сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-261

Г.Г.Бунатян

ПИОННОЕ ПОЛЕ В ИЗОТРОПНОМ ЯДЕРНОМ ВЕЩЕСТВЕ

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Знание свойств пионного поля в ядерной среде необходимо для решения многих задач ядерной физики и прежде всего для изучения возможности π-конденсатного фазового перехода [1-3] и близости ядер к π-конденсатной неустойчивости [4-6]. Поскольку согласно реалистическим оценкам [7,8] критическая плотность велика, $\rho_c \gtrsim (2 \div 3)\rho_0$, для π-конденсации требуется существенное уплотнение, которое неизбежно сопровождается нагреванием [9,10]. Поэтому необходимо изучать свойства пионного поля в среде как при $T=0$, так и при $T \neq 0$, что и делалось в ряде работ. Как было впервые показано в [11], решающую роль вблизи критической точки π-конденсации играют флуктуации пионного поля. В настоящей работе мы продолжим эти исследования, причем ограничимся здесь изучением изотропного ядерного вещества при плотности $\rho < \tilde{\rho}_c(T)$, когда в системе еще нет среднего пионного поля, $\langle\vec{\pi}\rangle \neq 0$. Термодинамические условия π-конденсации, то есть появления $\langle\vec{\pi}\rangle \neq 0$, будут рассмотрены в следующей работе. Во всех расчетах используется метод температурных функций Грина [12], как это делалось и в предыдущих работах [8,11,13,14]. Данная работа есть непосредственное продолжение [14]. Ссылаясь далее в тексте на формулы из [14], мы перед номером формулы ставим цифру 1 и точку. Например, ссылка на формулу /6/ из [14] выглядит так: /1.6/ и т.п. Для изучения свойств интересующих нас величин Π^{π}, $\mathfrak{D}$ вблизи критической точки, в частности их зависимости от $\omega, \vec{k}$, мы в двух следующих разделах 2,3 для $T=0$ и $T \neq 0$ воспользуемся для вычисления интегралов в /1.6/ аппроксимацией /1.7/, заменяя $\Pi^{3\pi}$ его значением при $\omega=0$, $k=k_0$, а затем в разделе 4 обсудим зависимость Π^{π} от $\omega, \vec{k}$ и следствия, к которым она может приводить.

2. ПИОННОЕ ПОЛЕ В ИЗОТРОПНОМ ЯДЕРНОМ ВЕЩЕСТВЕ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПРИ $T=0$

1. Рассмотрим Π^{π} /1.6/ при $T=0$. Часть выражения /1.6/, исчезающая при $T=0$, представляет собой вклад в Π^{π} тепловых флуктуаций пионного поля /"черного излучения"/. Часть Π^{π}, не исчезающая при $T=0$, есть вклад в Π^{π} от квантовых флуктуаций при $T=0$. Из него следует вычесть бесконечный вакуумный вклад Π^{π} /0,0/, уже включенный в наблюдаемую массу пиона, что

и подразумевается везде далее. Заметим, что весь бесконечный вклад квантовых флуктуаций в Π^{π} можно исключить, беря лагранжиан взаимодействия /1.5/ в форме нормального произведения, как это делалось в [11,13], где была подробно изучена лишь часть $\Pi^{1\pi}$, обусловленная тепловыми флуктуациями.

Неустойчивость пионного поля определяется величиной $\tilde{\omega} = \min \mathfrak{D}^{-1} \approx \mathfrak{D}^{-1}(0, k_0, \rho, T)$ в /1.7/. С другой стороны, благодаря максимуму $\mathfrak{D}$ при $\tilde{\omega}^2 \to 0$, $\omega \sim 0$, $k \sim k_0$ все интересующие нас далее выражения в /1.6/ и т.п. можно, как увидим, свести к интегралам по импульсам $k \sim k_0$ и малым частотам $\omega \sim 0$, заменяя для этих k, ω точную $\mathfrak{D}$-функцию ее аппроксимацией при $\tilde{\omega}^2 \sim 0$, $\omega \sim 0$, $k \sim k_0$. Поведение системы вблизи критической точки определяется мягкой модой.

2. Согласно сказанному выше нас интересует $\Pi^{\pi}(\omega, \vec{k})$ при $\rho \sim \rho_c(T)$, $\tilde{\omega}^2 \to 0$, $\omega \sim 0$, $k \sim k_0$. Заменим вначале для оценки $\tilde{\Lambda}$ в /1.6б/ на Λ, тогда при $T=0$ из /1.6а/, /1.6б/ найдем

$$\Pi^{1\pi}(\rho, 0) = 5\Lambda \mathfrak{N}(\rho, 0) = 5\Lambda \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{Y(0, \vec{k}, \rho)}{\pi}, \quad Y_i \equiv Y(r, \vec{k}, \rho) = \qquad /1а/$$

$$= \int_0^\infty d\xi \, \mathrm{Im}\, \mathfrak{D}^n(\xi - i0, \vec{k}_i) e^{-\xi r} \ . \quad \Pi^{3\pi}(0, \vec{k}, \rho, 0) =$$

$$= \frac{20\Lambda^2}{\pi^3} \iiint \frac{d\vec{k}_1 \, d\vec{k}_2 \, d\vec{k}_3}{(2\pi)^6} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}) \int_0^\infty dr \, Y_1 Y_2 Y_3 \, . \qquad /1б/$$

Большие $k \gg k_0$ не вносят вклада в /1/ из-за свойств $\mathrm{Im}\,\mathfrak{D}^n$ /см. [11, 13, 14]/. Уравнения /1/ можно решать численно, находя $\mathrm{Im}\,\mathfrak{D}^n$ согласно [13], но мы не станем здесь этого делать, так как такой расчет очень сложен. Нас интересует поведение Π^{π} вблизи критической точки, то есть при малых $\tilde{\omega} < \epsilon_F$ в /1.7/. В этом случае выражения /1/ можно приближенно преобразовать, используя наличие достаточно резкого максимума подынтегральных функций в интегралах по k_i при $k_i \approx k_0$, $\xi \ll 1$, что использовалось уже ранее в [11,14]. Для оценки интегралов в /1б/ можно $|k_i|$ в δ-функции и в $d\vec{k}_i$ заменить на $|\vec{k}_0|$. Согласно сказанному во введении мы здесь проведем приближенное вычисление интегралов в /1/, используя /1.7/ и не учитывая возможной зависимости $\tilde{\omega}^2$ от $\omega, \vec{k}$, то есть заменяя $\Pi^{3\pi}$ его значением при $\omega = 0$, $k = k_0(T)$. В перечисленных приближениях из /1/ получаем оценки вблизи критической точки:

$$Y(r, k) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{\xi \, d\xi \, e^{-\xi r}}{X^2 \beta^{-2} + \xi^2} = -(\mathrm{ci}(z)\cos(z) + \mathrm{si}(z)\sin(z))/\beta = \qquad /2/$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos ry}{\beta y + X} dy = Y(z), \quad z = X r \beta^{-1}, \quad X(q) = \tilde{\omega}^2 + \gamma q^2, \quad q = k - k_0,$$

$$\Pi^{1\pi}(\rho, 0) = 5\Lambda \mathfrak{N}(\rho, 0) \sim 5\Lambda \Big(c_1 - \frac{k_0^2}{\pi^3 \beta} \frac{2\tilde{\omega}}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arctg} \frac{q_0 \sqrt{\gamma}}{\tilde{\omega}} - \qquad /3/$$

$$- \frac{\tilde{\omega}^2 q_0}{6\pi^3 \beta\gamma} + \ldots\Big), \qquad q_0 \lesssim k_0 .$$

$$\Pi^{3\pi}(0, \vec{k}, \rho, 0) = \frac{-20}{\pi^3} \Lambda^2 \cdot k_0^6 \cdot I(\vec{k}) \Big(\int_0^\infty dy \cos(ry) \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{2}{\sqrt{\beta y + \tilde{\omega}^2}} \times$$

$$\times \operatorname{arctg}\Big(\frac{q_0 \sqrt{\gamma}}{\sqrt{y\beta + \tilde{\omega}^2}} \Big)\Big)^3, \quad I(\vec{k}) = \iiint \frac{d\vec{n}_1 \, d\vec{n}_2 \, d\vec{n}_3}{k_0^3 (2\pi)^6} \times \qquad /4/$$

$$\times \delta(\vec{n}_1 + \vec{n}_2 - \vec{n}_3 - \vec{k}/k_0), \qquad \vec{n}_i = \vec{k}_i / k_0$$

/см. [15], стр. 326/.

3. В /3/ c_1 – постоянная при $\tilde{\omega} \approx 0$ и все это выражение для $\Pi^{1\pi}(\rho, 0)$ остается конечным при $\tilde{\omega} \to 0$. Постоянная в /3/ зависит от обрезания интеграла по k, она содержит разность бесконечных вкладов от интегралов по большим k, как было отмечено выше. Согласно /1.3/, /3/ для $\tilde{\omega}^2$ имеем вблизи критической точки при $T=0$ уравнение

$$\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 + 5\Lambda(c_1 - c_2 \tilde{\omega} - c_3 \tilde{\omega}^2 + \ldots), \quad c_i > 0 . \qquad /3а/$$

Ясно, что при достаточно большой плотности изотропной фазы $\omega_0^2 + c_1 \cdot 5\Lambda = 0$, из /3а/ получим $\tilde{\omega} = 0$, но /3а/, очевидно, не может иметь решений $\tilde{\omega}^2 < 0$.

Отметим, что в работе [16] для вклада квантовых флуктуаций в $\Pi^{1\pi}$ было ошибочно получено логарифмически расходящееся выражение $\Pi^{1\pi} \sim \ln|\tilde{\omega}|$. Ошибка автора [16] проистекает от того, что он приписал пионной функции Грина в ядерном веществе неправильные аналитические свойства, а именно, его выражение для $\mathfrak{D}$ соответствовало бы наличию у $\mathfrak{D}$ реального полюса при $k \sim k_0$, $\omega \sim 0$, тогда как в действительности $\mathfrak{D}(\xi)$ имеет точки ветвления и определена на плоскости ξ с разрезом на действительной оси [11,13,14], как указывалось выше. При этом, как можно заключить из /1.7/ [11], скачок /1.4/ $\mathrm{Im}\,\mathfrak{D}$ на разрезе не мал.

4. Убедимся теперь, что $\Pi^{3\pi}(\rho, 0)$, как и $\Pi^{1\pi}(\rho, 0)$, не содержит расходимостей при $\tilde\omega\to 0$. Для дальнейших оценок представим /4/ в виде

$$\Pi^{3\pi}(\rho,0) \approx -\frac{160\Lambda^2 k_0^6}{\pi^3}\gamma^{-3/2}\, I(\vec k)\int_0^\infty dr\Big[\int_{k_0^2}^\infty dy\cos(ry)\cdot(\beta y+\tilde\omega^2)^{-1/2}\times \qquad /5/$$

$$\times\Big(\frac{\sqrt{\gamma}\,q_0}{\sqrt{\beta y+\tilde\omega^2}}-\frac{1}{3}\frac{(q_0\sqrt{\gamma})^3}{(\beta y+\tilde\omega^2)^{3/2}}+\ldots\Big)+\int_0^{k_0^2}\frac{dy\cos(ry)}{\sqrt{\beta y+\tilde\omega^2}}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{y\beta+\tilde\omega^2}}{q_0\sqrt{\gamma}}+\ldots\Big)\Big].$$

Нас интересуют малые $\tilde\omega^2$, поэтому можно везде пренебрегать $\tilde\omega^2$ по сравнению с $k_0^2\beta \sim 4$, в частности в первом интеграле по dy в /5/. Качественно правильную зависимость интегралов по dy от r в /5/ как при $r\to 0$, так и при $r\to\infty$ можно получить, оставляя в обоих интегралах лишь первый член в разложении arctg. Тогда /5/ приближенно перепишем в виде /см.[15] с.941/

$$\Pi^{3\pi}(\rho,0) \sim -\frac{160\Lambda^2 k_0^6}{\pi^3}\gamma^{-3/2} I(\vec k)\Big\{\int_0^{1/k_0^2} dr\Big[\frac{\pi k_0}{\sqrt{\beta}}-\frac{k_0\sqrt{\gamma}}{\beta}\mathrm{ci}(rk_0^2)\Big]^3 + \qquad /6/$$

$$+\int_{1/k_0^2}^\infty dr\, f^3(r)\Big\},\quad f(r)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\beta r}}\int_0^{k_0^2 r}\frac{dz\cos z}{\sqrt{z+\tilde\omega^2 r\beta^{-1}}}-\frac{k_0\sqrt{\gamma}}{\beta}\mathrm{ci}(rk_0^2).$$

Первый интеграл по dr в /6/, очевидно, никаких расходимостей не содержит. Сходимость $\Pi^{3\pi}(\rho, 0)$ при $\tilde\omega\to 0$ определяется поведением подынтегральной функции $f^3(r)$ /6а/ в последнем интеграле по dr при $r\to\infty$. Если здесь сразу положить $\tilde\omega=0$, то из /6а/ при $r\to\infty$ находим /см.[15] с. 434/

$$f(r)\approx\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{3/2}(\beta r)^{-1/2}-k_0\sqrt{\gamma}\beta^{-1}\mathrm{ci}(rk_0^2) \qquad /6а/$$

и, учитывая свойства ci /см.[15], с. 942/, заключаем, что при $\tilde\omega=0$ $\Pi^{3\pi}(\rho, 0)$ остается конечным. Зависимость от $\tilde\omega$ $f(r)$ /6а/ при $r\to\infty$ имеет вид /см.[15], с. 432/

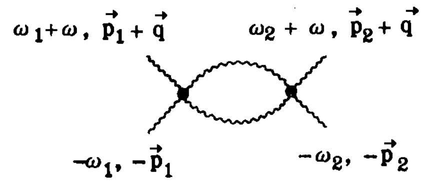
$$f(r)\approx\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{3/2}(\beta r)^{-1/2}\big(\cos z(1-2C(\sqrt{z}))+\sin z(1-2S(\sqrt{z}))-\mathrm{ci}(rk_0^2)\big)\frac{k_0^2\sqrt{\gamma}}{\beta},$$

$$z=\tilde\omega^2 r\beta^{-1}, \qquad /6б/$$

C, S – косинус и синус интегралов Френеля /см.[15] с. 945/. Из /6/, /6б/ с учетом свойств C, S, ci следует, что при $\tilde\omega\to 0$

имеем $\Pi^{3\pi}\sim c_1'+c_2'\tilde\omega$, то есть учет $\Pi^{3\pi}$ ведет в рассмотренном случае к переопределению постоянных в /3/, /3а/.

5. В этих оценках мы заменяли полную амплитуду $\pi\pi$-рассеяния в среде $\tilde\Lambda$ из /1.6б/ затравочной Λ из /1.5/. Для изучения $\tilde\Lambda(\omega_1,\vec p_1;\omega_1',\vec p_1';\ \omega_2,\vec p_2;\ \omega_2',\vec p_2')$ вблизи критической точки $\tilde\omega\to 0$ рассмотрим входящую в $\tilde\Lambda$ диаграмму – замкнутую пионную петлю из двух линий с суммарным импульсом и частотой, близкими к нулю, $|\vec q| \ll \tilde\omega$:



$$=\Lambda^2(\hat{\vec\pi})^4\,\mathcal{A}^\pi(\omega,\vec q,\rho,T).$$
$$|\vec q|\to 0,\quad \omega\to 0$$

$$\mathcal{A}^\pi(\omega,\vec q,\rho,T)=-\frac{11}{2}\mathcal{A}(\omega,\vec q,\rho,T)=-\frac{11}{2}\int\frac{d\vec k}{(2\pi)^3}\int_c\frac{d\xi_1}{2\pi i}\cdot\int\frac{d\xi_2}{2\pi i}\frac{1}{2}\times$$

$$\times\chi(\xi_1)\chi(\xi_2)\mathfrak{D}(\xi_1,\vec k)\,\mathfrak{D}(\xi_2,\vec k+\vec q)\big[e^{(\xi_1+\xi_2)/T}-1\big]\big[(\xi_1+\xi_2+\omega)^{-1}+(\xi_1+\xi_2-\omega)^{-1}\big].$$

Из /7/ ясно, что при $\omega\sim 0$, $|\vec q|\sim 0$ $\mathcal{A}^\pi\sim a_0+a_1\omega^2+a_2 q^2$. В этом разделе мы рассматриваем случай $T=0$:

$$\mathcal{A}(0,0,\rho,0)=2\int\frac{d\vec k}{(3\pi)^3}\int_0^\infty\frac{dr}{\pi^2}Y^2(r,\vec k,\rho,0). \qquad /7а/$$

Вблизи критической точки величина Y уже вычислялась выше. После замены переменных $(k-k_0)/\tilde\omega=z$, $r\tilde\omega^2/\beta=t$ из /7а/ получаем оценку

$$\mathcal{A}(0,0,\rho,0)=\frac{k_0^2}{\beta\pi^4\tilde\omega}\int_0^\infty dz\int_0^\infty Y^2(t(1+\gamma z^2),\ \rho,0)\,dt. \qquad /7б/$$

Эта величина вблизи критической точки расходится $\sim 1/\tilde\omega$. Оценка интеграла в /7б/ с учетом свойств si, ci /см.[15], с. 942, 657/ дает

$$\mathcal{A}^\pi\sim-\frac{k_0^2}{4\tilde\omega\pi^2\beta\sqrt{\gamma}}\cdot\frac{11}{2}, \qquad /7в/$$

где коэффициент перед $1/\tilde\omega$ не мал.

Интересно отметить, что поведение $\mathcal{A}^\pi\sim 1/\tilde\omega$ получалось и в работе [17]/конечно, с другим коэффициентом/, где вычисления проводились иным способом: не с $\mathfrak{D}$-функциями пионного поля в ядерном веществе, как в наших работах [11,13,14], а с причинной $\mathfrak{D}$-функцией, имеющей комплексный полюс при $k-k_0$, $\omega\sim 0$, подобно тому, как это делалось ранее в [18] для системы с ротонным спектром при $T \neq 0$. Расчет других величин, $\Pi^{1\pi}, \Pi^{3\pi}$, таким способом, как в [17], привел бы, как легко проверить, к результатам, совершенно не похожим на наши. Из графиков, входящих в $\tilde{\Lambda}$, особенности при $T=0$ имеют лишь выделенные в /7/ петли из двух пионных линий с полными импульсом и частотой, близкими к нулю $|\vec{q}| \ll \tilde{\omega}$, $\omega \sim 0$. Свойства полной амплитуды рассматриваем далее так же, как это делается в [18]. Пусть Λ' – амплитуда, не содержащая ни в одном канале графиков /7/ с $q=0$, $\omega=0$. Тогда для полной амплитуды рассеяния $\tilde{\Lambda}(\vec{p}, -\vec{p}, \vec{p}', -\vec{p}')$, входящей в /1.6б/, найдем

$$\tilde{\Lambda}(\vec{p}, \vec{p}') = \Lambda'/(1 - 4\Lambda' \mathcal{A}^{\pi}), \qquad /8/$$

а для импульсов $\vec{p} \approx \pm \vec{p}'$

$$\Lambda(\vec{p}, \pm\vec{p}) = \Lambda' \cdot (1 + 4\mathcal{A}^{\pi}\Lambda')/(1 - 4\Lambda' \mathcal{A}^{\pi}). \qquad /8a/$$

Как видим, при $\tilde{\omega} \to 0$ $\tilde{\Lambda}$ не расходится ни при каких $\vec{p}, \vec{p}'$, поэтому и вся величина $\Pi^{3\pi}$, содержащая $\tilde{\Lambda}$, стремится к конечному пределу при $\tilde{\omega} \to 0$.

6. Итак, мы убедились, что при $T=0$ весь поляризационный оператор Π в /1.6/ не содержит расходимостей вблизи критической точки, $\tilde{\omega} \to 0$. При $T=0$ в изотропном ядерном веществе не происходит роста флуктуаций пионного поля вблизи критической точки. Поэтому не исключается возможность близости обычных ядер плотности ρ_0 к π-конденсатной неустойчивости, что было бы заведомо невозможно, если бы для $T=0$ Π^{π} содержал расходимости при $\tilde{\omega} \to 0$, как это имеет место для $T \neq 0$ [11].

3. ПИОННОЕ ПОЛЕ В ИЗОТРОПНОМ ЯДЕРНОМ ВЕЩЕСТВЕ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПРИ $T \neq 0$

1. Свойства Π^{π} при $T \neq 0$ вблизи критической точки в пренебрежении $\Pi^{3\pi}$ и вкладом квантовых флуктуаций, то есть 1 рядом с $2\chi(\xi)$ в /1.6а/, были подробно изучены в [11]. С учетом рассмотренного в предыдущем разделе вклада квантовых флуктуаций /3/, /3а/ простые алгебраические уравнения для $\Pi^{1\pi}$:

$$\Pi^{1\pi} = 5\Lambda \mathfrak{N}(\rho, T) = \frac{5\Lambda k_0^2 T}{8\pi\sqrt{\gamma\tilde{\omega}}} \left(\frac{\pi\beta T}{6\tilde{\omega}^2}\right)^x + 5\Lambda(c_1 - c_2\tilde{\omega} - c_3\tilde{\omega}^2 + \ldots),$$

$$\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 + \Pi^{1\pi}, \qquad /9/$$

получаются из /1.3/, /1.6/, если $\tilde{\omega}^2 \ll 2\pi T$ $(x=0)$ или если $T \ll \tilde{\omega}^2 \ll 1$ $(x=1)$ [11] /c_i из /3/, /3а//. Ясно, что включение в Π^{π} квантовых флуктуаций не меняет существенно поведения

величины $\Pi^{1\pi}$ при $T \neq 0$ вблизи критической точки $\tilde{\omega} \to 0$, и все выводы, сделанные в [11], остаются в силе; при $T \neq 0$ уравнение $\mathfrak{D}^{-1}(\omega, \vec{k}, \rho, T) = 0$ не может иметь решений $\omega^2(k) \leq 0$.

2. Вычислим теперь $\Pi^{3\pi}$ при $T \neq 0$ в тех же приближениях, что и в предыдущем разделе для $T=0$. Как всегда, нас интересует поведение $\Pi^{3\pi}(\omega, \vec{k}, \rho, T)$ при $k \sim k_0$, $\omega \sim 0$. Заменяя в /1.6/ $\tilde{\Lambda}$ на Λ, получаем при $T \neq 0$

$$\Pi^{3\pi}(0, k_0, \rho, T) = -\frac{10\Lambda^2}{\pi^3} \int \frac{d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\, d\vec{k}_3}{(2\pi)^6} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 - \vec{k}) \int_0^{1/T} d\tau\, Y_1 Y_2 Y_3 .$$

$$Y_i(\tau, \vec{k}_i, \rho, T) = \int_c d\xi\, \mathfrak{D}(\xi)\chi(\xi)e^{\xi\tau} = 2\int_0^{\infty} d\xi\, \mathrm{Im}\,\mathfrak{D}(\xi - i0)\,\mathrm{sh}(\xi\tau)\chi(\xi) + \int_0^{\infty} d\xi\, \mathrm{Im}\,\mathfrak{D}(\xi - i0)\, e^{-\xi\tau} . \qquad /10/$$

Вблизи критической точки подынтегральная функция в /10/ имеет резкий максимум при $k_i \sim k_0$, $\xi \sim 0$, и оценку Y_i получаем, используя для $\mathfrak{D}$ ту же аппроксимацию, что и в предыдущем разделе:

$$Y \approx \frac{2}{\beta}\int_0^{\bar{y}} \frac{y\,dy \quad \mathrm{sh}(yX\tau\beta^{-1})}{(1+y^2)(\exp(yXT^{-1}\beta^{-1}) - 1)} + \frac{1}{\beta}\int_0^{\bar{y}} \frac{y\,dy}{1+y^2} e^{-yX\tau/\beta} . \qquad /11/$$

Обрезание $\bar{y} = \bar{\xi}\beta X^{-1} = \beta X^{-1}(M_{\Delta} - m + k^2/2(M_{\Delta} - m))$ определяется свойствами $\mathrm{Im}\Pi$ [11,13]. Y_i зависят от $yX\tau\beta^{-1}$ и $yX\beta^{-1}T^{-1}$, $\tau \leq 1/T$ и быстро убывают при $\tilde{\omega} \sim 0$ с ростом $q = |k - k_0|$. Учитывая это, из /10/ приближенно получаем

$$\Pi^{3\pi}(0, k, \rho, T) \approx -\frac{10\Lambda^2}{\pi^3} I(\vec{k}) \int_0^{1/T} d\tau \left(\int_{-q_0}^{q_0} k_0^2 Y\, dy\right)^3, \quad q_0 \lesssim k_0 . \qquad /10a/$$

Оценим Y /11/ в случае $\tilde{\omega} \ll T$, тогда при $k \sim k_0$ экспоненты в /11/ можно разложить в ряд, так как $y > T/X$ дают малый вклад в интеграл. При $k \sim k_0$, $\tilde{\omega} \sim 0$ имеем

$$Y \sim \pi T/X + (\tau^2 T - \tau)\bar{\xi}/\gamma . \qquad /11a/$$

Хотя мы и интересуемся поведением Π^{π} при $\tilde{\omega} \to 0$, но, поскольку в $\Pi^{3\pi}$ /10а/ входит интеграл в третьей степени, мы оставили в /11а/ не только сингулярный при $X \to 0$ член, но и второй, не содержащий X. Из /10а/, /11а/ находим

$$\Pi^{3\pi} \sim -(k_0^6\, 10\Lambda^2 \pi^3 \gamma^{-3/2})\, I(\vec{k})\, T^2\, \tilde{\omega}^{-3} \left(1 - \frac{Q\sqrt{\gamma}\tilde{\omega}}{2\beta\pi^2 T^2} + \frac{Q^2\gamma\tilde{\omega}^2}{10\beta^2\pi^4 T^4} - \frac{Q^3\gamma^{3/2}\tilde{\omega}^3}{140\beta^3\pi^6 T^6}\right), \quad Q \sim \frac{2(M_{\Delta} - m)^2 k_0 + 8k_0^3}{M_{\Delta} - m} . \qquad /10б/$$

Здесь можно оставить лишь первый член, если при малых $\tilde{\omega}\to 0$ и $T\neq 0$ не только $\tilde{\omega}^2 T^{-1}\ll 1$, что уже предполагалось при получении /10а/, /11а/, но и $\tilde{\omega}T^{-2}\ll 1$. В этом случае $\Pi^{3\pi}$ можно пренебречь по сравнению с $\Pi^{1\pi}$ вблизи критической точки, если $\Lambda T_c\tilde{\omega}_c^{-2}\ll 1$, что и делалось в [11]. Однако при $T\neq 0$ в критической точке $\tilde{\omega}_c\neq 0$, как мы убеждались в [11], и может быть так, что $\tilde{\omega}_c^2/T\ll 1$, но $\tilde{\omega}_c T^{-2}\gtrsim 1$, и тогда надо сравнивать $\Pi^{1\pi}$ со всем выражением /10б/. Пренебречь $\Pi^{3\pi}$ можно, если не только $T_c\ll\tilde{\omega}_c^2/\Lambda$, но и $T_c^2\gg\Lambda/\tilde{\omega}_c$, $T_c^3\gg\Lambda$, $T_c^5\gg\Lambda\tilde{\omega}_c$. Если же в расчетах с данным Λ окажется, что эти условия не выполняются, то для описания фазового перехода необходимо учитывать не только $\Pi^{1\pi}$, как в [11], но и $\Pi^{3\pi}$. Ясно, что при достаточно малых Λ все эти условия выполнимы, но сколь угодно малые Λ вряд ли представляют физический интерес. Как можно заключить из расчетов в [11] с учетом лишь $\Pi^{1\pi}$, фазовый переход происходит при таких T_c, $\tilde{\omega}_c$, что эти условия могут выполняться для $\Lambda\leq 0{,}5$, во всяком случае для $\Lambda\sim 0{,}1$.

Замена в /16б/ Λ на полную $\tilde{\Lambda}$ не меняет , как и при $T\neq 0$, существа проведенных оценок $\Pi^{3\pi}$. Формулы /8/ для $\tilde{\Lambda}$ остаются, очевидно, прежними. Величина $\mathfrak{A}^{\pi}$ /7/ вычисляется при $T\neq 0$, $\omega\sim 0$, $q\sim 0$ тем же методом, что и $\Pi^{3\pi}$. В отличие от $T=0$, для $T\neq 0$, $T\gg\tilde{\omega}^2$ диаграмма /7/ расходится при $\tilde{\omega}\to 0$ не только при малом суммарном импульсе двух пионных линий в петле. Для малых $|\vec{q}|\ll\tilde{\omega}$ найдем

$$\mathfrak{A}^{\pi}(0,0,\rho,T)=-\frac{11}{2}\mathfrak{A}(0,0,\rho,T)\sim-\frac{11}{2}\Big(\frac{k_0^2T}{\pi\tilde{\omega}^3\,4\sqrt{\gamma}}-\frac{\bar{\xi}\,k_0^2}{b\sqrt{\gamma}\,\pi^2T\tilde{\omega}\,6}+\ldots\Big). \qquad /12/$$

Поскольку мы рассматриваем $T\gg\tilde{\omega}^2$, второй член в /12/ гораздо меньше первого. Если же суммарный импульс пионных линий в петле не мал, $|\vec{q}|\gtrsim\tilde{\omega}$, то

$$\mathfrak{A}^{\pi}(0,\vec{q},\rho,T)=-\frac{11}{2}\mathfrak{A}(0,\vec{q},\rho,T)\sim\frac{11}{2}\Big(\frac{k_0^2T\pi}{8\gamma\tilde{\omega}^2|\vec{q}|}+\ldots\Big), \qquad /12а/$$

что в нашем случае меньше /12/.

До сих пор мы проводили оценки Π^{π} для $T\gg\tilde{\omega}^2$. При низких температурах $T\ll\tilde{\omega}^2$ наличие в диаграмме $\Pi^{3\pi}$ лишних суммирований по ω_m или интегрирований по $d\xi$ приводит, как легко видеть, к тому, что ее выражение содержит дополнительный фактор $\sim\Lambda(T\tilde{\omega}^{-2})^2\ll T$ по сравнению с $\Pi^{1\pi}$.

3. Итак, поляризационный оператор пиона в ядерном веществе /1.6/ вблизи критической точки содержит расходящиеся вклады от тепловых флуктуаций пионного поля. Следовательно, уравнение /1.3/ с учетом Π^{π} не может иметь решений с малыми $\tilde{\omega}\to 0$ ни при какой конечной плотности ρ. Это означает, что тепловые флуктуации пионного поля исключают близость однородной фазы ядерного вещества к состоянию, в котором частота пионной моды обращалась бы в нуль. Условия π-конденсации формулировались в [11], и мы еще вернемся к их исследованию в последующей работе, а сейчас кратко обсудим зависимость $\Pi^{3\pi}$ от $\omega,\vec{k}$, о чем говорилось в конце [14].

4. ЗАВИСИМОСТЬ Π^{π} ОТ $\omega,\vec{k}$

1. В лагранжиане $\pi\pi$-взаимодействия /1.5/ $\Lambda>0$ - положительные постоянные. В этом простейшем приближении $\Pi^{1\pi}$ получилось независящим от $\omega,\vec{k}$, но $\Pi^{3\pi}$ от $\omega,\vec{k}$ зависит. Эта зависимость Π^{π} от $\omega,\vec{k}$ не изменит существенно всех результатов, если сохранится, хотя бы приближенно, аппроксимация /1.7/ для $\mathfrak{D}$ при $k\sim k_0$, $\omega\to 0$, $\rho\sim\rho_c$. Поэтому необходимо выяснить, как $\Pi^{3\pi}$ зависит от $\omega,\vec{k}$ при $k\sim k_0$, $\omega\sim 0$. Из /4/, /10а/ ясно, что как при $T=0$, так и при $T\neq 0$ зависимость $\Pi^{3\pi}$ от $\vec{k}$ определяется зависимостью от $\vec{k}$ интеграла $I(\vec{k})$ в /4/. После несложных вычислений найдем

$$I(\vec{k})=\frac{8\pi^2}{(2\pi)^6k_0^3}\times\begin{cases}1, & k\leq k_0,\\ (3k_0-k)/2k\approx 1-3(k-k_0)/2k_0, & 3k_0\geq k\geq k_0,\\ 0, & k>3k_0,\end{cases} \qquad /13/$$

то есть в нашем приближении $\Pi^{3\pi}$ при $k\leq k_0$ не зависит от k, а при $k>k_0$ зависит от $(k-k_0)$ линейно. $\Pi^{3\pi}<0$, так что при $k=k_0$ $\Pi^{3\pi}$ имеет наименьшее значение и растет с ростом $k-k_0$. Зависимость $X(k)$ /1.7/ при $k\leq k_0$ имеет вид

$$X(k)=\gamma(k-k_0)^2+\tilde{\omega}^2(0,k_0,\rho,T), \qquad /14/$$

а при $k>k_0$

$$X(k)=\gamma(k-k_0)^2+\tilde{\omega}^2(0,k_0,\rho,T)-\gamma_1(k-k_0),$$
$$\gamma_1=-3\Pi^{3\pi}(0,k_0,\rho,T)/2k_0. \qquad /14а/$$

Зависимость X от k /14/, /14а/ близка к /1.8/, если $\gamma_1/2\gamma\ll 1$. В наиболее интересном случае, когда $\Pi^{3\pi}$ дается формулой /11б/, это требование означает

$$T^2\Lambda^2\tilde{\omega}^{-3}\ll 1. \qquad /15/$$

Расчеты, не учитывающие при $T\neq 0$ $\Pi^{3\pi}$, пригодны, если вблизи критической точки выполнены не только условия, приведенные после /10б/, но также и /15/.

2. Обсудим теперь зависимость Π^{π} от ω. Выше мы нашли $\Pi^{3\pi}$ при $\omega=0$. Из /1.6б/, /7/ ясно, что $\Pi^{3\pi}$ зависит от ω^2, $\Pi^{3\pi}\sim\Pi^{3\pi}+$

$+\alpha_1\omega^2$, как и Π^n в /1.7/. Величину α_1 можно оценить, замечая, что при $\omega \gg \bar{\xi} \approx M_\Delta - m + k_0^2/2(M_\Delta - m) \approx 2$ имеем $\Pi^{3\pi} \approx 0$, отсюда $\alpha_1 \sim -\Pi^{3\pi}(0,k_0)\bar{\xi}^{-2}$. Результаты расчетов без учета $\Pi^{3\pi}(\omega, \vec{k})$, очевидно, не изменяются сильно, если $\Pi^{3\pi}/\bar{\xi}^2 < 1$. Это условие по существу совпадает с приведенными после /10б/.

При $T=0$ учет зависимости $\Pi^{3\pi}(\omega,\vec{k})$ от ω, $\vec{k}$ не меняет, очевидно, вывода об отсутствии расходимостей в Π^{π} при $\tilde{\omega} \to 0$.

3. Итак, для справедливости расчетов, приведенных в данной работе и ранее в /11/, необходимо выполнение условий, при которых не только $\Pi^{3\pi}(0,k_0)$ мал по сравнению с $\Pi^{1\pi}$ вблизи критической точки, но малы и величины γ_1, α_1. В противном случае наши приближения, в частности и аппроксимация /1.7/ для $\mathfrak{D}^{-1}$, не справедливы, и требуются гораздо более сложные исследования с использованием иных методов вычисления $\Pi, \mathfrak{D}$. Но в любом случае из-за флуктуаций пионного поля появление решений $\omega^2(k) \le 0$ уравнения $\mathfrak{D}^{-1}(\omega, \vec{k}, \rho, T) = 0$ не может служить критерием π-конденсации, появления в ядерном веществе среднего пионного поля $\langle\vec{\pi}\rangle = \vec{\phi} \ne 0$.

Для получения условий π-конденсации необходимо изучить термодинамические свойства ядерного вещества в неоднородной фазе /при $\vec{\phi} \ne 0$/, что будет сделано в следующей работе.

Автор благодарен В.Н.Ефимову и В.К.Игнатовичу за полезные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигдал А.Б. ЖЭТФ, 1971, 61, с. 2209; ЖЭТФ, 1972, 63, с. 1993; Мигдал А.Б., Маркин О.А., Мишустин И.Н. ЖЭТФ, 1974, 66, с. 443.
2. Мигдал А.Б., Маркин О.А., Мишустин И.Н. ЖЭТФ, 1976, 70, с. 1592.
4. Троицкий М.И., Колдаев М.В., Чекунаев Н.И. ЖЭТФ, 1977, 73, с. 1258; Butsev V.S., Chultem D. JINR, E15-10226, Dubna, 1976; Phys.Lett., 1977, 67B, p. 33; Dey W. et al. Helw.Phys.Act., 1976, 49, p. 778.
5. Борзов И.Н. и др. ЭЧАЯ, 1981, 126, с. 848.
6. Meyer-ter-Vehen J.Phys.Rep., 1981, 74, p. 325.
7. Baym G. In: Intern.Conf. on High-Energy Phys. and Nucl. Str. 7th. Zürich, 1977, p. 309; Böckman S.O., Weise W. In: Meson in Nuclei, v. III, Oxford, 1979, p. 1095.
8. Бунатян Г.Г. ОИЯИ, Р4-11755, Дубна, 1978; ЯФ, 1979, 30, с. 258.
9. Gudima K.K. Iwe H., Toneev V.D. Phys.G., Nucl.Phys., 1979, 5, p. 229; Nagamiya S. et al. Phys.Lett., 1979, 84B, p. 147; Preprint LBL-12123, 1981.
10. Gyulassi M., Greiner W. Ann.Phys., 1977, 109, p. 485; Ericson M., Delorme J.Phys.Lett., 1978, 76B, p. 182.
11. Бунатян Г.Г., Мишустин И.Н. ОИЯИ, Р2-81-291, Дубна, 1981; ОИЯИ, Р2-81-500, Дубна, 1981.
12. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, М., 1962.
13. Бунатян Г.Г. ЯФ, 1980, 31, с. 1186.
14. Бунатян Г.Г. ОИЯИ, Р2-82-260, Дубна, 1982.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. Физматгиз, М., 1963.
16. Kleinert H. Phys.Lett., 1981, 102B, p. 5.
17. Дюгаев А.М. Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с. 181.
18. Бразовский С.А. ЖЭТФ, 1975, 68, с. 175.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 апреля 1982 года.