объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

2624/82 7/6-82

Р2-82-157

Н.С.Шавохина

ОДНОМЕРНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ТЕЛ С ПОСТОЯННОЙ ПО МОДУЛЮ СИЛОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Направлено в журнал "Известия вузов. Физика"

1982

В работах /1-3/ задача о движении двух тел с постоянной по модулю силой взаимодействия представлена как задача о нахождении двумерной минимальной поверхности в пространственно-временном мире, ограниченной двумя асимптотическими линиями постоянной кривизны. Эти линии суть мировые траектории рассматриваемых тел. По соединяющей их минимальной поверхности передается взаимодействие между телами. Подчеркнем, что мировые траектории являются времениподобными линиями. Геометрия мира задается по Клейну либо группой Галилея /в нерелятивистском случае/, либо группой Пуанкаре /в релятивистском случае/. Применяемые здесь координаты x^α, $\alpha = 0,1,2,3$ - это обычные декартовы координаты $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = y$ и время $x^0 = t$ в какой-нибудь инерциальной системе отсчета.

В мире с группой Галилея минимальная поверхность является линейчатой поверхностью, а граничные условия эквивалентны уравнениям Ньютона для двух тел с постоянной по модулю силой взаимодействия, а именно:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = G\,\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}\,, \qquad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = G\,\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\,, \qquad /1/$$

где G - константа взаимодействия. Значения $G>0$ соответствуют притяжению тел, а значения $G<0$ - отталкиванию.

В мире с группой Пуанкаре минимальная поверхность является поверхностью переноса:

$$x^\alpha = U^\alpha(u) + V^\alpha(v)\,, \qquad /2/$$

на которой параметры u, v изотропны. Последнее означает, что

$$(a,a) = 0, \qquad (b,b) = 0, \qquad /3/$$

где $a^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u}$, $b^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial v}$, а скалярный квадрат понимается в смысле метрики:

$$ds^2 = (dx,\ dx) = \eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = dt^2 - \frac{d\vec{r}^{\,2}}{c^2}\,.$$

Здесь и далее c - скорость света. Формулы /2/ и /3/ называют формулами Монжа. Мировые траектории взаимодействующих тел задаются уравнениями

$$p_1^\alpha = m_1 \frac{dx_1^\alpha}{d\tau_1} = \frac{G}{c}\,[\,U^\alpha(u_1(\tau_1)) - V^\alpha(v_1(\tau_1))\,] + \mathcal{P}_1^\alpha\,,$$
$$p_2^\alpha = m_2 \frac{dx_2^\alpha}{d\tau_2} = \frac{G}{c}\,[\,V^\alpha(v_2(\tau_2)) - U^\alpha(u_2(\tau_2))\,] + \mathcal{P}_2^\alpha\,, \qquad /4/$$

где τ_1 и τ_2 - собственные времена тел; G - та же, что и в /1/ константа взаимодействия; m_1 и m_2 - те же, что и в /1/, массы покоя; $\mathcal{P}_1^\alpha$ и $\mathcal{P}_2^\alpha$ - постоянные интегрирования. Сохраняющаяся величина $\mathcal{P}^\alpha = \mathcal{P}_1^\alpha + \mathcal{P}_2^\alpha$ является 4-импульсом рассматриваемой системы. Введем также обозначения: $\mathcal{P}_1^0 = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{P}_2^0 = \mathcal{E}_2$, $\mathcal{P}^0 = \mathcal{E}$ и $E_1 = (\mathcal{E}_1 - m_1)c^2$, $E_2 = (\mathcal{E}_2 - m_2)c^2$, $E = E_1 + E_2 = (\mathcal{E} - m_1 - m_2)c^2$. Между импульсами p_1^α и p_2^α частиц и их массами m_1 и m_2 сохраняются специфические для релятивистской механики соотношения:

$$p_1^0 = \sqrt{m_1^2 + \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{c^2}}\,, \qquad p_2^0 = \sqrt{m_2^2 + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{c^2}}\,. \qquad /5/$$

Наряду с 4-импульсом сохраняется бивектор момента

$$\mathfrak{M}^{\alpha\beta} = [\,x_1^\alpha p_1^\beta - x_1^\beta p_1^\alpha\,] + [\,x_2^\alpha p_2^\beta - x_2^\beta p_2^\alpha\,] +$$
$$+ \frac{G}{c}\int [\,(U^\alpha + V^\alpha)\,d(U^\beta - V^\beta) - (U^\beta + V^\beta)\,d(U^\alpha - V^\alpha)\,]\,, \qquad /6/$$

где интеграл берется по линии, лежащей на минимальной поверхности и соединяющей первое тело со вторым. В качестве такой линии можно взять пересечение минимальной поверхности с гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$. При таком выборе кривой интегрирования компоненты $\mathfrak{M}^{k0}$ $(k,n = 1,2,3)$ равны

$$\mathfrak{M}^{k0} = -\mathcal{P}^k t + x_1^k p_1^0 + x_2^k p_2^0 + \frac{G}{c}\int (U^k + V^k)\,d\,(U^0 - V^0)\,. \qquad /7/$$

В пределе $c \to \infty$ приведенные выше релятивистские уравнения движения становятся эквивалентными уравнениям /1/. Во всех сохраняющихся величинах интеграл по кривой $t = \mathrm{const}$ в пределе $c \to \infty$ исчезает, кроме энергии E, так что

$$E = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + G\,|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|\,,$$

$$\mathcal{P} = p_1 + p_2\,,$$

$$\mathfrak{M}^{n,k} = [\,x_1^n p_1^k - x_1^k p_1^n\,] + [\,x_2^n p_2^k - x_2^k p_2^n\,]\,,$$

$$\mathfrak{M}^{k0} = m_1 x_1^n + m_2 x_2^n - \mathcal{P}^n t\,.$$

Изложенная выше задача далее будет рассматриваться в случае одномерного движения тел. Для одномерного движения минимальная поверхность является частью такой плоскости, которую можно принять /что мы сразу и сделаем/ за координатную плоскость tx. Ось x направим в сторону от первого тела ко второму, так что $x_2(t) \geq x_1(t)$, где $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$ - мировые траектории тел. Таким образом, минимальная поверхность будет частью $x_1(t) \leq x \leq x_2(t)$ плоскости tx.

1. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Для сравнения с релятивистским случаем нам удобно изложить нерелятивистское одномерное движение в следующем виде. В плоскости Галилея согласно /1/ имеем

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = G, \qquad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -G,$$

а так как $p_1 = m_1 \frac{dx_1}{dt}$, $p_2 = m_2 \frac{dx_2}{dt}$, то

$$\frac{dp_1}{dt} = G, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -G,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_1^2}{2m_1}\right) = \frac{p_1}{m_1}\frac{dp_1}{dt} = G\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_2^2}{2m_2}\right) = \frac{p_2}{m_2}\frac{dp_2}{dt} = -G\frac{dx_2}{dt}.$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$p_1 = \mathcal{P}_1 + Gt, \quad p_2 = \mathcal{P}_2 - Gt,$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = E_1 + Gx_1, \quad \frac{p_2^2}{2m_2} = E_2 - Gx_2,$$

где $\mathcal{P}_1$, E_1, $\mathcal{P}_2$, E_2 - постоянные интегрирования. Отсюда

$$x_1(t) = -\frac{E_1}{G} + \frac{(\mathcal{P}_1 + Gt)^2}{2m_1 G},$$

$$x_2(t) = \frac{E_2}{G} - \frac{(\mathcal{P}_2 - Gt)^2}{2m_2 G}. \qquad /8/$$

Энергия системы равна $E = E_1 + E_2$, а импульс $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$. Единственная отличная от нуля компонента бивектора момента равна

$$\mathfrak{M}^{10} = \frac{m_2}{G}\left[E_2 - \frac{\mathcal{P}_2^2}{2m_2}\right] - \frac{m_1}{G}\left[E_1 - \frac{\mathcal{P}_1^2}{2m_1}\right].$$

Прямая

$$(m_1 + m_2)x - \mathcal{P}t = \mathfrak{M}^{10} \qquad /9/$$

представляет собой мировую траекторию тел как целого, то есть траекторию центра масс. Если мировые траектории $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$ пересекаются, то прямая /9/ проходит через точки пересечения. В этих точках происходит абсолютно неупругое столкновение исследуемых тел и образование составного тела либо, наоборот, распад составного тела на два исследуемых. Мировая траектория составного тела лежит на прямой /9/. Время, протекающее между распадом и столкновением, равно

$$T = \frac{2}{G}\sqrt{2\mu\,\Delta E}, \qquad /10/$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса; ΔE - энергия относительного движения тел, равная

$$\Delta E = E - \frac{\mathcal{P}^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{\mu}{2}\left[\frac{d}{dt}(x_2 - x_1)\right]^2 + G(x_2 - x_1). \qquad /11/$$

Из формулы /10/ видно, что образование составного тела возможно только в том случае, если $\Delta E \geq 0$. При $G > 0$ исследуемая система двух тел осциллирует с периодом колебаний /10/, если столкновения тел будут происходить абсолютно упругим образом. Получается своего рода линейный осциллятор.

2. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Полагаем

$$t = \frac{1}{2}(u + v), \qquad x = \frac{c}{2}(u - v)$$

и из /4/ находим

$$p_1 = \mathcal{P}_1 + Gt, \qquad p_2 = \mathcal{P}_2 - Gt,$$

$$p_1^0 = \mathcal{E}_1 + \frac{G}{c^2}x_1, \qquad p_2^0 = \mathcal{E}_2 - \frac{G}{c^2}x_2.$$

Учитывая /5/, получаем

$$x_1(t) = \frac{c^2}{G}\left[-\mathcal{E}_1 + \sqrt{m_1^2 + \frac{(\mathcal{P}_1 + Gt)^2}{c^2}}\right],$$

$$x_2(t) = \frac{c^2}{G}\left[\mathcal{E}_2 - \sqrt{m_2^2 + \frac{(\mathcal{P}_2 - Gt)^2}{c^2}}\right],$$

так что мировые траектории тел являются противоположными ветвями двух гипербол. Отметим, что в гиперболическом движении находятся также концы одномерной релятивистской струны /4/.

Полная энергия системы $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, импульс $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, компонента бивектора момента равна

$$\mathfrak{M}^{10} = \frac{c}{2G}\left[\mathcal{E}_1^2 - \frac{\mathcal{P}_2^2}{c^2} - m_2^2\right] - \frac{c}{2G}\left[\mathcal{E}_1^2 - \frac{\mathcal{P}_1^2}{c^2} - m_1^2\right].$$

Роль прямой /9/ играет прямая

$$\mathcal{E} x - \mathcal{P} t = \mathfrak{M}^{10}. \qquad /12/$$

Если мировые траектории $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$ пересекаются, то прямая /12/ проходит через точки пересечения. В этих точках происходит /по законам релятивистской механики контактных столкновений/ абсолютно неупругое столкновение исследуемых тел и образование составного тела либо, наоборот, распад составного тела на два исследуемых. Мировая траектория составного тела лежит на прямой /12/. Собственное время составного тела, протекающее между распадом и столкновением, равно

$$T = 2\,\frac{m_1 m_2}{MG}\,c\ \mathrm{sh}\,\frac{s}{c}\ , \qquad /13/$$

где s - относительная быстрота исследуемых тел в момент столкновения или распада; M - масса составного тела:

$$M = \sqrt{\mathcal{E}^2 - \frac{\mathcal{P}^2}{c^2}} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\,\mathrm{ch}\,\frac{s}{c}}\ . \qquad /14/$$

Из формулы /13/ видно, что образование составного тела возможно только в случае, если $M \geq m_1 + m_2$. При $G > 0$ получается релятивистский осциллятор с периодом /13/, если столкновения тел будут происходить абсолютно упругим образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, 42, с.59.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, 43, с.356.
3. Шавохина Н.С. Изв. ВУЗов. Физика, 1981, 7, с.91.
4. Chodos A., Thorn C.B. Nucl.Phys., 1974, B72, p.509.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1982 года.

Шавохина Н.С. Р2-82-157

Одномерное релятивистское движение двух тел с постоянной по модулю силой взаимодействия

Рассмотрено релятивистское прямолинейное движение двух тел с постоянной по модулю силой взаимодействия. Исследованы неупругие и упругие столкновения этих тел. Построена математически точная модель релятивистского осциллятора.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1981

Shavokhina N.S. P2-82-157

One-Dimensional Relativistic Motion of Two Bodies with Interaction Force Constant Modulo

The relativistic linear motion of two bodies is considered with the interaction force which is modulo constant. Inelastic and elastic collisions of these bodies are studied. An exact mathematical model of the relativistic oscillator is constructed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1981

Перевод О.С.Виноградовой.