объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-82-185

В.Ш.Гогохия

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффективным методом рассмотрения задач рассеяния, равно как и задач о связанных состояниях, является квазипотенциальной подход в квантовой теории поля [1]. В свою очередь, сведение интегральных квазипотенциальных уравнений к дифференциальным краевым задачам в импульсном или координатном пространствах дает возможность применить мощные аналитические, асимптотические или числовые методы, разработанные в теории дифференциальных уравнений. Сведение квазипотенциальных уравнений для связанных состояний к задачам Штурма-Лиувилля и их решение с помощью метода эталонного уравнения /МЭУ/ рассматривалось в работах [2,3].

Данная работа посвящена изучению квазипотенциальной задачи рассеяния скалярных частиц одинаковой массы, взаимодействующих посредством квазипотенциала, имеющим в координатном пространстве кулоновский вид $V(r)=-gr^{-1}$. В разделе 2 соответствующее интегральное уравнение для парциальных амплитуд сведено к задаче Штурма-Лиувилля. В разделах 3 и 4 вычислены явные выражения для амплитуды рассеяния и ее модифицированного варианта, а также исследованы асимптотические свойства эффективной константы связи, возникающей в данной модели. Заключительный раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы m имеет вид [2]

$$f_\ell(p,p') = V_\ell(p,p') + \int_0^\infty \frac{dq(k^2+m^2)^{(\nu-1)/2}}{(q^2+m^2)^{\nu/2}} \frac{V_\ell(p,q)\quad f_\ell(q,p')}{k^2-q^2}, \qquad /2.1/$$

$$V_\ell(p,p') = \sqrt{pp'}\int_0^\infty dr\, V(r) J_{\ell+1/2}(rp)\, J_{\ell+1/2}(rp'). \qquad /2.2/$$

Здесь p, p' - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс; энергетическая поверхность определяется условием $p^2=p'^2=k^2$, а энергия в системе центра масс равна $W=2\sqrt{k^2+m^2}$. Значение $\nu=1$ соответствует квазипотенциальному уравнению в форме уравнения Логунова-Тавхелидзе[1,2], $\nu=2$ - модифицированному квазипотенциальному уравнению[2,4].

Легко показать, что $V_\ell(p,p')$ /2.2/ в случае, когда квазипотенциал в координатном пространстве равен $V(r)=-gr^{-1}$, можно представить в виде[2]

$$V_\ell(p,p') = -\frac{g}{2\ell+1}\{\Theta(p-p')\frac{p'^{\ell+1}}{p^\ell}+\Theta(p'-p)\frac{p^{\ell+1}}{p'^\ell}\}, \mathrm{Re}\,\ell > -\frac{1}{2}. \qquad /2.3/$$

Дифференцируя далее интегральное уравнение /2.1/ с ядром /2.3/ и подставляя решения таким образом полученного дифференциального уравнения в исходное интегральное, нетрудно проверить, что уравнение /2.1/ эквивалентно следующей краевой задаче Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d^2f_\ell(x)}{dx^2} - \{\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - \frac{\lambda^2(1+E^2)^{(\nu-1)/2}}{(1+x^2)^{\nu/2}(x^2-E^2)}\}f_\ell(x) = +m^2\lambda^2\delta(x-x'), \qquad /2.4/$$

$$f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}, \quad f_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}, \qquad /2.5/$$

где $x=pm^{-1}$ есть безразмерная импульсная переменная, $\lambda^2=gm^{-1}$ и $E=km^{-1}$ - безразмерные константы связи и энергетический параметр соответственно, причем подразумевается, что к E^2 добавлена бесконечно малая мнимая величина, то есть $E^2\to E^2+i0$. Энергетический параметр E^2 изменяется от нуля до бесконечности, а энергетическая поверхность определяется теперь условием $x=x'=E$ /в действительности E^2 является безразмерным импульсом, входящим в выражение для энергии в системе центра масс $W=2m\sqrt{E^2+1}$/.

3. РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ($\nu=1$)

Квазипотенциальную задачу рассеяния /2.4/-/2.5/ двух скалярных частиц одинаковой массы, взаимодействующих посредством квазипотенциала кулоновского вида $V(r)=-gr^{-1}$, перепишем в виде

$$\frac{d^2f_\ell(x)}{dx^2} + \{-\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \lambda^2\gamma(x)\}f_\ell(x) = +m^2\lambda^2\delta(x-x'), \qquad /3.1/$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}(x^2-E^2)} \qquad /3.2/$$

с прежними граничными условиями /2.5/.

Решение уравнения /3.1/ найдем с помощью метода эталонного уравнения, сформулированного в работах[2,3]. Для того, чтобы правильно выписать эталонное уравнение /ЭУ/ по отношению к однородному уравнению, соответствующему исходному уравнению /3.1/, необходимо выяснить аналитические и асимптотические свойства функции $\gamma(x)$, стоящей при λ^2 в уравнении /3.1/. Уравнение /3.1/ с $\gamma(x)$, определяемой соотношением /3.2/, имеет две точки поворота на бесконечности и на массовой поверхности $x=E$, а также регулярную особенность в точке $x=0$ при $E^2=0$. Учитывая все это, в качестве уравнения можно выбрать уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2\mho(\sigma)}{d\sigma^2} + \{-\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2} + \lambda^2\Gamma(\sigma)\}\mho(\sigma) = 0, \qquad /3.3/$$

$$\Gamma(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2(\sigma-\epsilon)}. \qquad /3.4/$$

Очевидно, что эталонная функция $\Gamma(\sigma)$ как функция от σ в пределе $\sigma\to\infty$ правильно воспроизводит асимптотические свойства $\gamma(x)$ при $x\to\infty$. Из дальнейшего изложения будет видно, что зависимость $\Gamma(\sigma(x))$ от x в нуле и на бесконечности такая же, как и $\gamma(x)$ от x, причем кулоновская особенность в точке $x=E$ в $\Gamma(\sigma(x))$ воспроизводится условием $\sigma(x,E)=\epsilon(E)$ при $x=E$. Таким образом, это требование эквивалентно условию совпадения точек перехода исходного уравнения и соответствующего ему эталонного в точке $x=E$. Совпадение же точек перехода на бесконечности достигается при одинаковом поведении $\Gamma(\sigma(x))$ и $\gamma(x)$ при $x\to\infty$ /см. формулу /3.8//.

Здесь же необходимо отметить, что эталонное уравнение /3.3/ не обладает регулярной особенностью в точке $x=0$ при $E^2=0$, как это имеет место в исходном уравнении /3.1/. Поэтому решение, полученное методом эталонного уравнения, должно быть модифицировано в пределе $E^2\to 0$.

Решение уравнения /3.1/ ищем в виде

$$f(x) = (\frac{d\sigma}{dx})^{-1/2}\mho(\sigma(x)). \qquad /3.5/$$

Подставляя /3.5/ в /3.1/ и используя /3.3/, получим уравнение для $\sigma(x)$, которое с точностью до членов порядка λ^{-2} имеет вид[3]

$$(\frac{d\sigma}{dx})^2\,\Gamma(\sigma) = +\gamma(x). \qquad /3.6/$$

В этом приближении решение /3.5/ можно представить в форме[3]

$$f(x) = \{\Gamma(\sigma(x))/\gamma(x)\}^{1/4}\,\mho(\sigma(x)). \qquad /3.7/$$

Выбирая далее в качестве эквивалентных точек уравнений /3.1/ и /3.3/ точки на бесконечности, то есть $\sigma_э = \sigma(x_э) = x_э = \infty$, и интегрируя /3.6/, получим окончательно

$$\frac{\sigma(x,E)}{\epsilon(E)} = \sin^{-2}\left\{ \frac{\sqrt{\epsilon(E)}}{2}\Phi(x,E)\right\}, \qquad /3.8/$$

где

$$\Phi(x,E) = \int_x^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}(t^2-E^2)^{1/2}}. \qquad /3.9/$$

Из формул /3.8/ и /3.9/ следует, что

$$\sigma(x,E) \underset{x\to\infty}{\sim} x + \text{к.ч.}, \qquad \sigma(0,E) = \text{const} \qquad /3.10/$$

в соответствии со сказанным выше. Поэтому асимптотические свойства $\Gamma(\sigma(x))$ и $\gamma(x)$ на концах интервала изменения независимой переменной $x \in [0,\infty)$ совпадают.

Значение $\epsilon(E)$ получаем из условия $\sigma(E,E) = \epsilon(E)$. Используя /3.8/ в точке $x = E$, получим

$$\epsilon(E) = \pi^2 \Phi^{-2}(E,E), \qquad /3.11/$$

где

$$\Phi(E,E) = \int_E^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}(t^2-E^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)(E^2)^{-1/4}F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4};\frac{3}{4};-E^{-2}\right). \qquad /3.12/$$

Два линейно независимых решения эталонного уравнения /3.3/ можно выразить через гипергеометрические функции. Учитывая далее /3.7/, получим окончательно два линейно независимых решения исходного уравнения /3.1/ в виде

$$f_1(x) = \left\{\frac{\sigma^2(x)(\sigma(x)-\epsilon(E))}{(1+x^2)^{1/2}(x^2-E^2)}\right\}^{-1/4}\left[-\frac{\sigma(x)}{\epsilon(E)}\right]^{\alpha} F\left(\alpha+\ell, -\ell-(1-\alpha); 2\alpha; \frac{\sigma(x)}{\epsilon(E)}\right),$$

$$/3.13/$$

$$f_2(x) = \left\{\frac{\sigma^2(x)(\sigma(x)-\epsilon(E))}{(1+x^2)^{1/2}(x^2-E^2)}\right\}^{-1/4}\left[-\frac{\sigma(x)}{\epsilon(E)}\right]^{1-\alpha} F\left(\ell+(1-\alpha), -\ell-\alpha; 2(1-\alpha); \frac{\sigma(x)}{\epsilon(E)}\right),$$

где $\sigma(x) \equiv \sigma(x,E)$,

$$\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^2_{эфф}},$$

$$/3.14/$$

$$\lambda^2_{эфф} = \lambda^2 \epsilon^{-1}(E).$$

Для упрощения дальнейших выкладок оба решения /3.13/ домножены на постоянные $(-1)^{\alpha}$ и $(-1)^{1-\alpha}$ соответственно. Очевидно также, что второе решение может быть получено их первого путем замены $\alpha \to 1-\alpha$.

Как известно, решения неоднородного уравнения /3.1/ можно выразить через решения соответствующего однородного уравнения /3.13/:

$$f(x,x') = A_1(x')f_1(x) + A_2(x')f_2(x) +$$

$$/3.15/$$

$$+ \frac{m^2\lambda^2}{\omega}[\theta(x-x')f_1(x)f_2(x') - \Theta(x-x')f_2(x)f_1(x')].$$

В этом решении первые два члена описывают решение однородного уравнения, а второй член есть частное решение неоднородного уравнения. Вронскиан двух линейно независимых решений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в /3.15/ обозначен через ω.

Для определения коэффициентных функций $A_1(x')$ и $A_2(x')$ необходимо использовать граничные условия /2.5/ в нуле и на бесконечности, а также выполнить аналитическое продолжение гипергеометрических рядов, входящих в $f_1(x)$ и $f_2(x)$, на бесконечность, так как $\sigma(x,E) \underset{x\to\infty}{\sim} x + \text{к.ч.}$ /см. /3.10//.

Таким образом, общее решение $f(x,x')$ /3.15/, удовлетворяющее всем граничным условиям, имеет вид

$$f(x,x') = \frac{\lambda^2 m^2/\omega}{K_2(1-\alpha) - K_2(\alpha)D(0)}[K_2(1-\alpha)f_1(x') - K_2(\alpha)f_2(x')] \times$$

$$/3.16/$$

$$\times [f_2(x) - D(0)f_1(x)] + \frac{\lambda^2 m^2}{\omega}\Theta(x-x')[f_2(x')f_1(x) - f_1(x')f_2(x)],$$

где

$$D(0) = f_2(0)/f_1(0), \qquad /3.17/$$

$$K_2(\alpha) = (-1)^{\ell+1}\Gamma(2\ell+1)\Gamma(2\alpha)/\Gamma(\alpha+\ell)\Gamma(\ell+1+\alpha),$$

а $K_2(1-\alpha)$ получается из $K_2(\alpha)$ в результате замены $\alpha \to 1-\alpha$. На массовой поверхности $x = x' = E$ решение /3.16/ приобретает вид

$$f_\ell(E) = +\left\{\frac{(1+E^2)^{1/2}\,2E}{\pi^2}\right\}^{1/2} m^2\epsilon(E)\sin\pi\alpha \times$$

$$/3.18/$$

$$\times\left\{\frac{(-1)^{1-\alpha}K_2(1-\alpha) - (-1)^{\alpha}K_2(\alpha)D(0)}{K_2(1-\alpha) - K_2(\alpha)D(0)}\right\},$$

$$D(0)=\frac{f_2(0)}{f_1(0)}=\frac{[-\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}]^{1-a}\,F(\ell+(1-a),-\ell-a;\,2(1-a);\,\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)})}{[-\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}]^{a}\,F(\ell+a,-\ell-(1-a);\,2a;\,\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)})}, \qquad /3.19/$$

а $\epsilon(E)$, a и $K_2(a)$, $K_2/(1-a)$ определяются формулами /3.11/, /3.14/ и /3.17/ соответственно. Выражение для $\sigma(0,E)/\epsilon(E)$ определяется формулами /3.8/-/3.9/ в точке $x=0$, в которых

$$\Phi(0,E)=\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}(t^2-E^2)^{1/2}}=\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{4})F(\frac{1}{4},\frac{1}{2};\frac{3}{4};1+E^2). \qquad /3.20/$$

Как уже отмечалось выше, решение /3.16/ должно быть модифицировано в пределе $x\to 0$ при $E=0$. Каким именно путем должно быть модифицировано данное решение, проще всего можно понять с помощью решений /3.13/ для однородного исходного уравнения /3.1/. Действительно, полагая в решениях /3.13/ $E=0$, найдем далее асимптотические разложения данных решений в пределе $x\to 0$. Сравнивая таким образом полученные асимптотические разложения решений /3.13/ с асимптотикой точных решений уравнения /3.1/, получим, что модификация заключается в том, чтобы вычеркнуть фактор $-\epsilon(0)$ из всех соотношений /3.14/, /3.18/ и /3.19/.

Таким образом, чтобы обеспечить правильное поведение МЭУ-решений /3.13/ /а значит, и парциальной амплитуды /3.18/ в нерелятивистском пределе $E^2\to 0$ /, в регулярной особой точке $x=0$ при $E^2=0$ исходного уравнения /3.1/ необходимо в выражении для парциальной амплитуды /3.18/ в пределе $E^2\to 0$ опустить зависимость от $-\epsilon(0)$.

С другой стороны, в нерелятивистском пределе $E^2\to 0$ /большие расстояния/ само квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд /2.1/ переходит в уравнение Липмана-Швингера для потенциала $U(r)=-\lambda^2 r^{-2}$ /5,6/. Сравнение /3.18/ в пределе $E^2\to 0$ с амплитудой Липмана-Швингера также указывает на необходимость вышеописанной модификации.

В заключение данного раздела рассмотрим более подробно асимптотические свойства эффективной константы взаимодействия $\lambda^2_{эфф}$, определяемой соотношением /3.14/:

$$\lambda^2_{эфф}=\lambda^2\,\epsilon^{-1}(E)=\lambda^2\,\pi^{-2}\Phi^2(E,E)=$$
$$=\lambda^2\pi^{-2}\{\frac{1}{2}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2})(E^2)^{-1/4}F(\frac{1}{4},\frac{1}{4};\frac{3}{4};-E^{-2})\}^2. \qquad /3.21/$$

На больших расстояниях, которые соответствуют нерелятивистскому пределу $E^2\to 0$, с учетом указанной модификации эффективная константа взаимодействия $\lambda^2_{эфф}$ стремится к $-\lambda^2$, то есть к константе взаимодействия из уравнения Липмана-Швингера, которое играет роль классического аналога для квазипотенциального уравнения.

Таким образом, это поведение эффективной константы связи $\lambda^2_{эфф}$ эквивалентно ее перенормировке на больших расстояниях.

В ультрарелятивистском пределе $E\to\infty$ /малые расстояния/ эффективная константа взаимодействия $\lambda^2_{эфф}$ стремится к нулю. Действительно, ограничиваясь в формуле /3.21/ членами порядка E^{-1}, получим

$$\lambda^2_{эфф}\underset{E\to\infty}{\sim}\frac{B^2(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}{(2\pi)^2}\,\frac{\lambda^2}{E}+\dots. \qquad /3.22/$$

Из формулы /3.22/ следует, что на малых расстояниях эффективная константа связи $\lambda^2_{эфф}$ ослабевает и наступает явление "асимптотической свободы", характерное для некоторых квантовополевых моделей, основанных на неабелевых колибровочных полях /7/. В этом случае парциальную амплитуду рассеяния $f_\ell(E)$ можно представить в виде формального ряда по степени константы взаимодействия $\lambda^2_{эфф}$.

Завершая наше рассмотрение квазипотенциального уравнения, отметим, что полюс амплитуды /3.18/ в верхней полуплоскости комплексных значений $E\,(\mathrm{Im}E>0)$ на мнимой полуоси соответствует связанным состояниям. Замена $E^2\to -E^2$ влечет за собой замену $\epsilon(E)\to -\epsilon(E)$ и $a\to a=1/2+i\sqrt{\lambda^2_{эфф}-(\ell+1/2)^2}$. Тогда спектральное условие принимает вид

$$K_2(a^*)[\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}]^{a}F(\ell+a,-\ell-a^*;2a;-\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)})=$$
$$=K_2(a)[\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}]^{a^*}F(\ell+a^*,-\ell-a;2a^*;-\frac{\sigma(0,E)}{\epsilon(E)}), \qquad /3.23/$$

где $\sigma(0,E)/\epsilon(E)$ определяется формулами /3.8/ и /3.9/ в точке $x=0$ с учетом вышеуказанных замен, а именно: $E^2\to -E^2$, $\epsilon(E)\to -\epsilon(E)$.

4. РЕШЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ($\nu=2$)

Модифицированную квазипотенциальную задачу рассеяния /2.4/-/2.5/ можно представить в виде

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \{ - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \lambda_E^2 \gamma(x) \} f_\ell(x) = m^2 \lambda^2 \delta(x - x'), \qquad /4.1/$$

$$f_\ell(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^{\ell+1}, \qquad f_\ell(x) \underset{x \to \infty}{\sim} x^{-\ell}, \qquad /4.2/$$

где /4.3/

$$\lambda_E^2 = \lambda^2 (1 + E^2)^{1/2},$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{(1+x^2)(x^2 - E^2)}. \qquad /4.4/$$

Решение уравнения /4.1/, так же как решение уравнения /3.1/, найдем с помощью метода эталонного уравнения, схематически описанного в предыдущем пункте. Уравнение /4.1/, как и /3.1/, обладает двумя точками поворота на бесконечности и на массовой поверхности $x=E$,а также регулярной особенностью в точке $x=0$ при $E^2=0$. В качестве эталонного уравнения /ЭУ/ выбираем уравнение вида

$$\frac{d^2 \mho(\sigma)}{d\sigma^2} + \{ - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2} + \lambda_E^2 \Gamma(\sigma) \} \mho(\sigma) = 0, \qquad /4.5/$$

$$\Gamma(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2(\sigma^2 - \epsilon^2)}, \qquad /4.6/$$

в котором, как и прежде, кулоновская точка поворота $x=E$моделируется требованием $\sigma(x, E) = \epsilon(E)$ при $x=E$. Точка поворота на бесконечности моделируется выбором формы $\Gamma(\sigma)$ как функции σ, что эквивалентно требованию совпадения точек поворота на бесконечности исходного и эталонного уравнений. МЭУ-решения уравнения /4.1/ должны быть модифицированы в пределе $E^2 \to 0$,так как эталонное уравнение /4.5/ не воспроизводит регулярной особенности в точке $x=0$ при $E^2=0$ исходного уравнения, то есть возникает ситуация, аналогичная предыдущему случаю.

Найдем теперь явный вид $\sigma(x)$.Для этого подставим в /3.6/ формулы /4.6/ и /4.4/ с учетом того, что в качестве эквивалентных точек выбираются точки на бесконечности $\sigma_э = \sigma(x_э) = x_э = \infty$. Тогда получим

$$\frac{\sigma(x, E)}{\epsilon(E)} = \sin^{-1} \{ \epsilon(E), \phi(x, E) \}, \qquad /4.7/$$

где

$$\phi(x, E) = \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(t^2 - E^2)}}, \qquad /4.8/$$

откуда следует, что

$$\sigma(x, E) \underset{x \to \infty}{\sim} x + \text{к.ч.}, \qquad \sigma(0, E) = \text{const}, \qquad /4.9/$$

то есть в полном соответствии со сказанным выше. В силу такого поведения $\sigma(x)$ асимптотические свойства $\Gamma(\sigma(x))$ и $\gamma(x)$ совпадают. Значение $\epsilon(E)$ получим из условия совпадения $\sigma(x, E) = \epsilon(E)$ при $x=\epsilon$. Из /4.7/ поэтому следует

$$\epsilon(E) = \frac{\pi}{2} \phi^{-1}(E, E), \qquad /4.10/$$

где

$$\phi(E, E) = \int_E^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(t^2 - E^2)}} = \frac{\pi}{2}(1+E^2)^{-1/2} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{1+E^2}). \qquad /4.11/$$

Решения эталонного уравнения /4.5/ можно выразить через гипергеометрические функции [8]. Используя далее /3.7/, получим окончательно два линейно независимых решения исходного уравнения /4.1/:

$$f_1(x) = [\frac{\Gamma(\sigma(x))}{\gamma(x)}]^{1/4} [- \frac{\sigma^2(x, E)}{\epsilon^2(E)}]^{1/4 + 1/2 \nu} \times$$

$$\times F(\frac{1}{2}(\ell + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}(\ell + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\nu; 1 + \nu; \frac{\sigma^2(x)}{\epsilon^2(E)}),$$

$$f_2(x) = [\frac{\Gamma(\sigma(x))}{\gamma(x)}]^{1/4} [- \frac{\sigma^2(x, E)}{\epsilon^2(E)}]^{1/4 - 1/2 \nu} \times \qquad /4.12/$$

$$\times F(\frac{1}{2}(\ell + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}(\ell + \frac{1}{2}) - \frac{\nu}{2}; 1 - \nu; \frac{\sigma^2(x)}{\epsilon^2(E)}),$$

где

$$\nu = \sqrt{(\ell + 1/2)^2 + \lambda_{эфф}^2},$$

$$\lambda_{эфф}^2 = \lambda_E^2 \epsilon^{-2}(E) = \lambda^2 (1 + E^2)^{1/2} \epsilon^{-2}(E). \qquad /4.13/$$

Очевидно, что второе решение получается из первого путем замены $\nu \to -\nu$. С помощью этих двух решений однородного исходного уравнения можно по стандартной схеме построить частное решение неоднородного уравнения, а затем выписать общее решение исходного уравнения /4.1/, удовлетворяющее всем граничным условиям, как это было сделано в предыдущем случае для квазипотенциальной амплитуды /3.16/. Опуская громоздкие выкладки и учитывая условие массовой поверхности $x = x' = E$, получим окончательно для модифицированной квазипотенциальной парциальной амплитуды следующее выражение:

$$f_\ell(E) = -m^2 [\frac{E \cdot \epsilon^3(E)}{\pi^2}]^{1/2} \{ 1 - e^{-i(\ell + 1/2)\pi} \frac{[e^{-i\nu\pi} B_2' - e^{i\nu\pi} B_2 D(0)]}{B_2' - B_2 D(0)} \}, \qquad /4.14/$$

где

$$D(0)=\frac{\left[-\frac{\sigma^2(0,E)}{\epsilon^2(E)}\right]^{-\frac{1}{2}\nu} F\left(\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\nu,-\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\nu;1-\nu;\frac{\sigma^2(0,E)}{\epsilon^2(E)}\right)}{\left[-\frac{\sigma^2(0,E)}{\epsilon^2(E)}\right]^{\frac{1}{2}\nu} F\left(\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\nu;-\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\nu;1+\nu;\frac{\sigma^2(0,E)}{\epsilon^2(E)}\right)}, \qquad /4.15/$$

$$B_2 \equiv B_2(\nu)=\frac{\Gamma(\ell+\frac{1}{2})\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(1+\frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\nu)} \,. \qquad /4.16/$$

В этих формулах $\sigma(0,E)/\epsilon(E)$ определяется соотношением /4.7/ в точке $x=0$, откуда

$$\phi(0,E)=\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(t^2-E^2)}}=\frac{\pi}{2}F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1+E^2). \qquad /4.17/$$

Выражение для ν дается формулой /4.13/, а $B_2' = B_2(-\nu)$.

Как и в предыдущем случае, амплитуда /4.14/ должна быть исправлена в нерелятивистском пределе $E^2 \to 0$. Как и для квазипотенциальной амплитуды /3.18/, модификация заключается в том, чтобы в решении /4.14/ в пределе $E^2 \to 0$ опустить зависимость от фактора $-\epsilon(0)$. Здесь же необходимо отметить, что в нерелятивистском пределе $E \to 0$ /большие расстояния/ модифицированный вариант квазипотенциального уравнения, так же как и первоначальный вариант, переходит в уравнение Липмана-Швингера для потенциалов $U(r)=-\lambda^2 r^{-2}$ /5,6/, откуда также следует необходимость в вышеуказанной модификации.

На языке эффективной константы связи $\lambda^2_{эфф}$, определяемой соотношением /4.13/, такая модификация означает ее перенормировку на больших расстояниях. В ультрарелятивистском пределе $E \to \infty$ /малые расстояния/ $\lambda^2_{эфф}$ с учетом /4.13/ и /4.11/ ослабевает, и в этом пределе, как и для предыдущей $\lambda^2_{эфф}$, возникает возможность представить амплитуду /4.14/ в виде ряда по степеня $\lambda^2_{эфф}$.

Завершая данный раздел, отметим, что полюса амплитуды /4.14/ в верхней полуплоскости $E(\mathrm{Im}E>0)$ на мнимой полуоси соответствуют связанным состояниям, причем замена $E^2 \to -E^2 (E \to iE)$ влечет за собой замену $\epsilon^2(E) \to -\epsilon^2(E)$ $(\epsilon(E) \to i\epsilon(E))$ и

$$\nu \to \nu' = i\sqrt{\lambda^2_{эфф}-(\ell^2+½)^2}\,.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была исследована модель сильно взаимодействующих $(g>m,\ \lambda^2>1)$ скалярных частиц одинаковой массы, причем взаимодействие феноменологически описывается квазипотенциалом кулоновски подобного вида $V(r)=-gr^{-1}$. В этом случае квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд было редуцировано к задаче Штурма-Лиувилля /2.4/-/2.5/ в импульсном пространстве. В рамках метода сильной связи, каковым является метод эталонного уравнения, предложенный ранее в /2,3/ для квазипотенциальных уравнений, получены замкнутые выражения для квазипотенциальной амплитуды рассеяния /3.18/ и ее модифицированного варианта /4.14/. В связи с тем, что в данной работе используется метод эталонного уравнения МЭУ, следует отметить, что стандартная схема МЭУ требует построения отдельных эталонных уравнений в окрестности каждой точки поворота исходного уравнения, а затем МЭУ-приближения сшиваются в области перекрывания. В этой же работе было использовано одно эталонное уравнение в окрестности точки поворота на бесконечности, а конечная точка поворота на массовой поверхности $x=x'=E$ была воспроизведена путем введения в эталонное уравнение параметрической функции $\epsilon(E)$, совпадающей с аргументом эталонного уравнения на массовой поверхности. Таким образом были получены единые аналитические формулы для парциальных амплитуд /3.18/ и /4.14/ соответственно. Исследуя далее полюса парциальных амплитуд в верхней полуплоскости комплексных значений $E(\mathrm{Im}E>0)$ на мнимой полуоси, удалось получить спектры связанных состояний исследуемой модели. В нерелятивистском пределе $E \to 0$ /большие расстояния/ обе амплитуды, как это указывалось выше, должны быть модифицированы, что на языке эффективных констант связи, естественно возникающих в данной модели, означает их перенормировку на больших расстояниях. На малых же расстояниях /ультрарелятивистский предел $E \to \infty$/ обе эффективные константы связи стремятся к нулю. В этом случае обе амплитуды можно представить в виде рядов по степеням эффективных констант связи.

В заключение данного раздела заметим, что амплитуда рассеяния на квазипотенциале отталкивания получается путем замены $\lambda^2_{эфф} \to -\lambda^2_{эфф}$ в конечных формулах.

Автору приятно выразить благодарность А.Н.Тавхелидзе, А.Т.Филиппову, В.Г.Кадышевскому и А.А.Хелашвили за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, No.2, p.380-399.
2. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ТМФ, 1976, 27, №3, с. 323-336.
3. Гогохия В.Ш. ТМФ, 1981, 48, №1, с. 80-88.
4. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ОИЯИ, Р2-9894, Дубна, 1976.
5. Case K.M. Phys.Rev., 1950, 80, No.5, p. 797-806.
6. Гогохия В.Ш. Сообщения АН Гр.ССР, 1978, 90, №2, с. 333-336.
7. Politzer H.D. Phys.Rev. Ser.C, 1974, 14, p. 129.
8. Бейтман Г., Эрдейи Д. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1982 года.

Гогохия В.Ш. Квазипотенциальное кулоновское рассеяние скалярных частиц Р2-82-185

Рассмотрена квазипотенциальная модель рассеяния сильно взаимодействующих скалярных частиц одинаковой массы, когда квазипотенциал в координатном пространстве имеет кулоновский вид. В этом случае интегральное квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд сводится к задаче Штурма-Лиувилля в импульсном пространстве с двумя точками поворота. Для вычисления парциальных амплитуд применяется метод эталонного уравнения /МЭУ/ в форме, пригодной при наличии в исходном уравнении двух /или более/ точек поворота. Обсуждаются также асимптотические свойства эффективной константы связи, возникающей в данной модели. Показано, что в нерелятивистском пределе эффективная константа связи стремится к константе связи из соответствующего уравнения Шредингера, а в релятивистском пределе эффективная константа связи стремится к нулю. В этом случае вычисленные парциальные амплитуды представимы в виде рядов по степеням эффективной константы связи.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Gogokhia V.Sh. Quasipotential Coulomb Scattering of Scalar Particles P2-82-185

Quasipotential scattering model of scalar particles of equal masses m and for quasipotential having in coordinate representation the Coulomb like form $V(r) = -gr^{-1}$ $(g > m)$ is considered. In this case integral quasipotential equation for partial amplitudes is reduced to the Sturm-Lioville problem with two transition points. The comparison equation method (CEM) in the suitable form for two transition points (or more) of initial equation is applied for calculating partial amplitudes. Asymptotic properties of effective coupling constant are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of the Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.