объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

2645/82

7/6-82

Р2-82-151

Б.М.Барбашов, А.А.Леонович, А.Б.Пестов

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВАХ И ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Тензор энергии-импульса имеет фундаментальное значение в теории поля, в общей теории относительности тензор энергии-импульса служит источником гравитационного поля, что математически выражается уравнениями Эйнштейна:

$$G_{ab} = -8\pi\kappa\, T_{ab},$$

где $G_{ab}=R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R$ - тензор Эйнштейна; κ - гравитационная постоянная.

В специальной теории относительности формулу для тензора энергии-импульса можно получить с помощью теоремы Нетер[1] или по способу, указанному в [2]. Определенный таким образом канонический тензор энергии-импульса оказывается, вообще говоря, несимметричным. Симметричный же тензор энергии-импульса может быть получен по методу Гильберта[3], однако этот метод оказывается довольно трудоемким в некоторых случаях, кроме того, его нельзя применить к спинорному полю.

Нами предлагается простой, безвариационный способ получения симметричного тензора энергии-импульса и обобщенного тензора Эйнштейна, который применим ко всем полям. Под обобщенным тензором Эйнштейна понимается тензор G_{ab}, который выводится из лагранжианов более общих, чем эйнштейновский.

2. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Пусть лагранжиан L есть скалярная функция полей $\phi_N{}^{a\dots b}_{i\dots j}$ и их ковариантных производных $\nabla_k \phi_N{}^{a\dots b}_{i\dots j}$. Чтобы сократить запись формул и сделать их обозримыми, мы будем в дальнейшем опускать как тензорные индексы, так и индекс N, нумерующий поля.

Так как лагранжиан $L = L(\phi, \nabla_a \phi)$ суть скалярная функция, то

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} = \nabla_a L = \frac{\partial L}{\partial \phi}\nabla_a \phi + \frac{\partial L}{\partial \nabla_b \phi}\nabla_a \nabla_b \phi . \qquad /1/$$

Обозначим $\dfrac{\partial L}{\partial \nabla_a \phi}$ через π^a. Из соотношения /1/ после некоторых преобразований получаем

$$\nabla^b T^{can}_{ba} + \pi^b (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\phi = -[L]\,\nabla_a \phi , \qquad /2/$$

где

$$T^{can}_{ab} = \pi_a \nabla_b \phi - g_{ab} L$$

есть канонический тензор энергии-импульса, а $[L]=\dfrac{\partial L}{\partial \phi} - \nabla_a \pi^a$ - производная Лагранжа.

Выпишем формулу для коммутатора ковариантных производных:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\, \phi^{m\dots n}_{i\dots j} = R^m{}_{abs}\, \phi^{s\dots n}_{i\dots j} + \dots + R^n{}_{abs}\, \phi^{m\dots s}_{i\dots j} - R^s{}_{abi}\, \phi^{m\dots n}_{s\dots j} - R^s{}_{abj}\, \phi^{m\dots n}_{i\dots s} . \qquad /3/$$

Согласно /3/ второе слагаемое в соотношении /2/ можно преобразовать к виду

$$\pi^b (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\phi = -R_{abij}\, \pi^b S^{ij} \phi ,$$

где через $S^{ij}\phi$ обозначен альтернированный по индексам i и j тензор:

$$\delta^i_p\, g^{js} \phi^{m\dots n}_{s\dots q} + \dots + \delta^i_q\, g^{js} \phi^{m\dots n}_{p\dots s} - g^{mj} \phi^{i\dots n}_{p\dots q} - g^{nj} \phi^{m\dots i}_{p\dots q} .$$

Представим тензор $\pi^b S^{ij}\phi$ в виде суммы двух тензоров:

$$\pi^b S^{ij}\phi = \frac{1}{2}(\pi^b S^{ij}\phi + \pi^i S^{jb}\phi + \pi^j S^{bi}\phi) + \frac{1}{2}(\pi^b S^{ij}\phi - \pi^i S^{jb}\phi - \pi^j S^{bi}\phi).$$

Первый тензор полностью антисимметричный. Поэтому свертка его с тензором Римана равна нулю. Соотношение /3/ показывает, что свертку второго тензора с тензором Римана можно выразить через операторы ковариантной производной. В итоге получаем

$$\pi^b(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\phi = \nabla^b \nabla^c (\pi_a S_{bc}\phi - \pi_b S_{ca}\phi - \pi_c S_{ab}\phi). \qquad /4/$$

Подставив /4/ в /2/, придем к соотношению

$$\nabla^b T_{ba} = \nabla^b \{ \nabla^c(\pi_c S_{ab}\phi) - \frac{1}{2}(\pi_a \nabla_b \phi - \pi_b \nabla_a \phi)\} - [L]\,\nabla_a \phi ,$$

где

$$T_{ab} = \frac{1}{2}(\pi_a \nabla_b \phi + \pi_b \nabla_a \phi) + \nabla^c(\pi_a S_{bc}\phi + \pi_b S_{ac}\phi) - g_{ab} L \qquad /5/$$

- симметричный тензор энергии-импульса.

Подействуем на лагранжиан операторами $\Lambda = v^a \nabla_a$ и оператором D_v - производной Ли[4,5]:

$$\Lambda L = \frac{\partial L}{\partial \phi}\Lambda \phi + \pi^a \Lambda \nabla_a \phi ,$$

О ...ЧНЫЙ ИН...
БИБЛИОТЕКА

$$D_v L = \frac{\partial L}{\partial \phi} D_v \phi + \pi^a D_v \nabla_a \phi + \frac{\partial L}{\partial g^{ab}} D_v g^{ab}.$$

Вычитая из первого соотношения второе и учитывая, что v^a - произвольное векторное поле, можно показать, что

$$\nabla^c(\pi_c S_{ab}\phi) - \frac{1}{2}(\pi_a \nabla_b \phi - \pi_b \nabla_a \phi) + [L] S_{ab} \phi = 0. \qquad /6/$$

Таким образом, если ϕ - решение уравнений Лагранжа-Эйлера, то

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \qquad /7/$$

Полученное выражение /5/ для тензора энергии-импульса согласуется с результатами работ /6,7/.

3. ТЕОРИИ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Теории с высшими производными имеют важное значение /см., например, /8–10/ /. Пусть лагранжиан зависит от высших ковариантных производных:

$$L = L(\phi, \phi_{;a_1}, \ldots, \phi_{;a_1 \ldots a_n}), \qquad \text{где } \phi_{;a} = \nabla_a \phi.$$

Производная Лагранжа дается выражением /11/

$$[L] = \frac{\partial L}{\partial \phi} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_k} \frac{\partial L}{\partial \phi_{;a_1 \ldots a_k}}.$$

Введя обозначение:

$$\pi^{b_1 \ldots b_m} = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_k} \frac{\partial L}{\partial \phi_{;b_1 \ldots b_m a_1 \ldots a_k}},$$

и применяя вышеописанный метод, получим, что симметричный тензор энергии-импульса, удовлетворяющий уравнению /7/, равен

$$T_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\pi^{i_1 \ldots i_k}{}_{\cdot\, a} \phi_{;i_1 \ldots i_k b} + \pi^{i_1 \ldots i_k}{}_{\cdot\, b} \phi_{;i_1 \ldots i_k a}\right) +$$

$$+ \Delta^c \sum_{k=0}^{n-1} \left(\pi^{i_1 \ldots i_k}{}_{\cdot\, a} S_{bc} \phi_{;i_1 \ldots i_k} + \pi^{i_1 \ldots i_k}{}_{\cdot\, b} S_{ac} \phi_{;i_1 \ldots i_k}\right) -$$

$$- g_{ab} L.$$

Отсюда при $n=1$ следует /5/.

4. ОБОБЩЕННЫЙ ТЕНЗОР ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрение лагранжианов более общих, чем эйнштейновский, побуждается многими причинами /12–14/. Отметим, что лагранжианы такого рода приводят к качественному изменению решений уравнений Эйнштейна. Высшие добавки по тензору кривизны в лагранжиане гравитационного поля не позволяют применять теоремы Пенроуза-Хокинга о неизбежности коллапса. Поэтому вопрос о справедливости этих теорем в рамках более общей теории остается открытым.

Пусть гравитационный лагранжиан есть скалярная функция метрического тензора, тензора Римана и его сверток:

$$L = L(g_{ab}, R, R_{ab}, R_{abij}).$$

Обозначим тензор $\frac{\partial L}{\partial R_{ab}}$ через X^{ab}, а тензор $\frac{\partial L}{\partial R_{abij}}$ - через X^{abij}. Применяя изложенный выше метод и используя известные алгебраические и дифференциальные тождества для тензора Римана, а также соотношение /3/, получим тождество

$$\nabla^a G_{ab} = 0,$$

где $G_{ab} = \overset{1}{G}_{ab} + \overset{2}{G}_{ab} + \overset{3}{G}_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} L$ - обобщенный тензор Эйнштейна;

$$\overset{1}{G}_{ab} = (R_{ab} + \nabla_a \nabla_b - g_{ab} \Box) \frac{\partial L}{\partial R};$$

$$\overset{2}{G}_{ab} = X^{ij} R_{iajb} - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla_i \nabla_j X^{ij} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\nabla_a \nabla^i X_{ib} + \nabla_b \nabla^i X_{ia}) - \frac{1}{2} \Box X_{ab};$$

$$\overset{3}{G}_{ab} = \frac{1}{2}(X_a^{\cdot ijk} R_{bijk} + X_b^{\cdot ijk} R_{aijk}) + (\nabla^i \nabla^j + \nabla^j \nabla^i) X_{aijb};$$

$$\Box = \Delta^a \nabla_a.$$

При выводе выражения для G_{ab} было использовано равенство

$$R_{ai} X_b^{\cdot i} - R_{bi} X_a^{\cdot i} = 2(X_a^{\cdot ijk} R_{bijk} - X_b^{\cdot ijk} R_{aijk}),$$

которое можно получить тем же методом, который применен при выводе соотношения /6/.

Если $L = L(C_{abij})$, где C_{abij} - тензор конформной кривизны Вайля, то след тензора Эйнштейна равен

$$g^{ab} G_{ab} = \frac{\partial L}{\partial C_{abij}} C_{abij} - \frac{n}{2} L.$$

Для $n=4$ из лагранжиана $L = C_{abij} C^{abij}$ получаем тензор G_{ab} с нулевым следом /15/. Для лагранжиана $L = R^2 - 4 R_{ab} R^{ab} + R_{abij} R^{abij}$ получаем $G = 0$, что согласуется с /16/.

Можно доказать, что полученный выше тензор G_{ab} совпадает с тензором Эйнштейна, выводимым вариационным методом.

Все полученные выше соотношения могут быть обобщены на случай отличного от нуля кручения. Рассмотрим, например, гравитационный лагранжиан вида $L = L(R)$. Действуя как и раньше, придем к следующему тождеству:

$$\nabla^a G_{ab} = \left(\frac{1}{2} T_{ia.}^{\ \ \ j} R_{bj..}^{\ \ \ ai} + T_{ba.}^{\ \ \ i} R_{i.}^{a} + T_{ba.}^{\ \ \ i} \nabla_i \nabla^a\right) \frac{\partial L}{\partial R},$$

где $T_{ab.}^{\ \ \ i} = \Gamma^i_{ab} - \Gamma^i_{ba}$ - тензор кручения [17].

В заключение авторы выражают благодарность Е.А.Иванову, В.В.Нестеренко, Э.А.Тагирову, П.Физиеву, Н.С.Шавохиной за обсуждение результатов работы, критические и стимулирующие замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1973.
3. Гильберт Д. В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. "Мир", М., 1979.
4. Вейнберг С. Гравитация и космология. "Мир", М., 1975.
5. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. "Мир", М., 1977.
6. Belinfante F.J. Physica, 1940, 7, p. 449.
7. Трейман С., Джекив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов. Атомиздат, М., 1977.
8. Pais A., Uhlenbeck G.E. Phys.Rev., 1950, 79, p. 145.
9. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. "Наука", М., 1978.
10. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. "Наука", М., 1979.
11. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. "Наука", М., 1965.
12. Брилл Д., Гоуди Р. В кн.: Новости фундаментальной физики, вып. 2. "Мир", М., 1973.
13. де Витт. В кн.: Новости фундаментальной физики, вып.9. "Мир", М., 1978.
14. Николаенко В.М. ТМФ, 1980, 42, с. 195.
15. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. Атомиздат, М., 1980.
16. Lanczos C. Ann.Math., 1938, 39, p. 842.
17. Норден А.П. Пространства аффинной связности. "Наука", М., 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 февраля 1982 года.

Барбашов Б.М., Леонович А.А., Пестов А.Б. Р2-82-151
О дифференциальных тождествах и законах сохранения в теории поля

Предложено правило вывода симметричного тензора энергии-импульса и обобщенного тензора Эйнштейна. Доказана эквивалентность предложенного способа и вариационного метода Гильберта. Рассмотрено обобщение на случай геометрии Римана-Картана.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Barbashov B.M., Leonovich A.A., Pestov A.B. P2-82-151
On Differential Identities and Laws of Conservation in the Field Theory

A simple method for deriving the symmetric energy-momentum tensor is proposed, which uses the properties of covariant differentiation. By this method the symmetric energy-momentum tensor is obtained for theories with higher-order derivatives and the Einstein generalized tensor for gravitational Lagrangians with arbitrary dependence on the curvature tensor.

The investigation has been performed at the Laboratory of the Theoretical Physics, JINR.

P arch. Dubna 1982