часть, задача нахождения спектра масс и волновых функций, знание которых необходимо, например, для нахождения формфакторов и ширин распада, методом ВКБ исследовалась в работах /6/. Представляет безусловный интерес нахождение релятивистских волновых функций и энергетических спектров на основе ковариантных уравнений типа (I.I) с такими потенциалами, которые являются релятивистскими аналогами квантовомеханических потенциалов запирания и вместе с тем допускают точное решение квазипотенциальных уравнений.

Здесь мы во втором разделе рассмотрим уравнение (I.I), выбирая в качестве квазипотенциала величины, которые можно рассматривать как простые релятивистские обобщения осцилляторного потенциала. Затем мы в импульсном представлении построим волновые функции уравнения (I.I) с сингулярным при $\mathring{\vec{p}} = \mathring{\vec{k}}$ квазипотенциалом $V \sim (\mathring{\vec{p}} - \mathring{\vec{k}})^{-4}$, спектр энергий для которого не ограничен сверху. Наконец, мы рассмотрим также квазипотенциальное уравнение для случая спиновых частиц.

2. Релятивистские аналоги феноменологических потенциалов запирания для трехмерных квазипотенциальных уравнений

Рассмотрим трехмерное уравнение (I.I) с квазипотенциалами, которые в нерелятивистском пределе переходят в широко используемые в спектроскопии кварковых систем типа чармония или ботония линейный и осцилляторный потенциал. Вначале, следуя /7/, рассмотрим квазипотенциал

$$V(\overset{\circ}{\vec{p}},\overset{\circ}{\vec{k}};E) = -(2\pi)^3 m^3\omega^2 \left[\frac{d^2}{d\overset{\circ}{\vec{k}}{}^2}\,\delta(\overset{\circ}{\vec{p}}-\overset{\circ}{\vec{k}})\right]\cdot N_1(E_k^\circ,E), \quad (2.1)$$

где

$$N_1(E_k^\circ,E) = \frac{E_k^\circ}{E}. \quad (2.2)$$

На энергетической поверхности $E_p^\circ = E_k^\circ = E$ множитель (2.2) равен единице. Точно так же, в нерелятивистском пределе $(m\to\infty)$, когда $E_k^\circ=\sqrt{m^2+\vec{k}^2}\to m+\vec{k}^2/2m$, а $2E=2m+E_{cb}$, множитель $N_1(E_k^\circ,E)\to 1$. Легко видеть, следовательно, что выражение (2.I) может рассматриваться в качестве релятивистского обобщения квантовомеханического осцилляторного потенциала. После подстановки (2.I), (2.2) в (I.I) мы приходим к уравнению

$$\left(E^2-m^2-\overset{\circ}{\vec{p}}{}^2\right)\Psi(\overset{\circ}{\vec{p}}) = -\frac{m^3\omega^2}{E}\,\frac{d^2}{d\overset{\circ}{\vec{p}}{}^2}\,\Psi(\overset{\circ}{\vec{p}}). \quad (2.3)$$

Решениями (2.3), как легко видеть, являются функции

$$\Psi(\overset{\circ}{\vec{p}}) \propto \Psi_\ell(\overset{\circ}{p})\,Y_{\ell m}(\vec{n}_{\overset{\circ}{p}}), \quad (2.4)$$

где

$$\Psi_\ell(\overset{\circ}{p}) = C\,\overset{\circ}{p}{}^\ell e^{-\frac{\lambda}{2}\overset{\circ}{p}{}^2}\,{}_1F_1\left(\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2},\ \ell+\frac{3}{2},\ \lambda\overset{\circ}{p}{}^2\right). \quad (2.5)$$

Мы обозначили

$$E m^{-3}\omega^{-2}=\lambda^2\ ;\ (E^2-m^2)E^{1/2}(2m^{3/2}\omega)^{-1}=\mu. \quad (2.6)$$

Условие нормировки для волновой функции уравнения Логунова-Тавхелидзе имеет вид /8/:

$$1 = (2\pi)^{-3}\int \Psi^{*(n)}(\overset{\circ}{\vec{p}})\,\frac{d\overset{\circ}{\vec{p}}}{\sqrt{m^2+\overset{\circ}{\vec{p}}{}^2}}\,\Psi^{(n)}(\overset{\circ}{\vec{p}}) - \quad (2.7)$$

$$-(2\pi)^{-6}(2E_n)^{-1}\int \Psi^{*(n)}(\overset{\circ}{\vec{p}})\,\frac{d\overset{\circ}{\vec{p}}}{E_p^\circ}\left[\frac{\partial V(\overset{\circ}{\vec{p}},\overset{\circ}{\vec{k}};E)}{\partial E}\right]_{E=E_n}\frac{d\overset{\circ}{\vec{k}}}{E_k^\circ}\,\Psi^{(n)}(\overset{\circ}{\vec{k}}).$$

В случае квазипотенциала (2.I), (2.2) с простой параметрической зависимостью $V(\vec{p},\vec{k},E)$ от энергии $2E$ это условие может быть записано как

$$(2\pi)^{-3}\int \Psi^{*(n)}(\overset{\circ}{\vec p})\left[3E_n^2-E_{\overset{\circ}{p}}^2\right]\Psi^{(n)}(\overset{\circ}{\vec p})\,\frac{d\overset{\circ}{\vec p}}{\sqrt{m^2+\overset{\circ}{\vec p}{}^2}} = 2E_n^2. \tag{2.8}$$

Из условия нормируемости волновой функции (2.4), (2.5) получаем условие квантования, которое может быть представлено в форме

$$\sqrt{E_n}\left(E_n^2-m^2\right) = 2m\sqrt{m}\,\omega\left(2n+\ell+\frac{3}{2}\right);\; n=1,2,\dots \tag{2.9}$$

Отметим, что в отличие от нерелятивистского случая энергетический спектр, определяемый формулой (2.9), не является эквидистантным, так что, например, при больших значениях главного квантового числа n $E_n \sim n^{2/5}$.

Очевидно, что потенциал (2.I) с заменой множителя (2.2) на

$$N_2(E_k^\circ, E) = \frac{E_k^\circ}{m} \tag{2.10}$$

также будет иметь своим нерелятивистским пределом осцилляторный потенциал. Решениями уравнения (I.I) в этом случае будут функции того же вида (2.4), (2.5), где, однако, параметры λ и μ заменяются соответственно на

$$\lambda_2 = (m\omega)^{-1} \quad ; \quad \mu_2 = \left(E^2-m^2\right)(2m\omega)^{-1}, \tag{2.11}$$

так что условие квантования принимает вид

$$E_n = \left[m^2+2m\omega\left(2n+\ell+3/2\right)\right]^{1/2}. \tag{2.12}$$

Нормировочный множитель C при этом будет определяться условием

$$(2\pi)^{-3}\int\left|\Psi^{(n)}(\overset{\circ}{\vec p})\right|^2\frac{d\overset{\circ}{\vec p}}{\sqrt{m^2+\overset{\circ}{\vec p}{}^2}} = 1, \tag{2.13}$$

так как , с учетом (2.10), мы имеем не зависящий от энергии $2E$ квазипотенциал.

Рассмотрим теперь уравнение (I.I) с квазипотенциалом, который зададим в следующем виде:

$$V(\overset{\circ}{\vec p},\overset{\circ}{\vec k},E) = 8\pi m^4\lambda\,N_1(E_k^\circ,E)\,\left(\overset{\circ}{\vec p}-\overset{\circ}{\vec k}\right)^{-4}, \tag{2.14}$$

где $N_1(E_k^\circ, E)$ определено в (2.2). Параметр λ , играющий роль константы взаимодействия, выбран безразмерным. При таком выборе квазипотенциала правая часть уравнения

$$\left(E^2-m^2-\overset{\circ}{\vec{p}}{}^2\right)\Psi(\overset{\circ}{\vec{p}}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{m}{E}\int \frac{-8\pi\lambda m^3}{(\overset{\circ}{\vec{p}}-\overset{\circ}{\vec{k}})^4}\,\Psi(\overset{\circ}{\vec{k}})\,d\overset{\circ}{\vec{k}} \tag{2.15}$$

имеет вид свертки в эвклидовом импульсном пространстве и, следовательно, для нахождения решений (2.15) целесообразно использовать преобразование Фурье:

$$\Psi(\vec{r}) = (2\pi)^{-3}\int e^{i\overset{\circ}{\vec{p}}\vec{r}}\,\Psi(\overset{\circ}{\vec{p}})\,d\overset{\circ}{\vec{p}}\ ;\quad \Psi(\overset{\circ}{\vec{p}}) = \int e^{-i\overset{\circ}{\vec{p}}\vec{r}}\,\Psi(\vec{r})\,d\vec{r}\ . \tag{2.16}$$

При таком преобразовании волновой функции переменная $|\vec{r}|$ канонически сопряжена ковариантно определенному вектору относительного импульса в СЦМ $\overset{\circ}{\mathbf{p}}$, то есть сама является инвариантом /8/, а квазипотенциал в $\vec{r}$ - представлении определяется как $(r=|\vec{r}|)$

$$V(r,E) = \frac{m}{(2\pi)^3 E}\int e^{-i\vec{q}\vec{r}}\,\frac{-8\pi m^3\lambda}{\vec{q}^{\,4}}\,d\vec{q} =$$

$$= -\frac{4m^4\lambda}{\pi E}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(qr)}{qr}\,\frac{q^2 dq}{q^4}\,. \tag{2.17}$$

При вычислении этого интеграла используем регуляризацию, рассматривавшуюся, например, в /9/, т.е. воспользуемся формулой

$$\int\limits_0^\infty \sin(qr)\,q^{n-1}\,dq = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{r^n}\,\frac{1}{\Gamma(1-n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Тогда будем иметь $\quad (0\leqslant r<\infty)\quad$:

$$V(r,E) = m^4\lambda E^{-1}\cdot r, \tag{2.18}$$

то есть потенциал в конфигурационном представлении является запирающим. Обратное к (2.17) преобразование при этом понимается в смысле

$$V(q,E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{i\vec{q}\vec{r}}\,m^4\lambda E^{-1}\,r\,e^{-\varepsilon r}\,d\vec{r}\ . \tag{2.19}$$

Отметим здесь, что регуляризация, используемая в (2.19), обычно применяется, например, при нахождении вида квантовомеханического кулоновского потенциала в импульсном пространстве.

После интегрирования в (2.19) по углам с использованием затем формулы

$$\int_0^\infty r^{\alpha-1}\sin(qr)\,e^{-\varepsilon r}\,dr = \frac{\Gamma(\alpha)\sin\left[\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{q}{\varepsilon}\right]}{(q^2+\varepsilon^2)^{\alpha/2}} \qquad (2.20)$$

приходим к потенциалу (2.I4).

Уравнение (2.I5) в $\vec{r}$ - представлении для функции $\Psi(\vec{r})$, определенной в (2.I6), имеет вид

$$\left[-\frac{d^2}{d\vec{r}^2} - (E^2-m^2) + \frac{m^4\lambda}{E}r\right]\Psi(\vec{r}) = 0, \qquad (2.21)$$

и в центрально-симметричном случае $\Psi(\vec{r})=\Psi(r)$ сводится, путем линейной замены переменных, к уравнению Эйри. Следовательно, решение (2.2I), убывающее при $r\to\infty$, есть

$$r\Psi(r) = C\,Ai\left[\left(r-\frac{E^2-m^2}{m^4\lambda}E\right)\left(\frac{m^4\lambda}{E}\right)^{\frac{1}{3}}\right]. \qquad (2.22)$$

Функция Эйри $Ai(\xi)$ при этом определяется как

$$Ai(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{u^3}{3}+u\xi\right)du\,, \qquad (2.23)$$

а C есть нормировочная константа. Ниже будет показано, что квантование уровней энергии определяется из условия $r\Psi(r)\big|_{r=0}=0$, что дает

$$-\frac{E^2-m^2}{\left(\frac{m^4\lambda}{E}\right)}\left(\frac{m^4\lambda}{E}\right)^{1/3} = -\xi_n\,, \qquad (2.24)$$

где $-\xi_n$ - нули функции Эйри $(-\xi_n<0)$. Покажем теперь, что ВФ в импульсном представлении, определяемая из (2.I6), (2.2I), удовлетворяет однородному интегральному уравнению (2.I5) при условии (2.24). Проинтегрировав в (2.I5) по углам, будем иметь в центрально-симметричном случае уравнение

$$(\mathring{p}^2+m^2-E^2)\,\mathring{p}\,\Psi(\mathring{p}) = \frac{m^4\lambda}{\pi E}\int_0^\infty\left[\frac{1}{(\mathring{p}-\mathring{k})^2}-\frac{1}{(\mathring{p}+\mathring{k})^2}\right]\mathring{k}\,\Psi(\mathring{k})\,d\mathring{k}\,, \qquad (2.25)$$

где $\overset{\circ}{p} = |\vec{p}|$, $\overset{\circ}{k} = |\vec{k}|$. С учетом свойства нечетности функции $k\Psi(k)$ интеграл в правой части (2.25) следует понимать как

$$\frac{m^4\lambda}{\pi E}\left(-\frac{d}{d\overset{\circ}{p}}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overset{\circ}{p}-\overset{\circ}{k}}\,\overset{\circ}{k}\Psi(\overset{\circ}{k})\,d\overset{\circ}{k}\,, \tag{2.26}$$

При этом волновая функция $\overset{\circ}{p}\Psi(\overset{\circ}{p})$ в центрально-симметричном случае определяется, как это следует из (2.16), следующим образом:

$$\overset{\circ}{p}\Psi(\overset{\circ}{p}) = 4\pi\int\limits_{0}^{\infty}\sin(\overset{\circ}{p}r)\,r\Psi(r)\,dr\,, \tag{2.27}$$

откуда, с использованием дифференциального уравнения (2.2), имеем также

$$\left(\overset{\circ}{p}{}^2-E^2+m^2\right)\overset{\circ}{p}\Psi(\overset{\circ}{p}) = \frac{4\pi m^4\lambda}{E}\frac{d}{d\overset{\circ}{p}}\int\limits_{0}^{\infty}\cos(r\overset{\circ}{p})\,r\Psi(r)\,dr + 4\pi\, r\Psi(r)\Big|_{r=0}\,. \tag{2.28}$$

С помощью регуляризации, аналогичной использовавшейся нами в (2.19), для волновых функций в импульсном представлении получаем, с использованием (2.21), (2.22) и (2.27), следующее интегральное представление:

$$\overset{\circ}{p}\Psi^{(\omega)}(\overset{\circ}{p}) = C\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\frac{u^3}{3}-iu\xi_n}\left\{\frac{1}{\overset{\circ}{p}+u\beta+i\varepsilon}+\frac{1}{\overset{\circ}{p}-u\beta-i\varepsilon}\right\}du\,, \tag{2.29}$$

где $\beta = \left(\frac{m^4\lambda}{E}\right)^{\frac{1}{3}}$, а для (2.28) соответственно

$$\left(\overset{\circ}{p}{}^2-E^2+m^2\right)\overset{\circ}{p}\Psi^{(\omega)}(\overset{\circ}{p}) = \frac{Cm^4\lambda}{E}\frac{d}{d\overset{\circ}{p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}du\,e^{i\frac{u^3}{3}-iu\xi_n}\left\{\frac{i}{\overset{\circ}{p}+u\beta+i\varepsilon}-\frac{i}{\overset{\circ}{p}-u\beta-i\varepsilon}\right\}+r\Psi(r)\Big|_{r=0}. \tag{2.30}$$

Подстановка (2.29) и (2.30) в уравнение (2.25) с учетом (2.26) и формул

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-y}\,\frac{dx}{x+\alpha} = \frac{i}{y+\alpha}\;;\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-y}\,\frac{dx}{x-\alpha} = \frac{-i}{y-\alpha}\,, \tag{2.31}$$

справедливых для $\mathrm{Im}\,\alpha > 0$, обращает уравнение (2.25) в тождество, если выполняется условие $r\Psi(r)\big|_{r=0} = 0$. Таким образом, решениями уравнения (2.15), действительно, являются функции (2.29), а условие квантования уровней энергии имеет вид (2.24).

Отметим, что с высокой степенью точности для нулей функции Эйри $-\xi_n$ справедлива формула $\xi_n = \left[\frac{3}{2}\pi\left(n+\frac{3}{4}\right)\right]^{2/3}$, причем точность ее тем выше, чем больше n. Следовательно, зависимость E_n от главного квантового числа при больших n имеет вид $E_n \sim n^{1/4}$, т.е. дискретный спектр энергий не ограничен сверху.

Выбор в выражении (2.14) для квазипотенциала множителя $N_2(E_k^0, m) = \frac{E_k^0}{m}$ вместо $N_1(E_k^0, E)$ приводит к незначительному изменению приведенных рассуждений. Условие квантования в этом случае принимает вместо (2.24) вид

$$-(E^2 - m^2)(m^3\lambda)^{-2/3} = -\xi_n \,; \quad E_n = \left(m^2 + \xi_n (m^3\lambda)^{2/3}\right)^{1/2}, \tag{2.32}$$

а волновые функции в импульсном представлении задаются как

$$\overset{\circ}{p}\Psi(\overset{\circ}{p}) = C' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{u^3}{3} - iu\xi_n} \left\{ \frac{1}{\overset{\circ}{p} + um\lambda^{1/3} + i\varepsilon} + \frac{1}{\overset{\circ}{p} - um\lambda^{1/3} - i\varepsilon} \right\} du \,. \tag{2.33}$$

Нормировочный множитель C в (2.29) находится из условия, совпадающего по форме с (2.8), а константа C' в (2.33) фиксируется условием (2.13).

Наряду с квазипотенциальным уравнением Логунова-Тавхелидзе (1.1), мы рассмотрим также ковариантное уравнение для частиц со спином 1/2, возникающее в гамильтоновой формулировке квантовой теории поля или одновременном формализме при проецировании на положительно-частотные состояния /3,10/:

$$(2E_p^0 - 2E)\Psi(\overset{\circ}{\vec p}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int V(\overset{\circ}{\vec p}, \overset{\circ}{\vec k}; E)\,\Psi(\overset{\circ}{\vec k})\frac{m\, d^3\overset{\circ}{\vec k}}{E_k^0} \,. \tag{2.34}$$

Уравнение (2.34) также используется для описания релятивистской двухчастичной системы. Так, в работе /11/ это уравнение было решено для потенциала осцилляторного типа[x)]. Мы рассмотрим здесь уравнение (2.34) с квазипотенциалом, который зададим в виде

$$V(\overset{\circ}{\vec p}, \overset{\circ}{\vec k}; E) \doteq -\frac{8\pi\lambda m^3}{(\vec\pi_p^0 - \vec\pi_k^0)^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2mE_k^0 + 2m^2}} \,, \tag{2.35}$$

где "полуимпульсы" $\vec\pi_p^0$, $\vec\pi_k^0$ определяются как

$$\vec\pi_p^0 = m\, sh\left(\frac{\chi_p^0}{2}\right)\vec n_p^0 \,; \quad \vec\pi_k^0 = m\, sh\left(\frac{\chi_k^0}{2}\right)\vec n_k \,, \tag{2.36}$$

---

x) См. так же более ранние работы /12/.

если

$$\overset{\circ}{\vec{p}} = m\, sh\chi_p^\circ \vec{n}_p^\circ \;;\; \overset{\circ}{\vec{k}} = m\, sh\chi_k^\circ \vec{n}_k^\circ \;;\; \vec{n}_p^{\circ 2} = \vec{n}_k^{\circ 2} = 1 \tag{2.37}$$

Если в уравнении (2.34) с квазипотенциалом (2.35) переписать в терминах полуимпульсов также свободную функцию Грина $G_0(E_p^\circ \overset{\circ}{E}) = (2E_p^\circ - 2E)^{-1}$, то оно примет вид $\left(\Psi(\overset{\circ}{\vec{p}}) = \Psi(\vec{\pi})\right)$

$$\left(\vec{\pi}_p^{\,2} - \vec{\pi}_E^{\,2}\right)\Psi(\vec{\pi}_p^\circ) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{-8\pi\lambda m^3}{(\vec{\pi}_p^\circ - \vec{\pi}_k^\circ)^4}\,\Psi(\vec{\pi}_k)\, d^3\vec{\pi}_k^\circ, \tag{2.38}$$

полностью аналогичный уравнению (2.I5). При получении (2.38) мы воспользовались тем, что $d\omega_{\vec{k}}^{\circ} = d\omega_{\vec{\pi}_k}$, и ввели обобзначение $4\vec{\pi}_E^{\,2} = (2E-2m)m$. Решения уравнения (2.38) могут быть получены путем фурье-преобразования волновой функции

$$\Psi(\vec{\pi}) = \int e^{i\vec{\pi}\vec{\rho}}\,\Psi(\vec{\rho})\, d^3\vec{\rho} \tag{2.39}$$

и потенциала с учетом регуляризаций,использованных выше.Следовательно, волновая функция уравнения (2.38) может быть записана в центрально-симметричном случае $\Psi(\vec{\pi}_p) = \Psi(|\vec{\pi}_p|)$ как

$$\pi_p^\circ\Psi(\pi_p^\circ) = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{u^3}{3} - iu\xi}\left\{\frac{1}{\pi_p^\circ + um\lambda^{1/3} + i\varepsilon} + \frac{1}{\pi_p^\circ - um\lambda^{1/3} - i\varepsilon}\right\}du \tag{2.40}$$

Условие квантования энергетических уровней в случае квазипотенциала (2.35), как нетрудно видеть, может быть представлено в форме

$$2E_n = 2m\left(1 + 2\xi_n\lambda^{2/3}\right). \tag{2.4I}$$

Считая кварки, из которых составлены мезоны, частицами со спином I/2 и выбирая феноменологический квазипотенциал в виде (2.35), применим условие квантования (2.4I) для описания спектра масс возбужденных состояний Ψ -, Υ - и ρ -мезонов. Масса связанного состояния при этом считается равной $M_n = 2E_n$, а два параметра теории - масса кварка $m = m_q$ и константа λ фиксируются по двум известным уровням (экспериментальные данные взяты нами из обзора /5/). При этом для Ψ - частиц имеем $m_c = 1{,}2$ ГэВ, $\Lambda_c = 0{,}123$, для Υ -частиц $m_b = 4{,}36$ ГэВ, , $\Lambda_b = 0{,}036$, а для ρ-мезонов в предположении, что первое возбужденное состояние имеет $M =$ I,25 ГэВ, m_u = 0,07 ГэВ, $\Lambda_u = 1{,}897$ $(\Lambda = 2\lambda^{2/3})$Из таблицы видно, что для известных радиальных возбуждений теория дает неплохое согласие с экспериментом. Приведены также предсказания для высших радиальных возбуждений.

3. Заключение

Таким образом, в рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля мы рассмотрели несколько возможных обобщений нерелятивистских феноменологических потенциалов запирания. Тот факт, что в конфигурационном представлении, которое здесь появляется только лишь в качестве вспомогательного, потенциал является запирающим, означает, что в импульсном представлении $V(\vec{p},\vec{k};\overset{\circ}{E})$ обладает сингулярным при $\vec{p}=\vec{k}$ поведением. Для двух простых возможностей выбора взаимодействия типа осцилляторного получены в импульсном представлении волновые функции и условия квантования уровней энергии. На основе уравнения Логунова-Тавхелидзе получен точный спектр энергий и найдено интегральное представление для волновых функций в импульсном представлении в случае выбора феноменологического потенциала $V(\vec{p},\vec{k},\overset{\circ}{E})\sim(\vec{p}-\vec{k})^{-4}$. С учетом принятой обычно регуляризации фактически показано, что этот квазипотенциал отвечает линейно растущему в конфигурационном представлении потенциалу. Рассмотрен аналогичный выбор квазипотенциала в случае уравнения, справедливого для спиновых частиц, для которого также выписаны волновые функции в импульсном представлении и получен энергетический спектр, сравнение которого с известными спектрами масс мезонов дает хорошее согласие теории и эксперимента.

В заключение авторы благодарят В.Г. Кадышевского, А.Д. Линкевича, В.И. Саврина, А.В. Сидорова и М.В. Чижова за обсуждения.

Таблица

Массы возбужденных состояний Ψ -, Υ - и ρ - мезонов для потенциала запирания (2.35)

	M_Ψ ГэВ		M_Υ ГэВ		M_ρ ГэВ	
n	Эксп.	Теория	Эксп.	Теория	Эксп.	Теория
1	3,095	3,095	9,46	9,46	0,776	0,776
2	3,686	3,614	10,01	10,01	1,25	1,25
3	4,04	4,04	10,38	10,45	1,55÷1,65	1,64
4	4,41	4,41	10,54	10,85		1,98
5		4,75		11,22		

Литература

I. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, v.29, N 2, p.380-400.

2. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. В кн.: Проблемы теоретической физики (Сб., посвященный Н.Н.Боголюбову в связи с его 60-летием), М., "Наука", 1969, стр.261-277;
Kadyshevsky V.G. Nuol.Phys., 1968, v.B6, N 1, p.125-142.

3. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cim.,1968,v.55A,N 2,p.1332-40.

4. Ширков Ю.М. ЖЭТФ, 1958, т.35, №4, стр.1005-1013.

5. Quigg C., Rosner J.L. Phys.Rep.,1979, v.56, p.167.

6. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ЯФ, 1980, т.31, №5, с.1332-1340;
Сидоров А.В., Скачков Н.Б. ТМФ, 1981, т.46, с. 218;
Savrin V.I., Sidorov A.V., Skachkov N.B. Hadronic J.,1981,4,p.1642.

7. Кулешов С.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б. Сообщение ОИЯИ P2-82-7, Дубна, 1982.

8. Фаустов Р.Н. ТМФ, 1970, т.3, №2, стр.240-254.

9. Muller-Kirsten. Phys.Rev., D,v.12, N 4, p.1103.

10. Kvinikhidze A.N.,Stoyanov D.Ts. JINR, E2-5746, Dubna, 1971.

11. Кулешов С.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б. Сообщение ОИЯИ, P2-81-283, Дубна, 1981.

12. Донков А.Д., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. ТМФ, 1971, т. 8, № 1, с. 61-72.
Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М., Нагиев Ш.М. ТМФ, 1980, т. 44, № 1, с. 47-63.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1982 года.