объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-222

Н.С.Шавохина

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ТЕЛ С ПОСТОЯННОЙ ПО ВЕЛИЧИНЕ СИЛОЙ ПРИТЯЖЕНИЯ

Направлено в журнал "ДАН СССР"

1982

Релятивистская задача двух тел, притягивающихся друг к другу с постоянной по модулю силой, может быть представлена как краевая задача для двумерной минимальной поверхности в псевдоевклидовом пространстве [1,2]. В случае одинаковых тел задача сильно упрощается и может быть сформулирована в следующем виде.

В пространственно-временном мире специальной теории относительности, т.е. в псевдоевклидовом пространстве $E^4_{(1,3)}$, рассматриваем поверхность

$$\vec{r} = \vec{\rho}(\eta, t) = \frac{c}{2}[\vec{B}(t - \frac{\eta}{c}) - \vec{B}(t + \frac{\eta}{c})], \qquad /1/$$

где c - скорость света, t - время, параметр η меняется в пределах

$$-\xi(t) \le \eta \le \xi(t), \qquad /2/$$

а функция $\vec{B}(t)$ удовлетворяет условию

$$|\dot{\vec{B}}(t)| = 1. \qquad /3/$$

Точкой обозначаем производную по аргументу функции. Предполагаем, что первая квадратичная форма поверхности /1/ регулярна. Она равна

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{\rho}^{\,2} = \cos^2\Delta(\eta, t)[c^2 dt^2 - d\eta^2], \qquad /4/$$

где

$$\cos 2\Delta(\eta, t) = \dot{\vec{B}}(t - \frac{\eta}{c})\,\dot{\vec{B}}(t + \frac{\eta}{c}).$$

Условие регулярности означает, что всюду на поверхности /1/ $-\frac{\pi}{2} < \Delta < \frac{\pi}{2}$. При условии /3/ поверхность переноса /1/ становится минимальной. При этом условии сеть переноса $u = t + \frac{\eta}{c}$, $v = t - \frac{\eta}{c}$ является изотропной сетью.

Граничные линии $\eta = -\xi(t)$ и $\eta = \xi(t)$ поверхности /1/ рассматриваем как мировые траектории первого и второго тел, массы покоя которых одинаковы, постоянны и равны $m > 0$. Пусть

$$\vec{\rho}(t) = \vec{\rho}(\xi(t), t) = \frac{c}{2}[\vec{B}(v(t)) - \vec{B}(u(t))], \qquad /5/$$

где

$$u(t) = t + \frac{\xi(t)}{c}, \qquad v(t) = t - \frac{\xi(t)}{c}. \qquad /6/$$

Тогда импульс второго тела, вычисляемый по формулам релятивистской механики материальной точки, равен

$$\vec{p}(t) = p^\circ(t)\,\dot{\vec{\rho}}(t), \qquad /7/$$

где

$$p^\circ(t) = m[1 - \frac{\dot{\vec{\rho}}^{\,2}}{c^2}]^{-1/2}, \qquad /8/$$

а импульс первого тела равен $-\vec{p}(t)$.

Ввиду нечетности функции $\vec{\rho}(\eta, t)$ относительно первого аргумента ставим одно краевое условие, а именно:

$$\vec{p}(t) = \frac{G}{2}[\vec{B}(v(t)) + \vec{B}(u(t))], \qquad /9/$$

где $G > 0$ - постоянная взаимодействия тел.

Если удастся найти функции $\xi(t)$ и $\vec{B}(t)$, то станет известным движение рассматриваемых тел. Достаточно, однако, найти $\xi(t)$ и $\vec{B}(t)$. Действительно, тогда мы будем знать функцию /7/ и функцию

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\rho}(\eta, t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}[\vec{B}(t - \frac{\eta}{c}) + \vec{B}(t + \frac{\eta}{c})], \qquad /10/$$

а, следовательно, и

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{p}(t)}{G} + \int_0^{\xi(t)} \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\rho}(\eta, t)\,d\eta. \qquad /11/$$

Последняя формула следует из /10/ и /9/.

Закон сохранения энергии. Согласно /7/ и /8/

$$c^2 \frac{d}{dt}p^\circ = \dot{\vec{\rho}}(t)\,\dot{\vec{p}}(t). \qquad /12/$$

Дифференцируя по t /5/ и /9/, находим

$$\dot{\vec{\rho}}(t) = \frac{c}{2}[\dot{\vec{B}}(v(t))\,\dot{v}(t) - \dot{\vec{B}}(u(t))\,\dot{u}(t)],$$
$$\dot{\vec{p}}(t) = \frac{G}{2}[\dot{\vec{B}}(v(t))\,\dot{v}(t) + \dot{\vec{B}}(u(t))\,\dot{u}(t)]. \qquad /13/$$

Подставляя эти производные в /12/, в силу условия /3/ получаем

$$\frac{d}{dt}p^\circ(t) = -\frac{G}{c^2}\dot{\xi}(t). \qquad /14/$$

Следовательно, сохраняется энергия, равная

$$\mathcal{E} = p^\circ(t) + \frac{G}{c^2}\xi(t) . \qquad /15/$$

Полная энергия системы равна $2\mathcal{E}$.

Закон сохранения момента. Из формул

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec\rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\vec\rho}{\partial\eta^2} = 0 ,$$

$$\dot{\vec p}(t) = -G[\frac{\dot\xi(t)}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\eta}]\vec\rho(\eta,t)\,|_{\eta=\xi(t)}$$

следует, что производная от момента

$$\vec M = [\vec\rho(t), \vec p(t)] + \frac{G}{c^2}\int_0^{\xi(t)}[\vec\rho(\eta,t), \frac{\partial}{\partial t}\vec\rho(\eta,t)]\,d\eta \qquad /16/$$

равна нулю. Следовательно, момент $\vec M$ сохраняется. Интегрированием по частям момент /16/ можно представить в виде

$$\vec M = \frac{G}{4}\int_0^{\xi(t)}[\vec B(t-\frac{\eta}{c}) + \vec B(t+\frac{\eta}{c}), \dot{\vec B}(t-\frac{\eta}{c}) + \dot{\vec B}(t+\frac{\eta}{c})]\,d\eta . \qquad /17/$$

Полный момент системы равен $2\vec M$.

Мировые траектории рассматриваемых тел являются линиями постоянной кривизны, так как квадрат модуля 4-силы равен

$$(\frac{p^\circ}{m})^2[(\frac{d\vec p}{dt})^2 - c^2(\frac{dp^\circ}{dt})^2] = G^2 . \qquad /18/$$

В силу тождества

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{(p^\circ)^2[(\frac{d\vec p}{dt})^2 - c^2(\frac{dp^\circ}{dt})^2]\} = (p^\circ)^3\frac{d^2\vec\rho}{dt^2}\frac{d^2\vec p}{dt^2} \qquad /19/$$

из /18/ следует, что

$$\ddot{\vec\rho}(t)\,\ddot{\vec p}(t) = 0. \qquad /20/$$

Мировые траектории рассматриваемых тел являются асимптотическими линиями на поверхности /1/, что видно из равенства

$$p^\circ(t)\,\ddot{\vec\rho}(t) = \frac{G}{2}[\dot{\vec B}(u(t)) + \dot{\vec B}(v(t))]\,\dot u(t)\,\dot v(t) . \qquad /21/$$

Чтобы получить это равенство, нужно продифференцировать /7/ и в результат подставить /13/, /14/ и /6/.

С другой стороны, дифференцируя /13/, находим

$$\ddot{\vec\rho}(t) = \frac{c}{2}[\ddot{\vec B}(v)\,\dot v^2 - \ddot{\vec B}(u)\,\dot u^2 + \dot{\vec B}(v)\,\ddot v - \dot{\vec B}(u)\,\ddot u] ,$$

$$\ddot{\vec p}(t) = \frac{G}{2}[\ddot{\vec B}(v)\,\dot v^2 + \ddot{\vec B}(u)\,\dot u^2 + \dot{\vec B}(v)\,\ddot v + \dot{\vec B}(u)\,\ddot u] . \qquad /22/$$

Из /20/, /21/ и /22/ получаются два следствия:

$$\dot{\vec B}(u)\,\ddot{\vec B}(v)\,\dot v^2 + \dot{\vec B}(v)\,\ddot{\vec B}(u)\,\dot u^2 = 0 ,$$
$$|\ddot{\vec B}(u)|\,\dot u^2 = |\ddot{\vec B}(v)|\,\dot v^2 . \qquad /23/$$

Имеются два сложных функционала от $\xi(t)$ и $\vec B(t)$, равных массе движения $p^\circ(t)$. Первый из них получается на основании определения /8/ и формулы /9/, согласно которой

$$\sqrt{1-\frac{\dot{\vec\rho}^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{\dot\xi^2}{c^2}}\cos\Delta(t) , \qquad /24/$$

где $\Delta(t) = \Delta(\xi(t), t)$. Таким образом,

$$p^\circ(t) = \frac{m}{\sqrt{\dot u(t)\,\dot v(t)}\,\cos\Delta(t)} . \qquad /25/$$

Второй получается подстановкой выражения /9/ в формулу

$$p^\circ(t) = \sqrt{m^2 + \frac{\vec p^2(t)}{c}} , \qquad /26/$$

которая сама по себе непосредственно следует из /7/ и /8/.

Заметим, что согласно /24/

$$\dot\xi^2(t) \le \dot{\vec\rho}^2(t) . \qquad /27/$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\vec K(t) = p^\circ(t)\,\vec\rho(t) + \frac{G}{c^2}\int_0^{\xi(t)}\vec\rho(\eta,t)\,d\eta . \qquad /29/$$

Дифференцируя ее по t, на основании /7/, /14/ и /11/ заключаем, что

$$\dot{\vec K}(t) = G\vec B(t) . \qquad /30/$$

Поэтому для функции $\vec\rho(\eta,t)$ можно написать следующее выражение:

$$\frac{G}{c^2}\vec\rho(\eta,t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}[\vec K(t-\frac{\eta}{c}) + \vec K(t+\frac{\eta}{c})] . \qquad /31/$$

Подставляя это выражение в /29/, находим

$$p^\circ(t)\,\vec\rho(t) = \frac{1}{2}[\vec K(u(t)) + \vec K(v(t))] . \qquad /32/$$

Система уравнений для искомых функций. Сравнивая /32/ с /5/, получаем дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, а именно:

$$\frac{cp^{\circ}(t)}{2}[\vec{K}(u(t)) - \vec{K}(v(t))] = -\frac{G}{2}[\vec{K}(u(t)) + \vec{K}(v(t))]. \qquad /33/$$

Это уравнение нужно рассматривать вместе с условием

$$|\ddot{\vec{K}}(t)| = G, \qquad /34/$$

которое следует из /3/ и /30/,и тремя выражениями /15/, /25/ и /26/ для функции $p^{\circ}(t)$.В результате получается система уравнений с отклоняющимся аргументом для искомой функции $\vec{K}(t)$, где отклонение $\xi(t)$ также является искомой функцией.

Нерелятивистский предел. При $c\to\infty$ поверхность /1/ задается уравнением

$$\vec{r} = -\eta\dot{\vec{B}}(t), \qquad /35/$$

а краевое условие /9/ принимает вид

$$\vec{p}(t) = G\vec{B}(t), \qquad /36/$$

причем $p^{\circ}(t)=m$. Условие минимальности /3/ сохраняется, а так как

$$\vec{\rho}(t) = -\xi(t)\dot{\vec{B}}(t), \qquad /37/$$

то

$$\xi(t) = |\vec{\rho}(t)|. \qquad /38/$$

Функция $\vec{K}(t)$ становится равной $m\vec{\rho}(t)$ и в соответствии с /33/ удовлетворяет уравнению Ньютона

$$\ddot{\vec{K}}(t) = -G\frac{\vec{K}(t)}{|\vec{K}(t)|}. \qquad /39/$$

Поверхность /35/ является минимальной поверхностью в пространственно-временном мире классической механики. В этом мире элемент площади поверхности вида $\vec{r} = \vec{f}(\eta, t)$ равен

$$d\sigma = \left|\frac{\partial\vec{f}}{\partial\eta}\right| d\eta\, dt. \qquad /40/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. Теоретическая и математическая физика, 1980, т. 42, №1, с. 59-70.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. Теоретическая и математическая физика, 1980, т. 43, №3, с. 356-366.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 марта 1982 года.

Шавохина Н.С. Релятивистская задача двух одинаковых тел с постоянной по величине силой притяжения — P2-82-222

Задача о движении двух релятивистских частиц с равными массами и постоянной по величине силой взаимного притяжения представлена как краевая задача для минимальной поверхности в мире Минковского. Получены сохраняющиеся величины и выведены уравнения с отклоняющимся аргументом для функций, описывающих движение рассматриваемой системы масс. Само отклонение аргумента также является искомой величиной. В нерелятивистском пределе полученные уравнения переходят в уравнения Ньютона с потенциалом взаимодействия, пропорциональным расстоянию между частицами.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Shavokhina N.S. Relativistic Problem of Two Identical Bodies with the Attraction Force Modulo Constant — P2-82-222

The problem of motion of two relativistic particles with equal masses and the atteraction force modulo constant is represented as a boundary-value problem for a minimal surface in the Minkovski world. Conserved quantities were found and equations with deviating arguments for functions of the motion of the system considered were derived. The argument deviation itself is a quantity to be looked for. In the nonrelativistic limit the equations obtained become the Newton equations with an interaction potential proportional to the distance between particles.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982