сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-82-186

В.Ш.Гогохия

РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ МЕТОДОМ ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Сведение интегральных уравнений квантовой теории поля, в частности, квазипотенциальных [1], к дифференциальным краевым задачам является эффективным методом рассмотрения задач о связанных состояниях, так как позволяет привлечь для их исследования мощные аналитические, асимптотические и численные методы, разработанные в теории дифференциальных уравнений. В работах [2,3] квазипотенциальные уравнения для парциальных амплитуд рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы, взаимодействующих через кулоноподобный квазипотенциал $V(r) = -gr^{-1}$, были сведены к задачам Штурма-Лиувилля в импульсном пространстве. Там же был сформулирован метод эталонного уравнения, позволяющий находить решения в виде асимптотических рядов по обратным степеням, предположительно, большого параметра g.

Данная работа является продолжением и одновременно обобщением работ [2,3] и посвящена исследованию высших парциальных волн, которые требуют отдельного рассмотрения.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы сводится к задачам Штурма-Лиувилля в импульсном пространстве. В разделе 3 сформулирован в общем виде метод эталонного уравнения, который далее в разделах 4,5,6 применяется к задачам Штурма-Лиувилля, сформулированным выше. Заключительный раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы m имеет вид [2,3]

$$f_\ell(p,p') = V_\ell(p,p') + \int_0^\infty \frac{dq\,(k^2+m^2)^{\frac{\nu-1}{2}}}{(q^2+m^2)^{\nu/2}} \, \frac{V_\ell(p,q)\, f_\ell(q,p')}{k^2-q^2}, \qquad /2.1/$$

$$V_\ell(p,p') = \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr\, V(r)\, J_{\ell+1/2}(pr)\, J_{\ell+1/2}(p'r). \qquad /2.2/$$

Здесь p, p' - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс, энергетическая поверхность определяется условием $p^2 = p'^2 = k^2$, а энергия в системе центра масс равна $W = 2\sqrt{k^2 + m^2}$. Значение $\nu = 1$ соответствует квазипотенциальному уравнению в форме уравнения Логунова-Тавхелидзе [1,2]. Значение $\nu = 2$ соответствует модифицированному квазипотенциальному уравнению [3,4].

Легко показать, что уравнение /2.1/ в случае, когда квазипотенциал в координатном пространстве равен $V(r) = -gr^{-1}$, эквивалентно следующей краевой задаче Штурма-Лиувилля [2,3]:

$$\frac{d^2 f_\ell(p,p')}{dp^2} - \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{p^2} + \frac{g\,(k^2+m^2)^{\frac{\nu-1}{2}}}{(p^2+m^2)^{\nu/2}(k^2-p^2)} \right\} f_\ell(p,p') = \delta(p,p')g, \qquad /2.3/$$

$$f_\ell(p,p') \underset{p\to 0}{\sim} p^{\ell+1}, \qquad f_\ell(p,p') \underset{p\to\infty}{\sim} p^{-\ell}. \qquad /2.4/$$

Задача о связанных состояниях ($k^2 = -\kappa^2 < 0$), как известно, сводится к решению однородного интегрального уравнения /2.1/ в результате отбрасывания члена $V_\ell(p,p')$ и замены $f_\ell(p,p')$ на $f_\ell(p)$. Так как граничные условия /2.4/ при этом не изменяются, то для нахождения связанных состояний достаточно решить дифференциальное уравнение /2.3/, опуская неоднородный член $g\delta(p-p')$. Перепишем уравнение /2.3/ и граничные условия /2.4/ в безразмерных переменных $x = pm^{-1}$, $f_\ell(p) = f_\ell(x)$ и с безразмерными параметрами $E = \kappa m^{-1}$, $\lambda_\nu^2 = gm^{-1}(1-E^2)^{\frac{\nu-1}{2}} = \lambda^2(1-E^2)^{\frac{\nu-1}{2}}$ ($\lambda_1^2 = \lambda^2$, $\lambda_2^2 = \lambda_E^2$):

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} - \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - \frac{\lambda_\nu^2}{(1+x^2)^{\nu/2}(x^2+E^2)} \right\} f_\ell(x) = 0, \qquad /2.5/$$

$$f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}, \qquad f_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}, \qquad /2.6/$$

где $x \in [0,\infty)$, а $E^2 \in [0,1]$, так как энергия связи в системе центра масс равна $W = 2m\{\sqrt{1-E^2} - 1\}$.

Для решения полученных задач Штурма-Лиувилля /2.5/-/2.6/ в следующем разделе сформулируем метод эталонного уравнения.

3. МЕТОД ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ

Основная идея метода эталонного уравнения /МЭУ/ весьма проста: приблизительно одинаковые дифференциальные уравнения имеют приблизительно одинаковые решения. Пусть нам необходимо решить уравнение вида

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \{ q(x) + \lambda^2 \gamma(x) \} f(x) = 0. \qquad /3.1/$$

Уравнение

$$\frac{d^2 \mho(\sigma)}{d\sigma^2} + \{ Q(\sigma) + \lambda^2 \Gamma(\sigma) \} \mho(\sigma) = 0 \qquad /3.2/$$

называется эталонным по отношению к уравнению /3.1/, если: 1/ решения $\mho(\sigma)$ известны аналитически, то есть выражаются через специальные функции или численно, 2/ эталонные функции $Q(\sigma)$ и $\Gamma(\sigma)$ зависят от σ приблизительно так же, как $q(x)$ и $\gamma(x)$ зависят от x, 3/ эталонная функция $\Gamma(\sigma)$ правильно воспроизводит положение точек поворота исходного уравнения.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы выразить решение уравнения /3.1/ через известные решения $\mho(\sigma)$ уравнения /3.2/. Будем искать решение /3.1/ в виде

$$f(x) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2} \mho(\sigma). \qquad /3.3/$$

Подставляя /3.3/ в /3.1/ и используя /3.2/, получаем следующее уравнение для $\sigma(x)$:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 \Gamma(\sigma) = \gamma(x) + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \Pi(\sigma, x) + q(x) - \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 Q(\sigma) \right\}, \qquad /3.4/$$

где "поправочный член" $\Pi(\sigma,x)$ можно выразить через так называемую производную Шварца [5]:

$$\Pi(\sigma,x) = -\frac{1}{2}\langle\sigma;x\rangle = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left\{ \frac{\sigma'''}{\sigma'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)^2 \right\}, \qquad /3.5/$$

здесь и в дальнейших формулах штрих обозначает дифференцирование по x.

Уравнение /3.4/ и определение $\Pi(\sigma, x)$ через производную Шварца являются основой метода эталонного уравнения, позволяющего находить решения исходного уравнения /3.1/ по известным решениям эталонного уравнения /3.2/ в виде асимптотических рядов по параметру λ^{-2}.

Этой цели можно достигнуть двумя различными способами. В методе Лангера и Олвера [6] само решение эталонного уравнения /3.2/ умножается на асимптотический ряд по параметру λ^{-2}, в то время как в методе Черри [7] в виде асимптотического ряда ищется аргумент $\sigma(x)$ эталонного уравнения. Для построения итерационной схемы метода эталонного уравнения, которая предлагается ниже, второй способ предпочтительнее. В соответствии с этим будем искать решение $\sigma(x)$ уравнения /3.4/ в виде ряда

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} \sigma_{2n}(x) = \sigma_0(x) + \frac{1}{\lambda^2}\sigma_2(x) + \ldots \qquad /3.6/$$

Подставляя далее это разложение в $\Gamma(\sigma)$ и $Q(\sigma)$ и производя переразложение в ряд по степеням λ^{-2}, получим

$$\Gamma(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2n}}\Gamma_{2n}(\sigma)=\Gamma_0(\sigma_n)+\frac{1}{\lambda^2}\Gamma_2(\sigma_0,\sigma_2)+\ldots \qquad /3.7/$$

и аналогичный ряд для $Q(\sigma)$. Конкретная зависимость $\Gamma_{2n}(\sigma)=\Gamma_{2n}(\sigma_0,\sigma_2,\ldots,\sigma_{2n})$ и $Q_{2n}(\sigma)=Q_{2n}(\sigma_0,\sigma_2,\ldots,\sigma_{2n})$ определяется выбором функции $\Gamma(\sigma)$ и $Q(\sigma)$ и, очевидно, не может быть найдена в общем случае. Подставляя далее разложение /3.6/ в выражение для поправочного члена /3.5/, получим

$$\Pi(\sigma,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2n}}\Pi_{2n}(\sigma,x)=\Pi_0(\sigma_0 x)+\frac{1}{\lambda^2}\Pi_2(\sigma_0,\sigma_2,x)+\ldots, \qquad /3.8/$$

где коэффициенты разложения $\Pi_{2n}(\sigma_0,\sigma_2,\ldots,\sigma_{2n},x)$ определяются из следующей системы рекуррентных соотношений:

$$\Pi_0(\sigma_0)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma_0'''}{\sigma_0'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\sigma_0''}{\sigma_0'}\right)^2\right\}, \qquad /3.9/$$

$$\sum_{j=0}^{n}\left\{3\sigma_{2\ell}''\sigma_{2(n-j)}''-2\sigma_{2j}'''\sigma_{2(n-j)}'-4\Pi_{2(n-j)}a_{2j}\right\}=0, \qquad /3.10/$$

где

$$a_{2j}=\sum_{i=0}^{j}\sigma_{2i}'\sigma_{2(j-i)}', \quad n=1,2,3\ldots \qquad /3.11/$$

Подставляя далее разложения /3.6/-/3.8/ в основное уравнение МЭУ /3.4/ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ^{-2}, получим бесконечную систему нелинейных, неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка для функций $\sigma_{2n}(x)$, которую можно решать последовательно, то есть находя из первого уравнения $\sigma_0(x)$, подставляя далее найденное решение во второе уравнение для $\sigma_2(x)$ и т.д.:

$$(\sigma_0')^2\Gamma_0(\sigma_0)=\gamma(x), \qquad /3.12/$$

$$(\sigma_0')^2Q_0(\sigma_0)+a_0\Gamma_2(\sigma_0,\sigma_2)+a_2\Gamma_0(\sigma_0)=q(x)+\Pi_0(\sigma_0,x), \qquad /3.13/$$

$$\sum_{i=0}^{n}a_{2i}\Gamma_{2(n-i)}(\sigma)+\sum_{i=0}^{n-1}a_{2i}Q_{2(n-1-i)}(\sigma)=\Pi_{2(n-1)}(\sigma,x),$$

где $n=2,3,4\ldots$ а a_{2i} определяется формулой /3.11/. Система/3.12/-/3.13/ должна быть дополнена условием совпадения точек поворота - "эквивалентных точек" уравнений /3.1/ и /3.2/, которое играет роль граничного условия.

В заключение данного раздела необходимо отметить, что при удачном выборе эталонных функций $Q(\sigma)$, и в особенности $\Gamma(\sigma)$,

поправочным членом $\Pi(\sigma,x)$ можно будет пренебречь в первом приближении в силу медленности изменения $d\sigma/dx$. Поэтому следует ожидать, что при этих условиях уже решение уравнения /3.12/ для $\sigma_0(x)$ должно быть довольно хорошим приближением для аргумента эталонного уравнения $\sigma(x)$. Из уравнения /3.12/ следует ($\sigma(x)=\sigma_0(x)$, $\Gamma(\sigma)=\Gamma_0(\sigma)$)

$$\int_{\sigma}^{\sigma_э}\Gamma^{1/2}(\tau)\,d\tau=\int_{x}^{x_э}\gamma^{1/2}(t)\,dt, \qquad /3.14/$$

где $\sigma_э=\sigma_0(x_э)=\sigma(x_э)$, $x_э$ - "эквивалентные точки" функций $\Gamma(\sigma)$ и $\gamma(x)$, например, точки, где обе эти функции имеют сингулярность, равны постоянным или нулю. В этом приближении решение /3.3/ имеет вид

$$f(x)=\left\{\frac{\Gamma(\sigma(x))}{\gamma(x)}\right\}^{1/4}\mho(\sigma(x)). \qquad /3.15/$$

Здесь же следует отметить, что если $\Gamma(\sigma)$ хорошо воспроизводит аналитические и асимптотические свойства $\gamma(x)$, то уже в первом нетривиальном приближении $\sigma(x)=\sigma_0(x)+\ldots$ можно добиться того, чтобы $d\sigma/dx$ была везде конечной ($\sigma'(x)\neq 0,\infty$). Поэтому явление Стокса не возникает, и нет никакой проблемы с формулами связи, возникающей в обычной JWKB-теории [8]. Стандартный JWKB-метод является частным случаем МЭУ и отражает лишь знаковое поведение $\gamma(x)$, так как он соответствует выбору $\Gamma(\sigma)=\pm 1$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МЭУ К КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ($\nu=1,2$). СШИВАНИЕ МЭУ-РЕШЕНИЙ

Метод эталонного уравнения МЭУ, сформулированный в предыдущем разделе, применим теперь к квазипотенциальной краевой задаче Штурма-Лиувилля ($\nu=1,2$) /2.5/-/2.6/. Выпишем уравнение /2.5/ в виде

$$\frac{d^2f_\ell(x)}{dx^2}+\left\{-\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+\lambda_\nu^2\gamma_\nu(x)\right\}f_\ell(x)=0, \qquad /4.1/$$

где введено следующее обозначение:

$$\gamma_\nu(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\nu/2}(x^2+E^2)}. \qquad /4.2/$$

Для нахождения собственных значений задачи /2.5/-/2.6/ применим метод эталонного уравнения МЭУ в отдельности для малых и больших значений x, а затем сошьем полученные таким способом приближения в области перекрывания.

При малых x $(x\to 0)$ в качестве эталонного уравнения /ЭУ/ для уравнения /4.1/ выберем уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2\mathcal{U}(\sigma)}{d\sigma^2}+\{-\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2}+\lambda_\nu^2\Gamma(\sigma)\}\mathcal{U}(\sigma)=0, \qquad /4.3/$$

где

$$\Gamma(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2+E^2}. \qquad /4.4/$$

Это уравнение, как легко заметить, применимо одновременно для обоих значений $\nu=1,2$, так как в пределе $x\to 0$ $\gamma_\nu(x)=(x^2+E^2)^{-1}$. Таким образом, этот выбор эталонных функций $Q(\sigma)=\ell(\ell+1)\sigma^{-2}$ и $\Gamma(\sigma)=(\sigma^2+E^2)^{-1}$ должен правильно воспроизвести поведение исходных функций $q(x)=\ell(\ell+1)x^{-2}$ и $\gamma_\nu(x)$ при малых x.

Найдем теперь явный вид $\sigma(x)$. Используя явные выражения для $\gamma_\nu(x)$ /4.2/ и $\Gamma(\sigma)$ /4.4/, выбирая далее в формуле /3.14/ в качестве "эквивалентных точек" точки в нуле, а именно $\sigma_э=\sigma(x_э)=x_э=0$, получим

$$\sigma(x,E)=E\,\mathrm{sh}\,\{\Phi_\nu(x,E)\}, \qquad /4.5/$$

где

$$\Phi_\nu(x,E)=\int_0^x\frac{dt}{(1+t^2)^{\nu/4}(t^2+E^2)^{1/2}}, \qquad /4.6/$$

откуда следует, что $\sigma(\infty,E)=\mathrm{const}$, $\sigma(x)\underset{x\to 0}{\sim}x+O(x)$, что в действительности соответствует выбору эталонных функций $Q(\sigma)$ и $\Gamma(\sigma)$, моделирующих поведение $q(x)$ и $\gamma_\nu(x)$ при малых значениях x. Таким образом, выбор эталонного уравнения с эталонными функциями, воспроизводящими поведение независимой переменной в тех или иных областях, можно назвать "эталонированием" по переменной.

Решения эталонного уравнения /4.3/ можно выразить через гипергеометрические функции [5], а именно:

$$\mathcal{U}_1(\sigma)=(-\frac{\sigma^2}{E^2})^{-\frac{\ell}{2}}F(a,a^*;-\ell+\frac{1}{2};-\frac{\sigma^2}{E^2}),$$
$$\mathcal{U}_2(\sigma)=(-\frac{\sigma^2}{E^2})^{\frac{\ell+1}{2}}F(-a^*,-a;\ell+\frac{3}{2};-\frac{\sigma^2}{E^2}), \qquad /4.7/$$

где $\sigma\equiv\sigma(x,E)$,

$$a=-\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_\nu^2-(\ell+1/2)^2}. \qquad /4.8/$$

Используя далее /3.15/, найдем окончательно решение исходного уравнения /4.1/, удовлетворяющее граничному условию в нуле:

$$f^{(\nu)}(x)=\{\frac{(1+x^2)^{\nu/2}(x^2+E^2)}{(\sigma^2+E^2)}\}^{1/4}(-\frac{\sigma^2}{E^2})^{\frac{\ell+1}{2}}F(a,a^*;\ell+\frac{3}{2};-\frac{\sigma^2}{E^2}); \qquad /4.9/$$

где $\sigma\equiv\sigma(x,E)$ и определяется формулами /4.5/-/4.6/,

$$a=-a^*=\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_\nu^2-(\ell+1/2)^2}. \qquad /4.10/$$

Логарифмическая производная регулярного в нуле решения /4.9/ имеет вид

$$\frac{d\ln f^{(\nu)}(x)}{dx}=-\frac{1}{4}\frac{\gamma_\nu'}{\gamma_\nu}-\frac{1}{2}\mathrm{th}[\Phi_\nu(x,E)]\gamma_\nu^{1/2}+$$
$$+(\ell+1)\,\mathrm{cth}[\Phi_\nu(x,E)]\gamma_\nu^{1/2}- \qquad /4.11/$$
$$-\frac{a\cdot a^*}{(\ell+3/2)}\mathrm{sh}[2\Phi_\nu(x,E)]\gamma_\nu^{1/2}\frac{F(1+a,1+a^*;\ell+5/2;-\mathrm{sh}^2[\Phi_\nu(x,E)])}{F(a,a^*;\ell+3/2;-\mathrm{sh}^2[\Phi_\nu(x,E)])},$$

где $\gamma_\nu\equiv\gamma_\nu(x)$ определяется формулой /4.2/; $\Phi_\nu(x,E)$, a - /4.6/ и /4.10/ соответственно.

При больших значениях x $(x\to\infty)$ в качестве эталонного уравнения по отношению к уравнению /4.1/ можно выбрать уравнение вида

$$\frac{d^2\mathcal{U}(z)}{dz^2}+\{-\frac{\ell(\ell+1)}{z^2}+\frac{\lambda_\nu^2}{z^{\nu+2}}\}\mathcal{U}(z)=0, \qquad /4.12/$$

откуда следует, что эталонная функция $\Gamma(z)$ в данном случае равна $\Gamma_\nu(z)=z^{-2-\alpha}$. Поэтому выбирая в качестве "эквивалентных точек" точки на бесконечности $x_э=\sigma_э=\infty$ и используя далее явные выражения для $\Gamma_\nu(z)=z^{-2-\nu}$ и $\gamma_\nu(z)$ /4.2/, с учетом формулы /3.14/ получим

$$z(x,E)=\{-\frac{\nu}{2}F_\nu(x,E)\}^{-\frac{2}{\nu}}, \qquad /4.13/$$

где

$$F_\nu(x,E)=\int_\infty^x\frac{dt}{(1+t^2)^{\nu/4}(t^2+E^2)^{1/2}}. \qquad /4.14/$$

Из /4.13/-/4.14/ получим, что $z(x,E)\underset{x\to\infty}{\sim}x$ + к.ч., то есть z, на бесконечности аналогична переменной x, и тем самым асимптотические свойства $F_\nu(z(x))$ и $\gamma_\nu(x)$ совпадают.

Решения уравнения /4.12/ можно выразить через цилиндрические функции. Учитывая соотношение /3.15/, регулярное на бесконечности, решение имеет вид

При малых x ($x\to 0$) в качестве эталонного уравнения /ЭУ/ для уравнения /4.1/ выберем уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2\mho(\sigma)}{d\sigma^2}+\{-\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2}+\lambda_\nu^2\Gamma(\sigma)\}\mho(\sigma)=0, \qquad /4.3/$$

где

$$\Gamma(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2+E^2}. \qquad /4.4/$$

Это уравнение, как легко заметить, применимо одновременно для обоих значений $\nu=1,2$, так как в пределе $x\to 0$ $\gamma_\nu(x)=(x^2+E^2)^{-1}$. Таким образом, этот выбор эталонных функций $Q(\sigma)=\ell(\ell+1)\sigma^{-2}$ и $\Gamma(\sigma)=(\sigma^2+E^2)^{-1}$ должен правильно воспроизвести поведение исходных функций $q(x)=\ell(\ell+1)x^{-2}$ и $\gamma_\nu(x)$ при малых x.

Найдем теперь явный вид $\sigma(x)$. Используя явные выражения для $\gamma_\nu(x)$ /4.2/ и $\Gamma(\sigma)$ /4.4/, выбирая далее в формуле /3.14/ в качестве "эквивалентных точек" точки в нуле, а именно $\sigma_э=\sigma(x_э)=x_э=0$, получим

$$\sigma(x,E)=E\,\mathrm{sh}\,\{\Phi_\nu(x,E)\}, \qquad /4.5/$$

где

$$\Phi_\nu(x,E)=\int_0^x\frac{dt}{(1+t^2)^{\nu/4}(t^2+E^2)^{1/2}}, \qquad /4.6/$$

откуда следует, что $\sigma(\infty,E)=\mathrm{const}$, $\sigma(x)\underset{x\to 0}{\sim}x+O(x\ )$, что в действительности соответствует выбору эталонных функций $Q(\sigma)$ и $\Gamma(\sigma)$, моделирующих поведение $q(x)$ и $\gamma_\nu(x)$ при малых значениях x. Таким образом, выбор эталонного уравнения с эталонными функциями, воспроизводящими поведение независимой переменной в тех или иных областях, можно назвать "эталонированием" по переменной.

Решения эталонного уравнения /4.3/ можно выразить через гипергеометрические функции[5], а именно:

$$\mho_1(\sigma)=(-\frac{\sigma^2}{E^2})^{-\frac{\ell}{2}}F(\alpha,\alpha^*;-\ell+\frac{1}{2};-\frac{\sigma^2}{E^2}),$$
$$\mho_2(\sigma)=(-\frac{\sigma^2}{E^2})^{\frac{\ell+1}{2}}F(-\alpha^*,-\alpha;\ \ell+\frac{3}{2};-\frac{\sigma^2}{E^2}), \qquad /4.7/$$

где $\sigma\equiv\sigma(x,E)$,

$$\alpha=-\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_\nu^2-(\ell+1/2)^2}. \qquad /4.8/$$

Используя далее /3.15/, найдем окончательно решение исходного уравнения /4.1/, удовлетворяющее граничному условию в нуле:

$$f^{(\nu)}(x)=\{\frac{(1+x^2)^{\nu/2}(x^2+E^2)}{(\sigma^2+E^2)}\}^{1/4}(-\frac{\sigma^2}{E^2})^{\frac{\ell+1}{2}}F(a,a^*;\ \ell+\frac{3}{2};-\frac{\sigma^2}{E^2}); \qquad /4.9/$$

где $\sigma\equiv\sigma(x,E)$ и определяется формулами /4.5/-/4.6/,

$$a=-a^*=\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_\nu^2-(\ell+1/2)^2}. \qquad /4.10/$$

Логарифмическая производная регулярного в нуле решения /4.9/ имеет вид

$$\frac{d\ln f^{(\nu)}(x)}{dx}=-\frac{1}{4}\frac{\gamma_\nu'}{\gamma_\nu}-\frac{1}{2}\mathrm{th}[\Phi_\nu(x,E)]\gamma_\nu^{1/2}+$$
$$+(\ell+1)\mathrm{cth}[\Phi_\nu(x,E)]\gamma_\nu^{1/2}- \qquad /4.11/$$
$$-\frac{a\cdot a^*}{(\ell+3/2)}\mathrm{sh}[2\Phi_\nu(x,E)]\gamma_\nu^{1/2}\frac{F(1+a,1+a^*;\ \ell+5/2;\ -\mathrm{sh}^2[\Phi_\nu(x,E)])}{F(a,a^*;\ \ell+3/2;\ -\mathrm{sh}^2[\Phi_\nu(x,E)])},$$

где $\gamma_\nu\equiv\gamma_\nu(x)$ определяется формулой /4.2/; $\Phi_\nu(x,E)$, a - /4.6/ и /4.10/ соответственно.

При больших значениях x ($x\to\infty$) в качестве эталонного уравнения по отношению к уравнению /4.1/ можно выбрать уравнение вида

$$\frac{d^2\mho(z)}{dz^2}+\{-\frac{\ell(\ell+1)}{z^2}+\frac{\lambda_\nu^2}{z^{\nu+2}}\}\mho(z)=0, \qquad /4.12/$$

откуда следует, что эталонная функция $\Gamma(z)$ в данном случае равна $\Gamma_\nu(z)=z^{-2-\nu}$. Поэтому выбирая в качестве "эквивалентных точек" точки на бесконечности $x_э=\sigma_э=\infty$ и используя далее явные выражения для $\Gamma_\nu(z)=z^{-2-\nu}$ и $\gamma_\nu(z)$ /4.2/, с учетом формулы /3.14/ получим

$$z(x,E)=\{-\frac{\nu}{2}F_\nu(x,E)\}^{-\frac{2}{\nu}}, \qquad /4.13/$$

где

$$F_\nu(x,E)=\int_\infty^x\frac{dt}{(1+t^2)^{\nu/4}(t^2+E^2)^{1/2}}. \qquad /4.14/$$

Из /4.13/-/4.14/ получим, что $z(x,E)\underset{x\to\infty}{\sim}x$ + к.ч., то есть z, на бесконечности аналогична переменной x, и тем самым асимптотические свойства $F_\nu(z(x))$ и $\gamma_\nu(x)$ совпадают.

Решения уравнения /4.12/ можно выразить через цилиндрические функции. Учитывая соотношение /3.15/, регулярное на бесконечности, решение имеет вид

$$f^{(\nu)}(x)=\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} z^{1/2}(x) J_{\frac{2\ell+1}{\nu}}\left(\frac{2\lambda_\nu}{\nu} z^{-\frac{\nu}{2}}(x)\right). \qquad /4.15/$$

Логарифмическая производная данного решения равна

$$\frac{d\ln f^{(\nu)}(x)}{dx}=-\frac{1}{4}\frac{\gamma_\nu'}{\gamma_\nu}-\left(\ell+\frac{\nu+2}{4}\right) z^{\frac{\nu}{2}}(x)\gamma_\nu^{1/2}(x)+$$
$$+\lambda_\nu\gamma_\nu^{1/2}(x) J_{\frac{2\ell+1}{\nu}+1}\left(\frac{2\lambda_\nu}{\nu} z^{-\frac{\nu}{2}}(x)\right)/J_{\frac{2\ell+1}{\nu}}\left(\frac{2\lambda_\nu}{\nu} z^{-\frac{\nu}{2}}(x)\right), \qquad /4.16/$$

где $z(x)\equiv z(x,E)$, $\gamma_\nu'\equiv d\gamma_\nu/dx$ и определяется соотношением /4.2/, а $z(x,E)$ - /4.13/-/4.14/.

Приравнивая далее логарифмические производные решений /4.11/ и /4.16/ в области перекрывания, получим окончательно спектр задачи Штурма-Лиувилля /2.5/-/2.6/ в виде

$$(\ell+1)\operatorname{cth}[\Phi_\nu(E)]-\frac{1}{2}\operatorname{th}[\Phi_\nu(E)]-$$
$$-\frac{a\cdot a^*}{(\ell+3/2)}\operatorname{sh}[2\Phi_\nu(E)]\frac{F(1+a,1+a^*;\ell+\frac{5}{2};\ -\operatorname{sh}^2[\Phi_\nu(E)])}{F(a,a^*;\ \ell+3/2;\ -\operatorname{sh}^2[\Phi_\nu(E)])}= \qquad /4.17/$$
$$=-\frac{2}{\nu}\left(\ell+\frac{\nu+2}{4}\right)\Phi_\nu^{-1}(E)+\lambda_\nu J_{\frac{2\ell+1}{\nu}+1}(\lambda\Phi_\nu(E))/J_{\frac{2\ell+1}{\nu}}(\lambda_\nu\Phi_\nu(E)),$$

где

$$\Phi_\nu(E)=\int_0^\infty\gamma_\nu^{1/2}(t)dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{\nu}{4},\frac{1}{2}\right)F\left(\frac{\nu}{4},\frac{1}{2};\ \frac{\nu+2}{4};\ 1-E^2\right), \qquad /4.18/$$

$$a=-\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)+\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_\nu^2-(\ell+1/2)^2},$$
$$\lambda_\nu^2=\lambda^2(1-E^2)^{\frac{\nu-1}{2}},\qquad \nu=1,2. \qquad /4.19/$$

В заключение данного раздела заметим, что квазипотенциальное уравнение ($\nu=1$) и его модифицированный вариант ($\nu=2$) /2.1/ в нерелятивистском пределе / $E^2\to 0$, то есть $m^2\to\infty$ / соответствуют уравнению Липмана-Швингера с потенциалом $U(r)=-\lambda^2 r^{-2}$/9,10/. Для слабосвязанных состояний ($E^2\to 0$) оба спектральных условия /4.17/ обладают правильным нерелятивистским пределом и совпадают со спектром уравнения Шредингера для потенциала $U(r)=-\lambda^2 r^{-2}$, а именно:

$$E_n=\exp\left\{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^2-(\ell+1/2)^2}}+\ldots\right\},\quad n=1,2,3\ldots. \qquad /4.20/$$

Последняя формула /4.20/ справедлива с логарифмической точностью. Оба спектральных условия были получены для $E^2\neq 1$. Случай сильно связанных состояний ($E^2=1$) требует отдельного рассмотрения для $\nu=1$, в то время как модифицированный вариант вообще не пригоден для исследования спектра сильно связанных состояний, так как $\lambda_E^2=\lambda^2(1-E^2)^{1/2}$.

5. РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ($\nu=1$)

Выпишем квазипотенциальную краевую задачу Штурма-Лиувилля в форме уравнения Логунова-Тавхелидзе ($\nu=1$) в виде

$$\frac{d^2f_\ell(x)}{dx^2}+\left\{-\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+\lambda^2\gamma(x)\right\}f_\ell(x)=0, \qquad /5.1/$$

$$f_\ell(x)\underset{x\to 0}{\sim}x^{\ell+1},\qquad f_\ell(x)\underset{x\to\infty}{\sim}x^{-\ell}, \qquad /5.2/$$

где снова

$$\gamma(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}(x^2+E^2)}. \qquad /5.3/$$

Эталонную функцию $\Gamma(\sigma)$ для этого уравнения можно подобрать таким образом, чтобы она была справедлива на всем интервале изменения независимой переменной $x\in[0,\infty]$.

В качестве эталонного уравнения по отношению к уравнению /5.1/ выбираем поэтому уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2\mho(\sigma)}{d\sigma^2}+\left\{-\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2}+\lambda^2\Gamma(\sigma)\right\}\mho(\sigma)=0, \qquad /5.4/$$

где

$$\Gamma(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2(1+\sigma)}. \qquad /5.5/$$

Эталонные функции $Q(\sigma)=\ell(\ell+1)\sigma^{-2}$ и $\Gamma(\sigma)$ правильно воспроизводят асимптотические и аналитические свойства исходных функций $q(x)=\ell(\ell+1)x^{-2}$ и $\gamma(x)$, то есть они приблизительно так же зависят от σ, как $q(x)$ и $\gamma(x)$ зависят от x. Единственное отличие заключается в том, что $\Gamma(\sigma)$ обладает регулярной особенностью в нуле ($\sigma=0$), в то время как $\gamma(x)$ обладает регулярной особенностью в нуле ($x=0$) только при $E^2=0$, что и предопределяет, как будет показано ниже, хорошую точность МЭУ-приближений с эталонной функцией $\Gamma(\sigma)$ /5.3/ в пределе малых E^2. Исходя из вышесказанного, эталонирование с таким выбором эталонной функции $\Gamma(\sigma)$ можно назвать "эталонированием по параметру".

Найдем теперь явный вид зависимости σ от x. Для этого опять используем соотношение /3.14/ с учетом явных выражений для $\Gamma(\sigma)$ /5.5/ и $\gamma(x)$ /5.3/. Выбирая далее в качестве эквивалентных точек точки на бесконечности $x_э=\sigma_э=\infty$, получим окончательно

$$\sigma(x,E)=\mathrm{sh}^{-2}\{\frac{1}{2}\Phi(x,E)\}, \qquad /5.6/$$

где

$$\Phi(x,E)=\int_x^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}(t^{-2}+E^2)^{1/2}}, \qquad /5.7/$$

откуда следует, что $\sigma(0,E)=\mathrm{const}$, а $\sigma(x,E)\underset{x\to\infty}{\sim} x$ + к.ч. Таким образом, σ на бесконечности аналогична x, и поэтому асимптотика $\Gamma(\sigma(x))$ и $\gamma(x)$ в этом пределе совпадает.

Займемся теперь решением эталонного уравнения /5.4/. Легко показать, что два линейно независимых решения данного уравнения выражаются через геометрические функции[5]. Следовательно, два линейно независимых решения исходного уравнения с учетом соотношения /3.3/ имеют вид

$$f_1(x)=\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2}\sigma^{\alpha}F(\ell+\alpha,-\ell-\alpha^*;2\alpha;-\sigma),$$
$$f_2(x)=\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2}\sigma^{\alpha^*}F(\ell+\alpha^*,-\ell-\alpha;2\alpha^*;-\sigma), \qquad /5.8/$$

где $\sigma\equiv\sigma(x,E)$ и определяется /5.6/-/5.7/:

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{\lambda^2-(\ell+1/2)^2} . \qquad /5.9/$$

Второе решение получается из первого в результате замены $\alpha\to\alpha^*$.

Общее решение уравнения /5.1/ равно

$$f(x)=A_1f_1(x)+A_2f_2(x). \qquad /5.10/$$

Подставляя данное решение в граничное условие в нуле /5.2/, получим

$$A_1f_1(0)+A_2f_2(0)=0. \qquad /5.11/$$

Для того чтобы удовлетворить граничному условию на бесконечности, необходимо выполнить аналитическое продолжение гипергеометрических рядов /5.8/ в область больших x, так как $\sigma(x)\underset{x\to\infty}{\sim}x$+к.ч.

Ввиду того, что параметры гипергеометрических рядов отличаются на целые числа, аналитическое продолжение можно осуществить с помощью ряда

$$F(\ell+\alpha,-\ell-\alpha^*;2\alpha;-\sigma(x))=F(-\ell-\alpha^*,\ell+\alpha;2\alpha;-\sigma(x))=$$
$$=F(-\ell-\alpha^*,-\ell-\alpha^*+2\ell+1;2\alpha;-\sigma(x))= \qquad /5.12/$$
$$=x^{-\ell+\alpha}\{N(\alpha)h_0(\alpha)+C(\alpha,x)\}+$$
$$+x^{-\alpha}\{x^{-\ell}N(\alpha)\ln x+x^{\ell+1}M(\alpha)+x^{\ell+1}D(\alpha,x)\},$$

где введено следующее обозначение:

$$M(\alpha)=\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\ell+1)/\Gamma(\alpha+\ell)\Gamma(\ell+1+\alpha), \qquad /5.13/$$

а $N(\alpha)$, $h_0(\alpha)$ - несущественные в данном случае комбинации Γ-функций и Ψ-функций соответственно; $C(\alpha,x)$ и $D(\alpha,x)$ - убывающие на бесконечности ряды. Аналогичный ряд для второго решения $f_2(x)$ получается из /5.11/ путем замены $\alpha\to\alpha^*$. Подставляя далее таким же способом аналитически продолженное общее решение /5.10/ в граничное условие на бесконечности, получим второе уравнение для A_1 и A_2, а именно:

$$A_1M(\alpha)+A_2M(\alpha^*)=0. \qquad /5.14/$$

Комбинируя эти два соотношения /5.11/ и /5.13/, получим окончательно спектр исходной краевой задачи /5.1/-/5.2/:

$$M(\alpha)\,\mathrm{sh}^{-2\alpha^*}[\frac{1}{2}\Phi(0,E)]F(\ell+\alpha^*,-\ell-\alpha;2\alpha^*;-\mathrm{sh}^{-2}[\frac{1}{2}\Phi(0,E)])=$$
$$=M(\alpha^*)\,\mathrm{sh}^{-2\alpha}[\frac{1}{2}\Phi(0,E)]F(\ell+\alpha,-\ell-\alpha^*;2\alpha;-\mathrm{sh}^{-2}[\frac{1}{2}\Phi(0,E)]), \qquad /5.15/$$

где α и $M(\alpha)$ даются соотношениями /5.9/ и /5.12/ соответственно, а $\Phi(0,E)$, как это и следовало ожидать, совпадает с $\Phi_1(E)$ /4.18/ при $\nu=1$. Спектральное условие /5.14/ обладает правильным нерелятивистским пределом /4.20/.

6. РЕШЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ($\nu=2$)

Аналогично тому, как была выбрана эталонная функция для квазипотенциальной задачи Штурма-Лиувилля ($\nu=1$), может быть выбрана и эталонная функция для модифицированной задачи Штурма-Лиувилля ($\nu=2$), которую мы выпишем в виде

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2}+\{-\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+\lambda_E^2\gamma(x)\}f_\ell(x)=0, \qquad /6.1/$$

$$f_\ell(x)\underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}, \qquad f_\ell(x)\underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}, \qquad /6.2/$$

где

$$\gamma(x)=\frac{1}{(1+x^2)(x^2+E^2)}. \qquad /6.3/$$

Эталонное уравнение поэтому выбираем следующим образом:

$$\frac{d^2\mho(\sigma)}{d\sigma^2}+\{-\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2}+\frac{\lambda_E^2}{\sigma^2(1+\sigma^2)}\}\mho(\sigma)=0. \qquad /6.4/$$

Эталонные функции $Q(\sigma)=\ell(\ell+1)\sigma^{-2}$ и $\Gamma(\sigma)=[\sigma^2(1+\sigma^2)]^{-1}$ правильно воспроизводят асимптотические и аналитические свойства исходных функций $q(x)=\ell(\ell+1)x^{-2}$ и $\gamma(x)$ соответственно, то есть они приблизительно так же зависят от σ, как $q(x)$ и $\gamma(x)$ от x. В пределе $E^2\to 0$ уравнение /6.1/ тождественно совпадает с уравнением /6.4/, поэтому в этом пределе МЭУ-решения, полученные с помощью /6.4/, должны совпадать с асимптотикой точных решений уравнения /6.1/. Таким образом, и в этом случае аналогично предыдущему эталонирование с помощью уравнения /6.4/ можно назвать "эталонированием по параметру".

Найдем теперь явный вид $\sigma(x)$. Используем для этого уравнение /3.14/ с учетом того, что в качестве эквивалентных точек выбираются точки на бесконечности $\sigma_3=x_3=\infty$. Подставляя явные выражения для $\Gamma(\sigma)$ и $\gamma(x)$, получим окончательно

$$\sigma(x,E)=\mathrm{sh}^{-1}\{\phi(x,E)\}, \qquad /6.5/$$

где

$$\phi(x,E)=\int_x^\infty\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(t^2+E^2)}}. \qquad /6.6/$$

Из этих соотношений легко получить, что $\sigma(0,E)=\mathrm{const}$, $\sigma(x,E)\underset{x\to\infty}{\sim} x+$ к.ч., откуда следует совпадение асимптотик $\Gamma(\sigma(x))$ и $Q(\sigma(x))$ с поведением $\gamma(x)$ и $q(x)$ на бесконечности, что и следовало ожидать.

Решения эталонного уравнения можно выразить через гипергеометрические функции [5]. Учитывая далее соотношение /3.15/, выпишем два линейно независимых решения исходного уравнения /6.1/:

$$f_1(x)=(\frac{d\sigma}{dx})^{-1/2}[\sigma^2(x,E)]^{-\frac{\ell}{2}+a}F(a,-a^*;c;-\sigma^2(x,E)),$$
$$f_2(x)=(\frac{d\sigma}{dx})^{-1/2}[\sigma^2(x,E)]^{-\frac{\ell}{2}+a^*}F(a^*,-a;c^*;-\sigma^2(x,E)), \qquad /6.7/$$

где

$$a=\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_E^2-(\ell+1/2)^2},$$
$$c=1+i\sqrt{\lambda_E^2-(\ell+1/2)^2}, \qquad /6.8/$$

$\sigma(x,E)$ определяется соотношениями /6.5/-/6.6/.

Общее решение уравнения /6.1/ запишем в виде

$$f(x)=A_1f_1(x)+A_2f_2(x). \qquad /6.9/$$

Используя граничное условие в нуле, получим

$$A_1f_1(0)+A_2f_2(0)=0. \qquad /6.10/$$

Ввиду того, что $\sigma(x)$ на бесконечности аналогична x, асимптотика решений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяется асимптотикой гипергеометрических функций, входящих в решения $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Выписывая формулы асимптотического поведения данных гипергеометрических рядов и подставляя их в граничное условие на бесконечности, получим

$$A_1B_2+A_2B_2^*=0, \qquad /6.11/$$

где

$$B_2=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+a^*)}{\Gamma(a)\Gamma(c+a^*)}. \qquad /6.12/$$

Комбинируя условия /6.10/ и /6.11/, получим окончательно спектральное условие для модифицированной квазипотенциальной задачи Штурма-Лиувилля /6.1/-/6.2/:

$$B_2^* \operatorname{sh}^{-2a}[\phi(0,E)]\,F(a,-a^*;c;-\operatorname{sh}^{-2}[\phi(0,E)]) =$$

$$= B_2 \operatorname{sh}^{-2a^*}[\phi(0,E)]\,F(a^*,-a;c^*;-\operatorname{sh}^{-2}[\phi(0,E)]), \qquad /6.13/$$

где a, c, B_2, B_2^* даются соотношениями /6.8/ и /6.12/ соответственно; $\phi(0,E)$ как и следовало ожидать, совпадает с $\Phi_2(E)$ /4.18/ при $\nu=2$. Данное спектральное условие обладает правильным нерелятивистским пределом /4.20/.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заключительный раздел посвятим обсуждению полученных результатов. Квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд /2.1/ в случае, когда квазипотенциал в координатном представлении имеет кулоноподобный вид, было редуцировано к задаче Штурма-Лиувилля /2.5/-/2.6/ в импульсном пространстве. Для решения полученной таким путем краевой задачи был сформулирован в общем виде метод эталонного уравнения, позволяющий находить решения /спектр и собственные функции/ в виде асимптотических рядов по обратным степеням предположительно большого параметра λ^2. Спектральные МЭУ-условия /4.17/, /5.14/ и /6.13/ были получены в предположении, что в асимптотическом ряду /3.6/ для $\sigma(x)$ удерживался главный член асимптотического разложения $\sigma_0(x)$.

В данной работе метод эталонного уравнения применялся двумя несколько различными способами, а именно: в разделе 4 различные эталонные уравнения использовались для различных областей изменения независимой переменной, а затем полученные решения сшивались в области перекрывания. Второй способ, традиционный, использованный нами в предыдущих работах [2,3], заключался в том, что подбиралось эталонное уравнение, справедливое на всем интервале изменения независимой переменной. Оба способа применения метода эталонного уравнения дают эффективные результаты для задач о связанных состояниях, в то время как для задач рассеяния, по-видимому, второй способ предпочтительнее.

Автору приятно выразить свою благодарность А.Н.Тавхелидзе и А.Т.Филиппову за полезные и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p.380.
2. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ТМФ, 1976, 27,с.323
3. Гогохия В.Ш. ТМФ, 1981, 48, с.80.
4. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ОИЯИ, Р2-9894, Дубна, 1976.
5. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1965, т.1.
6. Langer R.E. Trans.Amer.Math.Soc., 1931, 33, p.23; Olver G.W.J. Phylos.Trans.Roy.Soc., 1954, A247, p.307.
7. Черри Т.М. Математика, 1965, 954, с.87
8. Пономарев Л.И. Препринт ИТФ-67-53, Киев, 1968.
9. Гогохия В.Ш. Сообщения АН ГССР, 1978, 90, с.333.
10. Case K.M. Phys.Rev., 1950, 80, p.797.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Гогохия В.Ш. Р2-82-186

Решение квазипотенциальных задач Штурма-Лиувилля методом эталонного уравнения

Для решения квазипотенциальных задач Штурма-Лиувилля в импульсном представлении в общем виде сформулирован и применен метод эталонного уравнения, позволяющий находить решения в виде асимптотических рядов по обратным степеням константы связи. С помощью этого метода двумя различными способами получены дискретные спектры при любых энергиях связи в случае учета высших парциальных волн. Исследованы пределы слабой связи соответствующих спектральных условий.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Gogokhiya V.Sh. P2-82-186

Solution of Quasipotential Sturm-Liouville Problems by the Comparison Equation Method

The comparison equation method (CEM) is formulated in the general form and applied to the quasipotential Sturm-Liouville problems in the momentum representation. This method makes it possible to obtain the solution in the form of asymptotical series in the inverse coupling constant. By two different ways of that method the discrete energy spectrums at arbitrary binding energies for the high waves are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.