сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-244

С.И.Златев, В.А.Матвеев

КОМПЕНСАЦИЯ НУЛЕВЫХ МОД В ЗАДАЧЕ О КВАНТОВЫХ ПОПРАВКАХ К МАССЕ СОЛИТОНА

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о последовательном вычислении квантовых поправок к массе солитона /см., например, обзор[1] и цитированную там литературу/ представляет интерес прежде всего как пример построения теории возмущений в окрестности нетривиального классического решения нелинейного полевого уравнения. Несмотря на то, что уравнение для малых вариаций поля около заданного солитонного решения имеет решения с нулевой частотой /так называемые нулевые моды/, проблему определения пропагатора удается решить[2,3,1,4] и не прибегая к коллективным координатам.

Существование нулевых мод обусловлено неинвариантностью классического решения относительно полной группы инвариантности полевых уравнений. Подходящий выбор неинвариантных граничных[1] /или асимптотических[2] / условий или выделение бесконечного группового объема[3] позволяют определить пропагатор. При этом несколько отличающиеся диаграммные техники[2,3,1,4] приводят к двухпетлевой поправке[2,3,5] к массе солитона, совпадающей с полученной[6] на основе метода коллективных координат /вопрос о высших поправках остается открытым/.

Теория возмущений, развиваемая в работах[2,1,4], обладает интересным свойством, обусловленным в конечном счете пространственно-временной симметрией системы. Каждый член петлевого разложения формально инвариантен[2,7,1] /в пределе, когда полное время бесконечно/ при добавлении к пропагатору некоторой билинейной комбинации нулевых мод с произвольными коэффициентами. Более подробный анализ, однако, показывает, что компенсация вкладов нулевых мод происходит лишь с точностью до величин, пропорциональных некоторым степеням полного времени. В настоящей работе получены выражения для вкладов нулевых мод в сумму двухпетлевых диаграмм. Показано, что в двухпетлевом члене происходит взаимная компенсация вкладов трансляционной и лоренцевой нулевых мод /снова с точностью до степенных членов/. По этой причине результаты для двухпетлевой поправки к массе солитона, полученные с применением пропагаторов, приведенных в работах[2,1], совпадают

2. ЗАДАЧА О КВАНТОВЫХ ПОПРАВКАХ К МАССЕ СОЛИТОНА

Рассмотрим модель самодействующего скалярного поля в двумерном пространстве-времени с лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2-\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2-V(\phi). \qquad /1/$$

Будем предполагать, что уравнение движения

$$(\partial_t^2-\partial_x^2)\phi+V'(\phi)=0 \qquad /2/$$

обладает решением солитонного типа

$$\phi_{\text{кл.}}(t,x)=\Phi((x-a)\operatorname{ch}\beta-t\operatorname{sh}\beta), \qquad /3/$$

где функция Φ достаточно быстро стремится к своим асимптотическим значениям:

$$\Phi(\xi)\underset{\xi\to\pm\infty}{\longrightarrow}\Phi^{\pm}.$$

Произвольные действительные параметры a и β в /3/ имеют смысл положения солитона в момент времени $t=0$ и быстроты солитона /скорость $v=\operatorname{th}\beta$ / соответственно. Массу M_c квантового солитона можно найти по асимптотическому поведению некоторой амплитуды перехода:

$$-iM_cT\underset{T\to\infty,}{\sim}\ln\int_{1\text{-солитон}}D\phi\exp\{iS_T[\phi]\}, \qquad /4/$$

где

$$S_T[\phi]=\int_{-T/2}^{T/2}dt\int dx\,L(\phi(t,x)),$$

T - полное время, а интегрирование в правой части /4/ ведется в окрестности статического ($\beta=0$) солитонного решения. После сдвига переменной интегрирования

$$\phi(t,x)=\Phi(x-a)+\eta(t,x) \qquad /5/$$

функциональный интеграл можно в принципе вычислять, пользуясь диаграммной техникой, в которой вершины имеют вид

$$U_n(x)=\frac{d^n}{d\phi^n}V(\phi)|_{\phi=\Phi(x-a)}\ ;\quad n\geq 3.$$

Роль пропагатора играет ядро обратного к оператору

$$H=\partial_t^2-\partial_x^2+V''(\Phi(x-a)).$$

Несмотря на то, что уравнение

$$H\psi=\lambda\psi$$

обладает решениями

$$\psi_a=\partial_a\phi_{\text{кл}}|_{\beta=0}=-\Phi'(x-a), \qquad /6/$$

$$\psi_\beta=\partial_\beta\phi_{\text{кл}}|_{\beta=0}=-t\Phi'(x-a) \qquad /7/$$

при $\lambda=0$, построение пропагатора возможно [2]. Чтобы упростить выкладки, сделаем несколько предположений об операторе

$$\hat{h}=-\partial_x^2+V''(\Phi(x-a)).$$

Основные результаты работы остаются неизменными и в общем случае. Будем предполагать, что спектр оператора $\hat{h}$ состоит из точки 0 и области непрерывного спектра $[1,\infty)$, а потенциал

$$w(x)=V''(\Phi(x-a))$$

является безотражательным. Тогда собственные функции непрерывного спектра можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\hat{h}\psi_k=\omega^2(k)\psi_k,\qquad \omega(k)=(1+k^2)^{1/2},\quad k\in(-\infty,\infty);$$

$$\psi_k(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{ikx},\qquad x\to\infty;$$

$$\int dx\,\psi^*_{k_2}(x)\psi_{k_1}(x)=\delta(k_2-k_1); \qquad /8/$$

$$\int dk\,\psi_k(x_2)\psi^*_k(x_1)+\frac{1}{||\psi_a||^2}\psi_a(x_2)\psi_a(x_1)=\delta(x_2-x_1). \qquad /9/$$

Квадрат нормы функции ψ_a совпадает с классическим значением M_0 массы солитона:

$$||\psi_a||^2=\int dx\,\psi_a^2(x)=M_0.$$

Пропагатор имеет вид суммы [2,7,1] функции

$$G(t_2,x_2|t_1,x_1)=\frac{1}{2M_0}|t_2-t_1|\psi_a(x_2)\psi_a(x_1)+\\+\frac{i}{2}\int\frac{dk}{\omega}e^{-i\omega|t_2-t_1|}\psi_k(x_2)\psi^*_k(x_1) \qquad /10/$$

и некоторой билинейной комбинации $F(t_2,x_2|t_1,x_1)$ нулевых мод ψ_a и ψ_β с произвольными коэффициентами. Потребовав симметричности /что не ограничивает общности/

$$F(t_2,x_2|t_1,x_1)=F(t_1,x_1|t_2,x_2)$$

при любых значениях аргументов, имеем /7,1/

$$F(t_2,x_2|t_1,x_1)=\alpha\psi_a(x_2)\psi_a(x_1)+\gamma\psi_\beta(t_2,x_2)\psi_\beta(t_1,x_1)+$$

$$+\delta[\psi_a(x_2)\psi_\beta(t_1,x_1)+\psi_\beta(t_2,x_2)\psi_a(x_1)].$$

Пусть $W_n(T)$ - сумма всех n-петлевых диаграмм $(n=2,3,...)$ в разложении правой части /4/. Интересным свойством теории возмущений при $T=\infty$ является независимость /2,7,1/ W_n от α, γ и δ. Это свойство имеет формальный характер, поскольку при $T=\infty$ любая из величин W_n бесконечна. При конечном T можно получить выражения для членов, зависящих от α, γ и δ. Проведем анализ этих членов для случая $n=2$.

3. ВКЛАД НУЛЕВЫХ МОД В СУММУ ДВУХПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ

Сумма двухпетлевых диаграмм при $\alpha=\gamma=\delta=0$ имеет вид /2/

$$W_2=\frac{i}{8}\int G(1|1)U_4(1)G(1|1)$$
$$-\frac{i}{8}\int G(2|2)U_3(2)G(2|1)U_3(1)G(1|1) \qquad /11/$$
$$-\frac{i}{12}\int U_3(2)G^3(2|1)U_3(1)$$

и при замене пропагатора

$$G\to G+F$$

изменится на величину

$$\Delta W_2(T,\alpha,\gamma,\delta)=A_1\alpha+A_2\alpha^2+A_3\alpha^3$$
$$+C_1\gamma+C_2\gamma^2+C_3\gamma^3+D_1\delta+D_2\delta^2+D_3\delta^3+$$
$$+B_{110}\alpha\gamma+B_{101}\alpha\delta+B_{011}\gamma\delta+$$

$$+B_{111}\alpha\gamma\delta+B_{210}\alpha^2\gamma+B_{201}\alpha^2\delta \qquad /12/$$
$$+B_{021}\gamma^2\delta+B_{120}\alpha\gamma^2+B_{012}\gamma\delta^2+B_{102}\alpha\delta^2.$$

Легко показать, что

$$D_1=D_3=B_{101}=B_{011}=B_{111}=0. \qquad /13/$$

Действительно, например,

$$D_1=\frac{i}{2}\int G(1|1)U_4(1)\psi_\beta(1)\psi_a(1)$$
$$-\frac{i}{2}\int G(2|2)U_3(2)G(2|1)U_3(1)\psi_\beta(1)\psi_a(1) \qquad /14/$$
$$-\frac{i}{2}\int\psi_a(2)U_3(2)G^2(2|1)U_3(1)\psi_\beta(1).$$

Подставляя в /14/ выражения /6,7,10/ для ψ_a, ψ_β и G соответственно, убеждаемся, что все интегралы по времени в /14/ равны нулю. При помощи тождества

$$\int dx\,U_3(x)\psi_a^3(x)=0 \qquad /15/$$

нетрудно показать, что

$$A_3=C_3=B_{111}=B_{210}=B_{201}=$$
$$=B_{120}=B_{021}=B_{012}=B_{102}=0$$

и, следовательно, ΔW_2 имеет вид

$$\Delta W_2=A_1\alpha+A_2\alpha^2+C_1\gamma+C_2\gamma^2+B_{110}\alpha\gamma+D_2\delta^2. \qquad /16/$$

Величины A_1, A_2, C_1, C_2, B_{110}, D_2, вообще говоря, не равны нулю и являются функциями T. Так, например,

$$A_1=\frac{i}{4}\int G(1|1)U_4(1)\psi_a^2(1)$$
$$-\frac{i}{4}\int G(2|2)U_3(2)G(2|1)U_3(1)\psi_a^2(1) \qquad /17/$$
$$-\frac{i}{4}\int\psi_a(2)U_3(2)G^2(2|1)U_3(1)\psi_a(1).$$

Заметим, что

$$G(t,x_2|t,x_1)=G(0,x_2|0,x_1)$$

при любом t. Используя выражение /10/ для G и учитывая тождество /2/

$$\int dx\, G(t,x|t,x)\, U_3(x)\psi_a(x)=0, \qquad /18/$$

имеем

$$A_1=\frac{iT}{4}\int dx\, U_4(x)\, G(0,x|0,x)\psi_a^2(x)$$

$$+\frac{1}{8}\int\frac{dk}{\omega}\int dx_2 G(0,x_2|0,x_2)U_3(x_2)\psi_k(x_2)\times$$

$$\times\int dx_1\psi_k^*(x_1)U_3(x_1)\psi_a^2(x_1)\int_{-T/2}^{T/2}dt_2\int_{-T/2}^{T/2}dt_1 e^{-i\omega|t_2-t_1|}$$

$$-\frac{i}{16}\int\frac{dk_1}{\omega(k_1)}\int\frac{dk_2}{\omega(k_2)}\left|\int dx\, U_3\psi_a\psi_{k_1}\psi_{k_2}\right|^2\int_{-T/2}^{T/2}dt_2\int_{-T/2}^{T/2}dt_1 e^{-i[\omega(k_1)+\omega(k_2)]|t_2-t_1|}$$

$$+\frac{i}{8M_0}\int\frac{dk}{\omega}\left|\int dx\, U_3\psi_a^2\psi_k\right|^2\int_{-T/2}^{T/2}dt_2\int_{-T/2}^{T/2}dt_1|t_2-t_1|e^{-i\omega|t_2-t_1|}.$$

Интегрирование по времени после замены переменных

$$t_1=\frac{T}{2}(u+s),\qquad -1<u<1,$$

$$t_2=\frac{T}{2}(s-u);\qquad -1+|u|<s<1-|u| \qquad /19/$$

и интегрирования по s сводится к вычислению интегралов по u, которое можно выполнить с помощью формулы

$$\int_0^1 du\, e^{-i\omega Tu}u^m=\frac{m!}{(i\omega T)^{m+1}}+f_m(i\omega T)e^{-i\omega T}, \qquad /20/$$

$$m=0,1,2,\ldots$$

Здесь f_m - некоторая функция, которая имеет вид

$$f_m(z)=\sum_{\ell=1}^{m+1}\frac{a_{m\ell}}{z^\ell},$$

где $a_{m\ell}$ - коэффициенты. Не будем приводить явных выражений для $a_{m\ell}$, так как вторым членом в правой части /20/ можно пренеб-

речь по следующей причине. При вычислении поправок к массе солитона можно, сделав аналитическое продолжение, перейти к отрицательному мнимому времени /8/ $(T\to -iT)$ или же считать, что в выражении /10/ ω имеет малую отрицательную мнимую часть /1/:

$$\omega(k)=(1+k^2)^{1/2}-i\epsilon. \qquad /21/$$

В обоих случаях вклад второго члена в правой части /20/ несуществен, так как убывает экспоненциально с ростом T. Мы будем предполагать, что $\omega(k)$ имеет вид /21/, а экспоненциально малые члены в дальнейшем будем опускать. Для A_1 получим выражение

$$A_1=\frac{iT}{4}\int dx\, G(0,x|0,x)U_4(x)\psi_a^2(x)$$

$$+\frac{i}{8}\int\frac{dk}{\omega}\int dx_2 G(0,x_2|0,x_2)U_3(x_2)\psi_k(x_2)\times$$

$$\times\int dx_1 U_3(x_1)\psi_a^2(x_1)\psi_k^*(x_1)\left(\frac{2T}{i\omega}+\frac{2}{\omega^2}\right) \qquad /22/$$

$$+\frac{i}{16}\int\frac{dk_1}{\omega(k_1)}\int\frac{dk_2}{\omega(k_2)}\left|\int dx\, U_3\psi_a\psi_{k_1}\psi_{k_2}\right|^2\left[\frac{2T}{i[\omega(k_1)+\omega(k_2)]}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{[\omega(k_1)+\omega(k_2)]^2}\right]$$

$$+\frac{i}{8M_0}\int\frac{dk}{\omega}\left|\int dx\, U_3\psi_a^2\psi_k\right|^2\left(-\frac{2T}{\omega^2}-\frac{4i}{\omega^3}\right).$$

Сумма членов, пропорциональных T, в /22/ равна нулю. Действительно, после несложных преобразований с применением тождеств

$$\int dx\, U_3\psi_a^2\psi_k=-\omega^2\int dx\,\psi_k\partial_a\psi_a, \qquad /23/$$

$$\int dx\, U_3\psi_a\psi_{k_1}^*\psi_{k_2}=[\omega^2(k_1)-\omega^2(k_2)]\int dx\,\psi_{k_1}^*\partial_a\psi_{k_2} \qquad /24/$$

и соотношений /8/, /9/ эта сумма приводится к виду

$$\frac{iT}{4}\left[\int dx\, G(0,x|0,x)U_4(x)\psi_a^2(x)\right. \qquad /25/$$

$$\left.+3\int dx\, G(0,x|0,x)U_3(x)\psi_a^2(x)\partial_a\psi_a(x)+\int dx\,\partial_a G(0,x|0,x)U_3(x)\psi_a(x)\right].$$

Дифференцируя тождество /18/ по a и учитывая соотношение

$$\partial_a U_n = U_{n+1}\,\psi_a ,$$

которое следует непосредственно из определений U_n и ψ_a, получаем тождество

$$\int dx\, G(0,x|0,x)\,U_4(x)\,\psi_a^2(x) + 3\int dx\, G(0,x|0,x)\,U_3(x)\,\partial_a\psi_a(x) \qquad /26/$$

$$+ \int dx\,\partial_a G(0,x|0,x)\,U_3(x)\,\psi_a(x) = 0.$$

Выражение /25/ пропорционально левой части /26/ и, следовательно, равно нулю.

Аннулирование коэффициента при старшей степени T в A_1 - не случайность и тесно связано с упомянутой выше независимостью членов петлевого разложения при $T=\infty$ от α , γ и δ.

Выражения для A_2 , C_1 , C_2 , D_2 и B_{110} можно получить аналогично. Сокращение коэффициентов при старших степенях T доказывается при помощи /26/ для C_1 и тождества

$$\int dx\, U_4\,\psi_a^4 + 3\int dx\, U_3\,\psi_a^2\partial_a\psi_a = \partial_a\int dx\, U_3\,\psi_a^3 = 0 \qquad /27/$$

для A_2 , C_2 , D_2 , B_{110}. Окончательно имеем

$$A_1 = b, \qquad /28/$$

$$C_1 = \frac{1}{4} bT^2 + cT + d, \qquad /29/$$

$$A_2 = p, \qquad /30/$$

$$C_2 = \frac{1}{16} pT^4 + \frac{1}{4} qT^3 + r, \qquad /31/$$

$$D_2 = pT^2 + 2qT, \qquad /32/$$

$$B_{110} = \frac{1}{2} pT^2 + qT, \qquad /33/$$

где

$$b = \frac{1}{4}\int\frac{dk}{\omega^3}\int dx_2 G(0,x_2|0,x_2)U_3(x_2)\,\psi_k(x_2)\int dx_1 U_3(x_1)\,\psi_a^2(x_1)\,\psi_k^*(x_1)$$

$$\Delta W_2(T) = o(T), \qquad T \to \infty. \qquad /34/$$

Считая α , γ и δ независимыми функциями T, получим следующие ограничения на их асимптотическое поведение, которые вытекают из условия /34/ и равенств /16/, /28/-/33/:

$$\alpha(T) = o(T^{1/2}), \quad \gamma(T) = o(T^{-3/2}), \quad \delta(T) = o(T^{-1/2}). \qquad /35/$$
$$T \to \infty.$$

Однако возможна частичная взаимная компенсация вкладов нулевых мод. Так, если α и γ связаны уравнением

$$\alpha(T) + \frac{T^2}{4}\gamma(T) = 0, \qquad /36/$$

ограничения на допустимую асимптотику будут более слабыми. Действительно, в этом случае

$$\Delta W_2 = \tilde{A}_1\alpha + \tilde{A}_2\alpha^2 + D_2\delta^2, \qquad /37/$$

где

$$\tilde{A}_1 = A_1 - \frac{4}{T^2}C_1, \qquad /38/$$

$$\tilde{A}_2 = A_2 - \frac{4}{T^2}B_{110} + \left(\frac{4}{T^2}\right)^2 C_2. \qquad /39/$$

Подставляя в /38/, /39/ выражения /28/-/33/, находим

$$\tilde{A}_1 = -\frac{4c}{T} - \frac{4d}{T^2}, \qquad /40/$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{16r}{T^4}. \qquad /41/$$

Ограничение на асимптотическое поведение $\alpha(T)$, которое следует из /34/, /37/, /40/ и /41/, имеет вид

$$\alpha(T) = o(T^2), \quad T \to \infty. \qquad /42/$$

В работе /1/ предложен метод вычисления солитонной массы по асимптотическому поведению функции распространения солитона. Квантовую поправку ΔM к массе солитона можно найти, пользуясь символической формулой /1/

$$-i\Delta M\sqrt{1-v^2} = \lim_{\substack{t'' \to \infty \\ t' \to -\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} W_n\left(\frac{1}{t''-t'}\right), \qquad /43/$$

При учете перенормировки [9] все основные результаты работы остаются справедливыми.

Авторы искренне благодарны Г.А.Чечелашвили за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Rep., 1978, 42C, p.1-87.
2. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Lett., 1975, 63B, p.435-438.
3. Jevicki A. Nucl.Phys., 1976, B117, p.365-376.
4. Abbott L.F. Nucl.Phys., 1978, B139, p.159-169.
5. Златев С.И., Матвеев В.А., Чечелашвили Г.А. ОИЯИ, Р2-80-505 Дубна, 1980.
6. De Vega H.J. Nucl.Phys., 1976, B115, p.411-428.
7. Matveev V.A. Nucl.Phys., 1977, B121, p.403-412.
8. Callan C.G., Gross D.J. Nucl.Phys., 1975, B93, p.29-55.
9. Корепин В.Е., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1975, 25, с.147-163.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 апреля 1982 года.