ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2-82-163

В.Н.Капшай, Н.Б.Скачков

КОВАРИАНТНЫЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ, ДОПУСКАЮЩИХ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Решения в релятивистском конфигурационном представлении

Направлено в ТМФ

1982

§ I. Введение

Квазипотенциальный подход [I-3] представляет собой важный инструмент для исследования релятивистской двухчастичной системы. Геометрические свойства квазипотенциальных уравнений позволяют с помощью применения гармонического анализа на группе Лоренца [4,5] сформулировать теорию в релятивистском конфигурационном представлении (РКП), во многом аналогичную аппарату квантовой механики.

В данной работе мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе [I] для связанной системы двух скалярных частиц с одинаковыми массами, $m_1 = m_2 = m$, которое в терминах ковариантно определенных импульсов частиц $\overset{\circ}{\vec{p}} = (\overrightarrow{\Lambda^{-1}_{\mathcal{P}} p})$ в системе центра масс [6,7] имеет вид

$$\left(E^2_{\overset{\circ}{p}} - E^2\right)\Psi(\overset{\circ}{\vec{p}}) = \frac{1}{4(2\pi)^3}\int V(\overset{\circ}{\vec{p}},\overset{\circ}{\vec{k}};E)\,\Psi(\overset{\circ}{\vec{k}})\,\frac{d\overset{\circ}{\vec{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{\circ}{\vec{k}}{}^2}}\,. \tag{I.I}$$

В определении волновой функции (ВФ) $\Psi(\overset{\circ}{\vec{p}})$ через бете-солпитеровскую и в обозначениях мы следуем работам [I,7]. Настоящую работу можно рассматривать как непосредственное продолжение [8,9]. Во втором параграфе мы рассматриваем решения разностных уравнений в РКП для феноменологических потенциалов, получаемых из теории поля. В § 3 с помощью функций Грина формулируем однородные интегральные уравнения для ВФ в конфигурационном представлении. В четвертом параграфе изучаем аналогичные решения квазипотенциального уравнения, возникающего при проецировании на положительночастотные состояния или в диаграммной технике Кадышевского.

§ 2. Разностные уравнения в релятивистском конфигурационном представлении (РКП)

Локальное квазипотенциальное уравнение в РКП, отвечающее (I.I), можно сформулировать в том случае, когда квазипотенциал $V(\overset{\circ}{\vec{p}},\overset{\circ}{\vec{k}};E)$ зависит не по отдельности от угловых переменных векторов $\overset{\circ}{\vec{p}}$ и $\overset{\circ}{\vec{k}}$, а от комбинации

$$\vec{\Delta}_{\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{k}} \equiv \overset{\circ}{\vec{p}}(-)\overset{\circ}{\vec{k}} = \overset{\circ}{\vec{p}} - \frac{\overset{\circ}{\vec{k}}}{m}\left(\overset{\circ}{p}_0 - \frac{\overset{\circ}{\vec{p}}\overset{\circ}{\vec{k}}}{\overset{\circ}{k}_0+m}\right), \tag{2.I}$$

которая есть не что иное, как разность двух векторов в трехмерном пространстве Лобачевского [4,5]. Известно, что квазипотенциалы однобозонного обмена на энергетической поверхности (ЭП) зависят именно от такого вектора (2.I) [4,5]. При этом произвол в продолжении квазипотенциала за ЭП сводится к изменению лишь формы уравнения (I.I). В работах[8,9] был изучен в импульсном представлении квазипотенциал

$$V(\mathring{\vec p},\mathring{\vec k};E) = \frac{4m^2 g^2}{(\mathring{\vec p}(-)\mathring{\vec k})^2} N(E_{\mathring p},E_{\mathring k};E) = 4m\,\widetilde{V}_0(\mathring{\vec p}(-)\mathring{\vec k})\,N(E_{\mathring p},E_{\mathring k};E), \quad (2.2)$$

который на ЭП $E_{\mathring p} = E_{\mathring k} = E$ есть простая суперпозиция двух пропагаторов, а множитель $N(E_{\mathring p},E_{\mathring k};E)$, равный на ЭП единице, управляет формой квазипотенциала при его продолжении за ЭП.

Выбор для N вида $N_I(E_{\mathring p},E_{\mathring k};E) = E_{\mathring k}/E$ приводит к уравнению, совпадающему по форме с уравнением Шредингера. Мы рассмотрим также и множитель в виде $N_{II}(E_{\mathring p},E_{\mathring k};E) = E_{\mathring p}/E$ x). При этом выражение $\widetilde{V}_0(\mathring{\vec p}(-)\mathring{\vec k}) = mg^2/(\mathring{\vec p}(-)\mathring{\vec k})^2$ является чисто локальным в пространстве Лобачевского и может рассматриваться как геометрическое обобщение кулоновского взаимодействия в квантовой механике. В [9] рассматривалось также уравнение (I.I) с квазипотенциалом

$$V(\mathring{\vec p},\mathring{\vec k};E) = 4m\,\widetilde{V}_0(\mathring{\vec p}(-)\mathring{\vec k})\,N_{II}(E_{\mathring p},E_{\mathring k};E), \quad (2.3)$$

в котором, как будет ясно ниже, вторая часть отвечает отталкиванию на малых расстояниях. Здесь мы рассмотрим разностные уравнения в РКП, отвечающие выбору (2.2) или (2.3).

РКП вводится [4,5] посредством разложения ВФ и квазипотенциала по релятивистским "плоским волнам", т.е. по функциям

$$\xi(\vec p,\vec r) = \left(\frac{\mathring p_0 - \vec{\mathring p}\cdot\vec n}{m}\right)^{-1-imr} ; \quad \vec r = \vec n r, \quad (2.4)$$

реализующим унитарные представления группы Лоренца [10]. В (2.4) $\vec r^{\,2} = r^2$, при этом r является релятивистским инвариантом [11] и рассматривается как релятивистское обобщение относительной координаты [4,5]. Преобразования с функциями (2.4) имеют вид

$$\Psi(\mathring{\vec p}) = \int \overset{*}{\xi}(\mathring{\vec p},\vec r)\Psi(\vec r)\,d\vec r \;;\; \Psi(\vec r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\mathring{\vec p},\vec r)\Psi(\mathring{\vec p})\frac{m\,d\mathring{\vec p}}{E_{\mathring p}}, \quad (2.5)$$

$$\widetilde{V}_0(\mathring{\vec p}(-)\mathring{\vec k}) = \int \overset{*}{\xi}(\mathring{\vec p},\vec r)\,\widehat{V}(r)\,\xi(\mathring{\vec k},\vec r)\,d\vec r \;;$$
$$\widehat{V}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\vec\Delta,\vec r)\,\widetilde{V}_0(\vec\Delta)\frac{m\,d\vec\Delta}{\sqrt{m^2+\vec\Delta^2}} . \quad (2.6)$$

---

x) В обоих этих случаях условие двухчастичной унитарности для амплитуды рассеяния, уравнение для которой используется для построения квазипотенциала, имеет нерелятивистский вид [3,5,8].

Зависимость в первой из формул (2.6) величины $\widehat{V}$ только от вектора $\mathring{\vec p}(-)\mathring{\vec k}$ следует из теоремы сложения плоских волн (2.4)[4]. Отметим, что для случая центрально-симметричных ВФ $\Psi(\mathring{\vec p}) = \Psi(\mathring p)$ преобразования (2.5) принимают вид

$$\mathring p\,\Psi(\mathring p) = 4\pi\int_0^\infty \sin(mr\chi_p)\,r\Psi(r)\,dr \;;\; r\Psi(r) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \sin(mr\chi_p)\,\mathring p\,\Psi(\mathring p)\,m\,d\chi_p . \quad (2.7)$$

При этом переменная "быстрота" определяется из $E_{\mathring p} = m\,ch\chi_p$, $\vec{\mathring p} = m\,sh\chi_p\,\vec n_p$ и аналогично для других импульсов, а взаимная обратность формул (2.7) очевидна. Как было показано в [4], функции (2.4) удовлетворяют уравнению ($\hat H_0$ – "свободный гамильтониан")

$$\hat H_0\,\xi(\vec p,\vec r) = 2\sqrt{m^2+\vec p^{\,2}}\;\xi(\vec p,\vec r),$$

$$\hat H_0 = 2m\,ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) + \frac{2i}{r}\,sh\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) - \frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{r^2}\exp\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right), \quad (2.8)$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ – угловая часть оператора Лапласа. Релятивистская инвариантность оператора $\hat H_0$ была доказана в [11].

Уравнение (I.I) с квазипотенциалом (2.2) в случае выбора N_I и N_{II} принимает в РКП соответственно вид

$$\left[\left(\frac{\hat H_0}{2}\right)^2 - E^2\right]\Psi_I(\vec r) = -\widehat{V}(r)\,\frac{\hat H_0}{2E}\,\Psi_I(\vec r), \quad (2.9)$$

$$\left[\left(\frac{\hat H_0}{2}\right)^2 - E^2\right]\Psi_{II}(\vec r) = -\frac{\hat H_0}{2E}\,\widehat{V}(r)\,\Psi_{II}(\vec r), \quad (2.10)$$

причем потенциалу $\widetilde{V} = \frac{g^2 m}{(\vec p(-)\vec k)^2}$ отвечает в РКП согласно[8] выражение

$$\widehat{V}(r) = -m\,\frac{g^2}{4\pi r}\,th\left(\frac{\pi r m}{2}\right). \quad (2.11)$$

Для центрально-симметричного случая $\Psi(\vec r) = \Psi(r)$ уравнение (2.8) превращается в

$$2m\,ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)\sin(\chi_p m r) = 2m\,ch\chi_p\,\sin(\chi_p m r), \quad (2.12)$$

а уравнение (2.9) имеет вид

$$\left[m^2 ch^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) - E^2\right] r\Psi_I(r) = -\widehat{V}(r)\,\frac{m}{E}\,m\,ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) r\Psi_I(r) \quad (2.13)$$

и аналогичный для (2.10). Условие нормировки ВФ $\Psi_I(\vec r)$ и $\Psi_{II}(\vec r)$, в соответствии с полученным в[9] условием нормировки ВФ в импульсном представлении, имеет вид

$$\int \overset{*}{\Psi}{}^{(n)}_{I,II}(\vec r)\left[3E_n^2 - \left(\frac{\hat H_0}{2}\right)^2\right]\Psi^{(n)}_{I,II}(\vec r)\,d\vec r = 2mE_n , \quad (2.14)$$

так что ВФ имеет размерность /8/ $[\Psi_{I,II}(\vec{r})]=m^{3/2}$. Волновые функции $r\,\Psi_I^{(n)}(r)$ были получены в /8/ путем преобразования (2.7) найденных там ВФ в импульсном представлении. Приведем здесь только ВФ основного состояния:

$$r\,\Psi_I^{(1)}(r)=\frac{C_I^{(1)}}{4\pi m^2}\,\frac{1}{2\sin x_1\cos^2 x_1}\left[rm\,\frac{ch(y_1 mr)}{ch(\frac{\pi}{2}mr)}-tg\,x_1\,\frac{sh(y_1 mr)}{ch(\frac{\pi}{2}mr)}\right], \tag{2.15}$$

где $\sin 2x_1=g^2/4\pi$; энергия параметризуется согласно формуле $E_1=m\cos x_1$, $y_1=\frac{\pi}{2}-x_1$. Легко показать, что уравнению (2.10) с потенциалом (2.11), т.е. уравнению

$$\left[m^2 ch^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)-m^2\cos^2 x\right]r\,\Psi_{II}(r)=m\,ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)\frac{g^2}{\cos x\cdot 4\pi r}\,th\left(\frac{\pi r m}{2}\right)r\,\Psi(r), \tag{2.16}$$

удовлетворяет функция

$$r\,\Psi_{II}^{(1)}(r)=\frac{C_{II}^{(1)}}{4\pi m}\left(-\frac{d}{d\sin^2 x}\right)\frac{ch(ymr)}{sh(\frac{\pi}{2}mr)}=\frac{C_{II}^{(1)}\cdot mr}{4\pi m\,\sin 2x}\,\frac{sh(ymr)}{sh(\frac{\pi}{2}mr)}, \tag{2.17}$$

$$y=\pi/2-x$$

как ВФ основного состояния, при условии, что $x=x_1=\frac{1}{2}\cdot\arcsin\frac{g^2}{4\pi}$.

Будем искать для уравнения (2.10) ВФ n - го состояния в виде

$$r\,\Psi_{II}^{(n)}(r)=\sum_{\ell=1}^{n}B_\ell^{(n)}\,\frac{(-\sin^2 x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left[\frac{d}{d\sin^2 x}\right]^{\ell-1}\frac{1}{\sin 2x}\,mr\,\frac{sh(ymr)}{sh(\frac{\pi}{2}mr)}, \tag{2.18}$$

где $B_\ell^{(n)}$ - неопределенные коэффициенты. Правая часть уравнения (2.10) с функцией (2.18) принимает вид

$$\frac{m^2 g^2}{4\pi\cos x}\left\{\sum_{\ell=1}^{n}B_\ell^{(n)}\,\frac{(-\sin^2 x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left[\frac{d}{d\sin^2 x}\right]^{\ell-1}\right\}\frac{1}{2\sin x}\,\frac{ch(ymr)}{sh(\frac{\pi}{2}mr)}. \tag{2.19}$$

Левую часть (2.10) преобразуем, используя коммутатор

$$\left[m^2 ch^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)-m^2\cos^2 x\,,\ \sum_{\ell=1}^{n}B_\ell^{(n)}\,\frac{(-\sin^2 x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^{\ell-1}\right]=$$

$$=m^2\sum_{\ell=1}^{n}B_\ell^{(n)}\,\frac{(-\sin^2 x)^{\ell-1}}{(\ell-2)!}\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^{\ell-2}. \tag{2.20}$$

Приходим, таким образом, к равенству

$$m^2\sum_{\ell=1}^{n}\ell\,B_\ell^{(n)}\,\frac{(-\sin^2 x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^{\ell-1}\cdot\frac{ch(ymr)}{sh(\frac{\pi}{2}mr)}= \tag{2.21}$$

$$=\frac{m^2 g^2}{4\pi\cos x}\left\{\sum_{\ell=1}^{n}B_\ell^{(n)}\,\frac{(-\sin^2 x)^{\ell}}{(\ell-1)!}\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^{\ell-1}\right\}\frac{1}{2\cos x}\,\frac{ch(ymr)}{sh(\frac{\pi}{2}mr)}\cdot,$$

которое должно удовлетворяться тождественно. Проводя в правой части (2.19) дифференцирование произведения с помощью формулы Ньютона-Лейбница,

$$\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^{\ell-1}\frac{1}{\sin x}\,\frac{ch(ymr)}{sh(\frac{\pi}{2}mr)}=\sum_{m=0}^{\ell-1}\frac{(\ell-1)!}{m!(\ell-m-1)!}\left[\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^{\ell-1-m}\frac{1}{\sin x}\right]\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^{m}\frac{ch(yrm)}{sh(\frac{\pi}{2}rm)}, \tag{2.22}$$

и изменяя затем порядок суммирования, заключаем, что коэффициенты $B_\ell^{(n)}$ должны удовлетворять алгебраической системе уравнений:

$$\ell\,B_\ell^{(n)}=\frac{g^2}{4\pi\sin 2x}\sum_{k=\ell}^{n}B_k^{(n)}\,\frac{(2k-2\ell-1)!!}{(k-\ell)!\,2^{k-\ell}}\ ;\quad \ell=1,2,\dots n. \tag{2.23}$$

Аналогичная система была уже нами рассмотрена в /8/. Поэтому, обозначая

$$n\,B_n^{(n)}=\frac{1}{4\pi m}\,C_{II}^{(n)}\,\frac{1}{4^n}$$

и следуя /8/, мы приходим к выводу, что

$$r\,\Psi_{II}^{(n)}(r)=C_{II}^{(n)}\,\frac{1}{4\pi m}\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell-1}\,\frac{\Gamma(n+\ell)\,4^\ell}{\Gamma(2\ell)\Gamma(n+1-\ell)}\,\frac{(-\sin^2 x)^{\ell-1}}{\ell!}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^{\ell}\frac{ch(ymr)}{sh(\frac{\pi}{2}mr)}, \tag{2.24}$$

где после всех дифференцирований необходимо положить $y=\pi/2-x$,

$$x=x_n=\frac{1}{2}\arcsin\frac{g^2}{4\pi n}, \tag{2.25}$$

а коэффициент $C_{II}^{(n)}$ фиксируется условием (2.14).

Изложенный метод построения ВФ n -го состояния с известной ВФ основного состояния можно применять и для других квазипотенциалов. Рассмотрим, например, уравнение (2.16), заменив в нем $\frac{g^2}{4\pi r}th\left(\frac{\pi r m}{2}\right)$ на потенциал[x] $\frac{g^2}{4\pi r}cth\left(\frac{\pi r m}{2}\right)$.

x) Этот потенциал наряду с (2.11) также является простой суперпозицией квазипотенциалов однобозонного обмена, имеющей в импульсном пространстве вид (на ЭП) $V(\vec{p},\vec{k};E)=\{-(p-k)^{-2}+[4m^2-(p-k)^2]^{-1}\}$.

Нетрудно показать, что ВФ основного состояния в этом случае будет аналогична (2.17):

$$r\Psi^{(1)}(r) = \frac{C^{(1)}}{4\pi m}\left(-\frac{d}{d\sin^2\chi}\right)\frac{ch(\gamma mr)}{ch\left(\frac{\pi}{2}mr\right)} = \frac{C^{(1)}}{4\pi m}\,\frac{mr}{\sin 2\chi}\,\frac{sh(\gamma mr)}{ch\left(\frac{\pi}{2}mr\right)} \cdot \qquad (2.26)$$

Применяя затем метод неопределенных коэффициентов, т.е. представляя ВФ n -го состояния в виде, аналогичном (2.18), приходим к условию квантования $(E_n = m\cos\chi_n)$: $\sin 2\chi_n = g^2/4\pi n$, совпадающему с условием квантования (2.25), и к волновым функциям

$$r\Psi^{(n)}(r) = C^{(n)}\frac{1}{4\pi m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\Gamma(n+k)\,4^k}{\Gamma(2k)\Gamma(n+1-k)}\cdot$$
$$\cdot\frac{(-\sin^2\chi)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{d}{d\sin^2\chi}\right)^k\frac{ch(\gamma mr)}{ch\left(\frac{\pi}{2}mr\right)}\,. \qquad (2.27)$$

Рассмотрим теперь разностное уравнение, отвечающее (I.I) , с квазипотенциалом, который в импульсном представлении задается формулой (2.3). Это уравнение имеет вид (для $\ell = 0$)

$$\left[m^2 ch^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) - m^2\cos^2\chi\right] r\Psi(r) =$$
$$= \frac{m}{E}\left\{m\,ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)\frac{g^2}{4\pi r}\,th\left(\frac{\pi r m}{2}\right) - \frac{2\varkappa^2}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{r^2}\right\} r\Psi(r)\,, \qquad (2.28)$$

так что слагаемое $\sim r^{-2}$ в правой части (2.28) отвечает отталкиванию на малых расстояниях. В результате непосредственной подстановки нетрудно убедиться, что решением (2.28) является функция (она может быть получена и с использованием известного вида ВФ в импульсном представлении /9/)

$$r\Psi(r) = C\,(rm)^2\,\frac{ch(\gamma rm)}{sh\left(\frac{\pi}{2}mr\right)} \qquad (2.29)$$

при выполнении условия квантования $8\pi\sin 2\chi = g^2$ и условия, налагаемого на константу $\varkappa$: $\varkappa = 2\pi$. Используя затем изложенный выше метод неопределенных коэффициентов, можно построить ВФ возбужденных состояний.

Таким образом, мы видим, что для нахождения волновых функций и условия квантования важным моментом является знание ВФ основного состояния. Один из методов ее нахождения в случае некоторых потенциалов будет изложен в нашей другой работе.

§ 3. Интегральные уравнения в релятивистском конфигурационном представлении

Разностные уравнения для ВФ (2.9) или (2.I0) по существу являются дифференциальными уравнениями бесконечного порядка, поэтому их решения определяются с точностью до i – периодических функций, которые в принципе определяются граничными условиями. Мы сформулируем здесь уравнения для ВФ в конфигурационном представлении в виде, свободном от неоднозначности. Эти уравнения, как и в импульсном представлении, являются однородными интегральными уравнениями. Проще всего прийти к ним исходя из уравнений в импульсном представлении. Запишем (I.I) с квазипотенциалом (2.2) (где, напомним, тильдой отмечена часть потенциала, локальная в импульсном пространстве Лобачевского) в виде

$$\Psi(\mathring{\vec p}) = -\frac{1}{E_p^2 - E^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int\tilde{V}_0\left(\mathring{\vec p}(-)\mathring{\vec k}\right)N_I(E_k,E)\,\Psi(\mathring{\vec k})\,\frac{m\,d\mathring{\vec k}}{\sqrt{m^2+\mathring{\vec k}^2}}\,. \qquad (3.I)$$

Применив к этому уравнению преобразования (2.5) и (2.6), приходим к следующему однородному интегральному уравнению для ВФ $\Psi(\vec r)$:

$$\Psi(\vec r) = -\int G_0(E;\vec r,\vec r')\,\tilde{V}(r')\,\frac{\hat{H}_0'}{2E}\,\Psi(\vec r')\,d\vec r'\,. \qquad (3.2)$$

При этом функция Грина для связанных состояний определяется как /4,5/

$$G_0(E;\vec r,\vec r') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\xi(\mathring{\vec p},\vec r)\,\frac{1}{E_p^2-E^2}\,\xi(\mathring{\vec p},\vec r')\,\frac{m\,d\mathring{\vec p}}{\sqrt{m^2+\mathring{\vec p}^2}} \qquad (3.3)$$

и удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2}\right)^2 - E^2\right]G_0(E;\vec r,\vec r') = \delta(\vec r-\vec r')\,. \qquad (3.4)$$

Для задачи о связанных состояниях, когда $E < m < E_p$, особенность при интегрировании в (3.3) по $d|\mathring{\vec p}|$ отсутствует. Разумеется, нахождение решений уравнения (3.2) представляет собой не менее сложную задачу, чем решение уравнений (I.I) или (2.9)-(2.I0). Однако уравнение (3.2) можно упростить, если интересоваться парциальными ВФ. При этом мы выбираем наиболее простой центрально-симметричный (орбитальный момент связанной системы двух частиц равен нулю) случай. Используем для "плоских волн" (2.4) известную формулу /4,5/

$$\xi(\mathring{\vec p},\vec r) = \frac{1}{rm\,sh\chi_p}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,i^\ell\,S_\ell(r,\chi_p)\,P_\ell\left(\frac{\vec r}{|\vec r|}\cdot\frac{\mathring{\vec p}}{|\mathring{\vec p}|}\right), \qquad (3.5)$$

где явный вид функций $S_\ell(r,\chi_p)$ приведен, например, в /5/. В частности, $S_0(r,\chi_p) = \sin(mr\chi_p)$.

Тогда для функции Грина (3.3) можем написать парциальное разложение

$$G_0(E;\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi r r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, g_\ell(y;r,r')\, P_\ell\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r\cdot r'}\right), \qquad (3.6)$$

где функции $g_\ell(y;r,r')$ (напомним, что $E = m\sin y;\ y = \frac{\pi}{2} - x$) есть

$$g_\ell(y;r,r') = \int_0^\infty S_\ell(rm\chi_p)\, \frac{m\, d\chi_p}{m^2 ch^2\chi_p - m^2\cos^2 x}\, S_\ell(r'm\chi_p), \qquad (3.7)$$

так что

$$g_0(y;r,r') = \frac{\pi}{2m\sin 2x}\left\{\frac{sh[ym(r-r')]}{sh[\frac{\pi}{2}m(r-r')]} - \frac{sh[ym(r+r')]}{sh[\frac{\pi}{2}m(r+r')]}\right\}. \qquad (3.8)$$

Для центрально-симметричных ВФ мы приходим, таким образом, вместо (3.2) к уравнению

$$r\Psi(r) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_0(y;r,r')\,\tilde{V}(r')\,\frac{1}{\cos x}\, ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr'}\right) r'\Psi(r')\, dr'. \qquad (3.9)$$

Это уравнение содержит в себе граничные условия для функции $r\Psi(r)$. Так, из явного вида (3.8) следует, что $r\Psi(r)|_{r=0} = 0$, а при больших r функция $r\Psi(r)$ должна убывать экспоненциально.

Переход от одной, интегральной формы записи уравнения в РКП (3.9), к другой, разностной (2.I3), осуществляется с помощью формулы

$$\left[m^2 ch^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) - m^2\sin^2 y\right] g_0(y;r,r') = \frac{\pi}{2}\,\delta(r-r'), \qquad (3.10)$$

которая следует x) из интегрального представления (3.7). Уравнение (3.9) наряду с (3.8) можно использовать для нахождения точных либо приближенных ВФ. Так, например, для потенциала $\tilde{V}(r)$, задаваемого формулой (2.II), подстановка в уравнение (3.9) уже известной нам ВФ основного состояния (2.I5) с использованием ее нечетности приводит к равенству (мы опускаем несущественную постоянную)

---

x) Действие оператора $m^2 ch^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)$ на функцию $g_0(y;r,r')$ определяется, как предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} ch^2\left[\frac{i}{m}(1-\varepsilon)\frac{d}{dr}\right] g_0(y;r,r').$$

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\sin y}\,\frac{sh(yrm)}{ch(\frac{\pi}{2}rm)}\right] = \frac{-g^2}{4\pi\sin 2y\sin y}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sh(my(r-r'))}{sh(m\frac{\pi}{2}(r-r'))}\cdot\frac{sh(myr')}{ch(\frac{\pi}{2}mr')}\,dr', \qquad (3.II)$$

которое при $x = \frac{1}{2}\arcsin g^2/4\pi$ выполняется тождественно.

Далее, с использованием уравнения (3.9) можно строить ВФ возбужденных состояний аналогично тому, как это делалось для разностных уравнений.

Легко видеть, что подробно рассмотренному нами разностному уравнению (2.I0) отвечает интегральное уравнение, отличающееся от (3.9) перестановкой $\tilde{V}(r')$ и оператора $ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr'}\right)$ под интегралом. В этом случае, однако, возможна формулировка интегрального уравнения в РКП в другом виде. Действительно, уравнению (2.I0) соответствует в импульсном представлении уравнение, которое мы запишем в виде

$$\Psi(\vec{\mathring{p}}) = -\frac{E_{\mathring{p}}}{E_{\mathring{p}}^2 - E^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3 E}\int \tilde{V}(\vec{\mathring{p}}(-)\vec{\mathring{k}})\,\Psi(\vec{\mathring{k}})\,\frac{m\, d\vec{\mathring{k}}}{\sqrt{m^2+\vec{\mathring{k}}^2}}. \qquad (3.I2)$$

Если теперь

$$G_0^{\text{II}}(E;\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\vec{\mathring{p}},\vec{r})\,\frac{E_{\mathring{p}}}{E(E_{\mathring{p}}^2 - E^2)}\,\xi^*(\vec{\mathring{p}},\vec{r}\,')\,\frac{m\, d\vec{\mathring{p}}}{\sqrt{m^2+\vec{\mathring{p}}^2}}, \qquad (3.I3)$$

то в полной аналогии с тем, как это было проделано выше, для центрально-симметричного случая получим уравнение

$$r\Psi(r) = -\int_0^\infty g_0^{\text{II}}(y;r,r')\,\tilde{V}(r')\,r'\Psi(r')\,dr', \qquad (3.I4)$$

где парциальное разложение для $G_0^{\text{II}}(E;\vec{r},\vec{r}\,')$ дает при $\ell = 0$

$$g_0^{\text{II}}(y;r,r') = \frac{\pi}{2\sin 2x\,\sin y}\left\{\frac{ch[ym(r-r')]}{ch[\frac{\pi}{2}m(r-r')]} - \frac{ch[ym(r+r')]}{ch[\frac{\pi}{2}m(r+r')]}\right\}. \qquad (3.I5)$$

Уравнение (3.I4) также может быть использовано для построения ВФ в конфигурационном представлении. В частности, нетрудно убедиться, что уже известная ВФ (2.I7) для потенциала (2.II) обращает (3.I4) в тождество. Отметим, что уравнение (3.I4) в случае, когда аналитический вид ВФ дается нечетной функцией, а потенциал является четным $\left(\tilde{V}(r) = \tilde{V}(-r)\right)$, упрощается и принимает вид

$$r\Psi(r) = -\frac{1}{\sin 2x \cos x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ch[y m(r-r')]}{ch[\frac{\pi}{2} m(r-r')]}\,\tilde{V}(r')\,r'\Psi(r')\,dr' , \qquad (3.16)$$

в результате чего вычисление интегралов в правой части может быть выполнено с помощью теории вычетов. В противном случае, т.е. когда ВФ выражается через четные функции, вычисление интеграла в (3.16) затруднено.

§ 4. Решения уравнения, спроецированного на положительночастотные состояния

Уравнение Логунова-Тавхелидзе (1.1) получено для системы двух скалярных частиц. В случае частиц со спином 1/2 квазипотенциальное уравнение приходится проецировать на положительночастотные состояния. После чего оно имеет вид /12,13,14/

$$(2E_{\mathring{p}} - 2E)\,\Psi(\vec{\mathring{p}}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int V(\vec{\mathring{p}},\vec{\mathring{k}};E)\,\Psi(\vec{k})\,\frac{m\,d\vec{\mathring{k}}}{\sqrt{m^2+\vec{\mathring{k}}^2}} . \qquad (4.1)$$

Уравнение (4.1) может быть также получено в ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля /3,14/. В случае, когда квазипотенциал $V(\vec{\mathring{p}},\vec{\mathring{k}};E)$ является локальным в импульсном пространстве Лобачевского или имеет вид

$$V(\vec{\mathring{p}},\vec{\mathring{k}};E) = \tilde{V}_0(\vec{\mathring{p}}(-)\vec{\mathring{k}})\,N(E_{\mathring{p}},E_{\mathring{k}},E) , \qquad (4.2)$$

где $N(E_{\mathring{p}},E_{\mathring{k}},E)$ – простые функции своих аргументов, аналогичные рассмотренным ранее, уравнение (4.1) может быть сформулировано в виде дифференциально-разностного уравнения в РКП с помощью преобразования (2.5). В работе /9/ было рассмотрено уравнение (4.1) с модельным квазипотенциалом

$$V(\vec{\mathring{p}},\vec{\mathring{k}};E) = \frac{g^2}{(\Delta^0_{\mathring{p},\mathring{k}} - m)}\sqrt{\frac{E_{\mathring{p}}+m}{2m\,\Delta^0_{\mathring{p},\mathring{k}}+2m}} . \qquad (4.3)$$

Соответствующее этому случаю разностное уравнение для центрально-симметричной ВФ имеет вид

$$\left[2m\,ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)-2E\right]r\Psi(r) = ch\left(\frac{i}{2m}\frac{d}{dr}\right)\frac{g^2}{4\pi r}\,th(\pi r m)\,r\Psi(r) , \qquad (4.4)$$

так что оно простым образом связано с уравнением (2.16). Следовательно, его решения могут быть без труда выписаны. Приведем здесь только ВФ основного состояния (ненормированную):

$$r\Psi(r) = C\,r\,\frac{sh[(\pi-x)mr]}{sh[\pi m r]} , \qquad (4.5)$$

где, как и прежде, энергия параметризуется согласно $E = m\cos x$, причем условие квантования дает $g^2 = 16\pi\sin\frac{x}{2}$, т.е. $2E = 2m - \left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2\frac{m}{4}$. Аналогично уравнение (4.1) с квазипотенциалом

$$V(\vec{\mathring{p}},\vec{\mathring{k}};E) = \frac{g^2}{\Delta^0_{\mathring{p},\mathring{k}} - m}\sqrt{\frac{E_{\mathring{p}}+m}{E+m}} , \qquad (4.6)$$

который на ЭП, где $\sqrt{E_{\mathring{p}}+m}=\sqrt{E+m}$, является просто амплитудой обмена безмассовым мезоном:

$$\frac{g^2\cdot 2m}{2m\,\Delta^0_{\mathring{p},\mathring{k}} - 2m^2} = \frac{g^2\cdot 2m}{(p-k)^2} ,$$

в релятивистском конфигурационном представлении имеет вид (центрально-симметричный случай)

$$\left[2m\,ch\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)-2E\right]r\Psi(r) = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\,ch\left(\frac{i}{2m}\frac{d}{dr}\right)\frac{g^2}{4\pi r}\,cth(\pi r m)\,r\Psi(r) . \qquad (4.7)$$

Легко видеть, что ВФ основного состояния в этом случае является (по аналогии с (2.20))

$$r\Psi(r) = C\,r\,\frac{sh[(\pi-x)mr]}{ch(\pi m r)} , \qquad (4.8)$$

где $E = m\cos x = m\sqrt{1-\left(\frac{g^2}{8\pi}\right)^2}$, а ВФ возбужденных состояний также легко могут быть построены, причем условием квантования в общем случае является условие $E_n = m\sqrt{1-\left(\frac{g^2}{8\pi n}\right)^2}$. Отметим также, что ВФ (4.5) и (4.8) в нерелятивистском пределе переходят в кулоновскую ВФ основного состояния.

Совершенно аналогично могут быть получены решения уравнений типа (4.4), (4.5) для других потенциалов, соответствующих найденным выше решениям уравнения Логунова-Тавхелидзе, а также построены однородные интегральные уравнения для ВФ, аналогичные уравнениям (3.2), (3.8) (3.14).

§ 5. Заключение

Итак, нами рассмотрены две формулировки квазипотенциальных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении: формулировка в виде разностных уравнений (2.9), (2.10),(2.13) и формулировка в виде однородных интегральных уравнений (3.2) , (3.9) с помощью функций Грина (3.3) и (3.7). Для некоторых потенциалов построены ВФ основных и возбужденных состояний. Полученные решения могут быть использованы для феноменологического описания релятивистской двухчастичной системы (нахождение формфакторов, ширин) распадов и структурных функций.

В заключение авторы выражают благодарность В.Г. Кадышевскому, С.П. Кулешову, А.Д. Линкевичу, Н.В. Максименко и В.И. Саврину за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

I. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim.,1963,v.29, N 2, p. 380-400.
2. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. В кн.: "Проблемы теоретической физики" (Сб., посвященный Н.Н.Боголюбову в связи с его 60-летием). М., "Наука", 1969, стр. 261-277.
3. Kadyshevsky V.G. Nucl. Phys., 1968, v.B6, N I, p. 125-148.
4. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasomov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cim., 1968, v. 55A, p. 233-257.
5. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЭЧАЯ, 1972, т. 2, № 3, с. 638-690.
6. Широков Ю.М. ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 4, стр. 1005-1013.
7. Faustov R.N. Annals of Phys., 1973, v.78, N I, p. 176-189.
8. Kapshay V.N., Skachkov N.B. JINR E2-81-618, Dubna, 1981.
9. Капшай В.Н., Скачков Н.Б. ОИЯИ, Е2-12919, Дубна, 1979.
10. Шапиро И.С. ДАН СССР, 1956, т. 106, № 6, стр. 647-649.
11. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ТМФ, 1979, т.41, № 2, с. 205-219.
12. Kvinikhidze A.N., Stoyanov D.Ts. JINR E2-5746, Dubna, 1971.
13. Логунов А.А., Саврин В.И., Тюрин Н.Е., Хрусталев О.А. ТМФ, 1971, т. 6, № 2, стр. 654-662.
14. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cim., 1968, v.55A, N 2, p. 276-300.

Рукопись поступила в издательский отдел
I марта 1982 года.

Капшай В.Н., Скачков Н.Б. Р2-82-163

Ковариантные двухчастичные волновые функции для модельных квазипотенциалов, допускающих точные решения. Решения в релятивистском конфигурационном представлении.

Для волновой функции относительного движения связанной системы двух релятивистских частиц рассмотрены две формулировки квазипотенциальных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении. Для некоторых модельных квазипотенциалов найдены точные решения этих уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Kapshay V.N., Skachkov N.B. P2-82-163

Covariant Two-Particle Wave Functions for Model Quasipotential Allowing Exact Solutions. Solutions in the Relativistic Configurational Representation.

Two formulations of quasipotential equations in the relativistic configurational representation are considered for the wave function of relative motion of a bound state of two relativistic particles. Exact solutions of these equations are found for some model quasipotentials.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.