ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-82 129

В.К.Мельников

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Направлено в журнал "Математический сборник"

1982

В настоящей статье речь будет идти о нелинейных эволюционных уравнениях, интегрируемых методом обратной задачи для оператора

$$X = \begin{vmatrix} \partial^3 + u_1\partial + u_0 - \eta & v \\ w & \partial \end{vmatrix}, \qquad /1/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, функции u_0, u_1, v, w зависят от x и времени t, а η - спектральный параметр. За 15 лет, прошедшие после опубликования работы /1/, положившей начало применению метода обратной задачи к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений, с помощью этого метода было исследовано большое число нелинейных задач, описываемых различными уравнениями /2-5/. Однако операторы вида /1/ до сих пор с этой целью не использовались.

1. Получение уравнений. Рассмотрим уравнение

$$Xh = 0, \quad h = (\phi, \psi). \qquad /2/$$

Его решения образуют матрицу Вронского W вида

$$W = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_0' & \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' \\ \phi_0'' & \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' \\ \psi_0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}, \qquad /3/$$

где штрихи означают дифференцирование по x. В силу /1/-/3/ имеем

$$\frac{\partial W}{\partial x} + UW = \Gamma W, \qquad /4/$$

где

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_0 & u_1 & 0 & v \\ w & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad /5/$$

На основании /3/-/5/ получаем, что $\det W$ не зависит от x. Следовательно, матрицу W вида /3/ можно выбрать так, что $\det W \equiv 1$. С учетом этого замечания возьмем матрицу F вида

$$F = WCW^{-1}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0. \qquad /6/$$

Согласно /4/ и /6/ справедливо равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [U, F] = [\Gamma, F]. \qquad /7/$$

Пусть $F_{\mu,\nu}$ - элемент матрицы F, стоящий на пересечении $(\mu+1)$-й строки и $(\nu+1)$-го столбца, $\mu, \nu = 0,1,2,3$. С помощью элементов матрицы F образуем операторы A и $\hat{A}$, положив

$$A = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{2} F_{0,k}\, \partial^k & F_{0,3} \\ \sum\limits_{k=0}^{2} F_{3,k}\, \partial^k & F_{3,3} \end{vmatrix}, \qquad /8/$$

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} u_1 F_{0,2} + \sum\limits_{k=0}^{2} \partial^k \cdot F_{2-k,2} & u_1 F_{0,3} + \sum\limits_{k=0}^{2} \partial^k \cdot F_{2-k,3} \\ F_{3,2} & F_{3,3} \end{vmatrix}. \qquad /9/$$

Из уравнения /7/ следует, что операторы A и $\hat{A}$ удовлетворяют соотношению

$$X \cdot A = \hat{A} \cdot X. \qquad /10/$$

Возьмем теперь произвольную точку $\eta_s \in \mathbf{C}$ и положим

$$F = \sum_{p=0}^{\infty} f_p^{(s)} (\eta - \eta_s)^p, \quad F_{\mu,\nu} = \sum_{p=0}^{\infty} f_{p,\mu,\nu}^{(s)} (\eta - \eta_s)^p, \quad \mu, \nu = 0,1,2,3,$$
$$A = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p^{(s)} (\eta - \eta_s)^p, \quad \hat{A} = \sum_{p=0}^{\infty} \hat{\alpha}_p^{(s)} (\eta - \eta_s)^p. \qquad /11/$$

Путем сравнения равенств /8/, /9/ и /11/ получаем следующие выражения

$$\alpha_p^{(s)} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{2} f_{p,0,k}^{(s)}\, \partial^k & f_{p,0,3}^{(s)} \\ \sum\limits_{k=0}^{2} f_{p,3,k}^{(s)}\, \partial^k & f_{p,3,3}^{(s)} \end{vmatrix}, \qquad /12/$$

$$\hat{\alpha}_p^{(s)} = \begin{vmatrix} u_1 f_{p,0,2}^{(s)} + \sum\limits_{k=0}^{2} \partial^k \cdot f_{p,2-k,2}^{(s)} & u_1 f_{p,0,3}^{(s)} + \sum\limits_{k=0}^{2} \partial^k \cdot f_{p,2-k,3}^{(s)} \\ f_{p,3,2}^{(s)} & f_{p,3,3}^{(s)} \end{vmatrix}. \qquad /13/$$

Пусть Γ_0 равно значению при $\eta = 0$ определенной посредством равенства /5/ матрицы Γ, а $\Gamma_1 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}$, т.е.

$$\Gamma_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad /14/$$

Пусть, далее, оператор X_s получается из X вида /1/ при $\eta = \eta_s$, а матрица I имеет вид

$$I = -\frac{\partial X}{\partial \eta} = \mathrm{diag}\,(1,0). \qquad /15/$$

Тогда на основании /7/, /10/ и /11/ получаем уравнения, которым удовлетворяют матрицы $f_p^{(s)}$,

$$\frac{\partial f_0^{(s)}}{\partial x} + [U, f_0^{(s)}] = [\Gamma_0 + \eta_s \Gamma_1, f_0^{(s)}],$$
$$\frac{\partial f_p^{(s)}}{\partial x} + [U, f_p^{(s)}] = [\Gamma_0 + \eta_s \Gamma_1, f_p^{(s)}] + [\Gamma_1, f_{p-1}^{(s)}], \quad p > 0, \qquad /16/$$

и операторные соотношения для $\alpha_p^{(s)}$ и $\hat{\alpha}_p^{(s)}$:

$$X_s \cdot \alpha_0^{(s)} = \hat{\alpha}_0^{(s)} \cdot X_s,$$
$$X_s \cdot \alpha_p^{(s)} - I \cdot \alpha_{p-1}^{(s)} = \hat{\alpha}_p^{(s)} \cdot X_s - \hat{\alpha}_{p-1}^{(s)} \cdot I, \quad p > 0. \qquad /17/$$

Далее, уравнение /7/ обладает формальным решением вида

$$F = \sum_{m=-2}^{\infty} F_m \zeta^{-m}, \quad \zeta = \eta^{1/3}. \qquad /18/$$

При этом справедливы равенства

$$F_{-2} = \Gamma_1, \quad F_{-1} = \tilde{\Gamma}_0, \quad F_0 = \mathrm{diag}\,(0,0,0,1), \qquad /19/$$

где матрицы Γ_0 и Γ_1 определены равенством /14/, знак "~" означает транспонирование, а элементы матриц F_m при $m>0$ являются полиномами от функций u_0, u_1, v, w и их производных по x соответствующего порядка. Кроме того, при $u_0=u_1=v=w\equiv 0$ имеем

$$F_1=\Gamma_0\ , \ F_2=\tilde{\Gamma}_1, \text{ а } F_m\equiv 0, \text{ если } m>2. \qquad /20/$$

Действительно, пусть λ - отличный от единицы корень третьей степени из единицы. Пусть, далее,

$$\theta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \zeta & \lambda\zeta & \lambda^2\zeta & 0 \\ \zeta^2 & \lambda^2\zeta^2 & \lambda\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},\ \theta^{-1}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & \zeta^{-1} & \zeta^{-2} & 0 \\ 1 & \lambda^2\zeta^{-1} & \lambda\zeta^{-2} & 0 \\ 1 & \lambda\zeta^{-1} & \lambda^2\zeta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \qquad /21/$$

Положим

$$G=\theta^{-1}F\theta. \qquad /22/$$

В силу /7/ имеем

$$\frac{\partial G}{\partial x}+[V,G]=\zeta[\Lambda,G], \qquad /23/$$

где

$$V=\theta^{-1}U\theta,\quad \zeta\Lambda=\theta^{-1}\Gamma\theta. \qquad /24/$$

С помощью /5/, /21/ и /24/ нетрудно убедиться, что справедливы равенства

$$V=V_0+\frac{1}{3\zeta}V_1+\frac{1}{3\zeta^2}V_2,\ \Lambda=\mathrm{diag}\,(1,\lambda,\lambda^2,0), \qquad /25/$$

где

$$V_0=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & w & w & 0 \end{vmatrix},\quad V_1=\begin{vmatrix} u_1 & \lambda u_1 & \lambda^2 u_1 & 0 \\ \lambda u_1 & \lambda^2 u_1 & u_1 & 0 \\ \lambda^2 u_1 & u_1 & \lambda u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$V_2=\begin{vmatrix} u_0 & u_0 & u_0 & v \\ \lambda u_0 & \lambda u_0 & \lambda u_0 & \lambda v \\ \lambda^2 u_0 & \lambda^2 u_0 & \lambda^2 u_0 & \lambda^2 v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad /26/$$

Согласно результатам работы[6] уравнение /23/ имеет формальное решение вида

$$G\approx\sum_{m=0}^{\infty}G_m\zeta^{-m}, \qquad /27/$$

где матрица G_0 удовлетворяет условию

$$[\Lambda,G_0]=0, \qquad /28/$$

матрицы G_1 и G_2 удовлетворяют уравнениям

$$[\Lambda,G_1]=[V_0,G_0]+\frac{\partial G_0}{\partial x}, \qquad /29/$$

$$[\Lambda,G_2]=[V_0,G_1]+[V_1,G_0]+\frac{\partial G_1}{\partial x}, \qquad /30/$$

а при $m>2$ справедливо рекуррентное соотношение

$$[\Lambda,G_m]=[V_0,G_{m-1}]+[V_1,G_{m-2}]+[V_2,G_{m-3}]+\frac{\partial G_{m-1}}{\partial x}. \qquad /31/$$

Из равенств /28/, /29/ следует, что G_0 - диагональная матрица с не зависящими от x диагональными элементами, т.е.

$$G_0=\mathrm{diag}\,(c_0,c_1,c_2,c_3), \qquad /32/$$

а из равенств /29/-/31/ на основании результатов работы[6] получаем, что элементы матриц G_m при $m>0$ являются полиномами от u_0, u_1, v, w и их производных по x соответствующего порядка. Более точно, матрицы G_m при $m>0$ можно выбрать так, чтобы их элементы были квазиоднородными многочленами ранга m от функций u_0, u_1, v, w и их производных по x. Это значит, что при замене $\frac{\partial^k w}{\partial x^k}$ на ρ^{k+1}, $\frac{\partial^k u_1}{\partial x^k}$ на ρ^{k+2}, $\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}$ и $\frac{\partial^k v}{\partial x^k}$ на ρ^{k+3} любой одночлен Q_α, входящий в какой-нибудь элемент матрицы G_m, принимает вид $C_\alpha\rho^m$, где C_α - отличная от нуля константа. Отсюда, в частности, следует, что при $m>0$ имеем $G_m\equiv 0$, если $u_0=u_1=v=w\equiv 0$.

Исходя из равенства /22/, подвергнем теперь полученный описанным выше способом ряд /27/ преобразованию подобия с помощью матрицы θ вида /21/, т.е. положим

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} \theta\, G_m \theta^{-1} \zeta^{-m} . \qquad /33/$$

Нетрудно видеть, что полученный таким образом ряд имеет вид /18/ и формально удовлетворяет уравнению /7/. Отсюда, в частности, следует, что при любом выборе матрицы G_0 вида /32/ выполняются условия

$$[\Gamma_1, F_{-2}] = [\Gamma_1, F_{-1}] = [\Gamma_1, F_0] = 0,$$

а при $m > 0$ справедливо рекуррентное соотношение

$$[\Gamma_1, F_m] + [\Gamma_0, F_{m-3}] - [U, F_{m-3}] - \frac{\partial F_{m-3}}{\partial x} = 0, \qquad /34/$$

т.е. последовательность матриц F_m, $m \geq -2$, распадается на три бесконечные серии, образуемые матрицами с номерами $m = 3r$, $m = 3r-1$ и $m = 3r-2$, $r \geq 0$, соответственно. Далее, в силу /21/ из /33/ следует, что при $u_0 = u_1 = v = w \equiv 0$ имеем $F_m \equiv 0$, если $m > 2$, а

$$F_{-2} = c_2' \Gamma_1, \; F_{-1} = c_1' \tilde{\Gamma}_0, \; F_0 = \mathrm{diag}(c_0', c_0', c_0', c_3), \; F_1 = c_2' \Gamma_0, \; F_2 = c_1' \tilde{\Gamma}_1,$$

где

$$c_0' = \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2),\; c_1' = \frac{1}{3}(c_0 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_2),\; c_2' = \frac{1}{3}(c_0 + \lambda^2 c_1 + \lambda c_2).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при $u_0 = u_1 = v = w \equiv 0$ и $c_0 = 2$, $c_1 = c_2 = -1$, $c_3 = 1$ справедливы равенства /19/ и /20/. Однако с учетом /26/ убеждаемся, что матрицы F_{-2}, F_{-1} и F_0 в действительности не зависят от u_0, u_1, v, w и, следовательно, равенства /19/ справедливы при любых u_0, u_1, v, w.

Пусть теперь $F_{m,\mu,\nu}$ - элемент матрицы F_m, стоящий на пересечении $(\mu+1)$-й строки и $(\nu+1)$-го столбца, $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Положим

$$A_m = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{2} F_{m,0,k}\, \partial^k & F_{m,0,3} \\ \sum\limits_{k=0}^{2} F_{m,3,k}\, \partial^k & F_{m,3,3} \end{vmatrix}, \qquad /35/$$

$$\hat{A}_m = \begin{vmatrix} u_1 F_{m,0,2} + \sum\limits_{k=0}^{2} \partial^k \cdot F_{m,2-k,2} & u_1 F_{m,0,3} + \sum\limits_{k=0}^{2} \partial^k \cdot F_{m,2-k,3} \\ F_{m,3,2} & F_{m,3,3} \end{vmatrix}. \qquad /36/$$

Тогда на основе равенств /19/ имеем

$$A_{-2} = \hat{A}_{-2} = A_{-1} = \hat{A}_{-1} = 0, \qquad A_0 = \hat{A}_0 = E - I. \qquad /37/$$

Далее, из уравнения /34/ следует, что при $m > 0$ справедливо рекуррентное соотношение

$$X_0 \cdot A_{m-3} - I \cdot A_m = \hat{A}_{m-3} \cdot X_0 - \hat{A}_m \cdot I, \qquad /38/$$

где оператор X_0 получается из X вида /1/ при $\eta = 0$. Согласно /37/ отсюда вытекают равенства

$$I \cdot A_0 = \hat{A}_0 \cdot I, \quad I \cdot A_1 = \hat{A}_1 \cdot I, \quad I \cdot A_2 = \hat{A}_2 \cdot I. \qquad /39/$$

Возьмем теперь произвольные величины $c_{m,\kappa}$ и положим

$$\mathfrak{A} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa} \sum_{r=0}^{m} A_{3r+\kappa}\, \eta^{m-r} + \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{a_p^{(s)}}{(\eta-\eta_s)^{p_s - p + 1}}, \qquad /40/$$

$$\hat{\mathfrak{A}} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa} \sum_{r=0}^{m} \hat{A}_{3r+\kappa}\, \eta^{m-r} + \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{\hat{a}_p^{(s)}}{(\eta-\eta_s)^{p_s - p + 1}}.$$

Далее, положим

$$T = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{A}, \qquad \hat{T} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathfrak{A}} \qquad /41/$$

и рассмотрим операторное соотношение

$$X \cdot T = \hat{T} \cdot X. \qquad /42/$$

Это соотношение эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + [\mathfrak{A}, X] = \mathfrak{B} \cdot X, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \hat{\mathfrak{A}}. \qquad /43/$$

Подставляя в /43/ выражения /40/, с помощью равенств /17/,/38/ и /39/ получаем уравнение

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa} \left(\hat{A}_{3(m+1)+\kappa} \cdot I - I \cdot A_{3(m+1)+\kappa} \right) = \sum_{s=1}^{s_0} \left(\hat{a}_{p_s}^{(s)} \cdot I - I \cdot a_{p_s}^{(s)} \right). \qquad /44/$$

На основании равенств /12/, /13/, /16/ и /34/-/36/ уравнение /44/ может быть записано в виде следующей системы:

$$
\begin{aligned}
&\dot u_0 + 3\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa}\,\frac{\partial}{\partial x}\,F_{3(m+1)+\kappa,1,2} = 3\sum_{s=1}^{s_0}\frac{\partial}{\partial x}\,f^{(s)}_{p_s,1,2},\\
&\dot u_1 + 3\sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa}\,\frac{\partial}{\partial x}\,F_{3(m+1)+\kappa,0,2} = 3\sum_{s=1}^{s_0}\frac{\partial}{\partial x}\,f^{(s)}_{p_s,0,2},\\
&\dot v - \sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa}\,F_{3(m+1)+\kappa,0,3} = -\sum_{s=1}^{s_0} f^{(s)}_{p_s,0,3},\\
&\dot w + \sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa}\,F_{3(m+1)+\kappa,3,2} = \sum_{s=1}^{s_0} f^{(s)}_{p_s,3,2},
\end{aligned}
\qquad /45/
$$

где точкой обозначена производная по времени t.

2. Редукция к операторам первого порядка. Равенство /42/ означает, что оператор T вида /41/ переводит любое решение $h=(\phi,\psi)$ уравнения /2/ в решение этого же уравнения. Таким образом, справедливо равенство

$$
Th_\alpha = \sum_{\alpha'=0}^{3} h_{\alpha'}\,\omega_{\alpha',\alpha}, \qquad \alpha = 0,1,2,3, \qquad /46/
$$

где h_α - линейно-независимые решения уравнения /2/, а величины $\omega_{\alpha',\alpha}$ не зависят от x. Исходя из равенств /12/, /35/ и /40/, положим

$$
\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{2} \mathcal{F}_{0,k}\,\partial^k & \mathcal{F}_{0,3} \\ \sum_{k=0}^{2} \mathcal{F}_{3,k}\,\partial^k & \mathcal{F}_{3,3} \end{vmatrix}. \qquad /47/
$$

Очевидно, что определенные таким образом функции $\mathcal{F}_{0,\alpha}$ и $\mathcal{F}_{3,\alpha}$, $\alpha = 0,1,2,3$, зависят рационально от параметра η. В том случае, когда в равенстве /40/ имеем $a^{(s)}_p = \hat a^{(s)}_p = 0$, т.е., когда операторы $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ зависят полиномиально от параметра η, функции $\mathcal{F}_{0,\alpha}$ и $\mathcal{F}_{3,\alpha}$ также будут полиномами от параметра η. В силу /41/ и /47/ равенство /46/ запишем в виде

$$
\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t} + \sum_{k=0}^{2}\mathcal{F}_{0,k}\,\frac{\partial^k\phi_\alpha}{\partial x^k} + \mathcal{F}_{0,3}\,\psi_\alpha = \sum_{\alpha'=0}^{3}\phi_{\alpha'}\,\omega_{\alpha',\alpha}, \qquad /48/
$$

$$
\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial t} + \sum_{k=0}^{2}\mathcal{F}_{3,k}\,\frac{\partial^k\phi_\alpha}{\partial x^k} + \mathcal{F}_{3,3}\,\psi_\alpha = \sum_{\alpha'=0}^{3}\psi_{\alpha'}\,\omega_{\alpha',\alpha}. \qquad /49/
$$

Дифференцируя равенство /48/ по x, с учетом /2/ получаем

$$
\frac{\partial^2\phi_\alpha}{\partial t\,\partial x} + \sum_{k=0}^{2}\mathcal{F}_{1,k}\,\frac{\partial^k\phi_\alpha}{\partial x^k} + \mathcal{F}_{1,3}\,\psi_\alpha = \sum_{\alpha'=0}^{3}\frac{\partial\phi_{\alpha'}}{\partial x}\,\omega_{\alpha',\alpha}, \qquad /50/
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{1,0} = \frac{\partial\mathcal{F}_{0,0}}{\partial x} - (u_0-\eta)\,\mathcal{F}_{0,2} - w\,\mathcal{F}_{0,3},\\
&\mathcal{F}_{1,1} = \frac{\partial\mathcal{F}_{0,1}}{\partial x} + \mathcal{F}_{0,0} - u_1\,\mathcal{F}_{0,2},\\
&\mathcal{F}_{1,2} = \frac{\partial\mathcal{F}_{0,2}}{\partial x} + \mathcal{F}_{0,1}, \quad \mathcal{F}_{1,3} = \frac{\partial\mathcal{F}_{0,3}}{\partial x} - v\,\mathcal{F}_{0,2}.
\end{aligned}
\qquad /51/
$$

Дифференцируя далее равенство /50/ по x, согласно /2/ имеем

$$
\frac{\partial^3\phi_\alpha}{\partial t\,\partial x^2} + \sum_{k=0}^{2}\mathcal{F}_{2,k}\,\frac{\partial^k\phi_\alpha}{\partial x^k} + \mathcal{F}_{2,3}\,\psi_\alpha = \sum_{\alpha'=0}^{3}\frac{\partial^2\phi_{\alpha'}}{\partial x^2}\,\omega_{\alpha',\alpha}, \qquad /52/
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{2,0} = \frac{\partial\mathcal{F}_{1,0}}{\partial x} - (u_0-\eta)\,\mathcal{F}_{1,2} - w\,\mathcal{F}_{1,3},\\
&\mathcal{F}_{2,1} = \frac{\partial\mathcal{F}_{1,1}}{\partial x} + \mathcal{F}_{1,0} - u_1\,\mathcal{F}_{1,2},\\
&\mathcal{F}_{2,2} = \frac{\partial\mathcal{F}_{1,2}}{\partial x} + \mathcal{F}_{1,1}, \quad \mathcal{F}_{2,3} = \frac{\partial\mathcal{F}_{1,3}}{\partial x} - v\,\mathcal{F}_{1,2}.
\end{aligned}
\qquad /53/
$$

Полученные с помощью равенств /47/, /51/ и /53/ величины $\mathcal{F}_{\mu,\nu}$ образуют матрицу $\mathcal{F}$, у которой на пересечении $(\mu+1)$-й строки и $(\nu+1)$-го столбца стоит $\mathcal{F}_{\mu,\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Пусть

$$
\mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{F}, \qquad \mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial x} + U - \Gamma. \qquad /54/
$$

Тогда равенства /48/-/50/ и /52/ в совокупности означают, что

$$
\mathcal{T}\,W = W\,\Omega, \qquad /55/
$$

где матрица Ω образована не зависящими от x величинами $\omega_{\alpha',\alpha}$, α', $\alpha = 0,1,2,3$. На основании /4/ и /54/ справедливо равенство

$$
\mathcal{X}\,W = 0. \qquad /56/
$$

Отсюда с помощью /55/ получаем

$$\mathfrak{X}\mathfrak{T}W = 0. \qquad /57/$$

Из равенств /56/ и /57/ вытекает, что

$$[\mathfrak{T}, \mathfrak{X}] = 0, \qquad /58/$$

т.е. система уравнений /45/ в силу /54/ и /58/ допускает представление

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - [U, \mathcal{F}] + [\Gamma, \mathcal{F}] = 0, \qquad /59/$$

которое является условием совместности операторов первого порядка $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{X}$ вида /54/. Кроме того, согласно /51/ и /53/ элементы матрицы $\mathcal{F}$ являются рациональными функциями параметра η. В том случае, когда определенные посредством равенств /40/ операторы $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ зависят полиномиально от η, т.е. когда $a_p^{(s)} = \hat{a}_p^{(s)} = 0$, полученная нами матрица $\mathcal{F}$ на основании равенств /47/, /51/ и /53/ также зависит полиномиально от параметра η. Далее, в этом же случае из равенств /47/, /51/ и /53/ следует, что элементы матрицы $\mathcal{F}$ являются полиномами от функций u_0, u_1, v, w и их производных по x.

Пусть теперь

$$\hat{\mathcal{F}} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa} \sum_{r=0}^{m} F_{3r+\kappa}\, \eta^{m-r} + \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{f_p^{(s)}}{(\eta-\eta_s)^{p_s-p+1}}. \qquad /60/$$

Пусть, далее, $\hat{\mathcal{F}}_{\mu,\nu}$ – элемент матрицы $\hat{\mathcal{F}}$, стоящий на пересечении $(\mu+1)$-й строки и $(\nu+1)$-го столбца, $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Путем сравнения равенств /12/, /35/, /40/, /47/ и /60/ получаем, что

$$\mathcal{F}_{0,k} = \hat{\mathcal{F}}_{0k}, \quad \mathcal{F}_{3,k} = \hat{\mathcal{F}}_{3,k}, \quad k = 0,1,2,3. \qquad /61/$$

Отсюда с учетом /16/, /34/ и /51/ вытекает, что

$$\mathcal{F}_{1,0} = \hat{\mathcal{F}}_{1,0} + \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa} \left(F_{\kappa,0,2}\, \eta^{m+1} - F_{3(m+1)+\kappa,0,2}\right) + \sum_{s=1}^{s_0} f^{(s)}_{p_s,0,2}, \quad \mathcal{F}_{1,k} = \hat{\mathcal{F}}_{1,k}, \quad k = 1,2,3. \qquad /62/$$

Аналогичным образом с помощью /16/, /34/ и /53/ получаем

$$\mathcal{F}_{2,0} = \hat{\mathcal{F}}_{2,0} + \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa} \left(F_{\kappa,1,2}\, \eta^{m+1} - F_{3(m+1)+\kappa,1,2}\right) + \sum_{s=1}^{s_0} f^{(s)}_{p_s,1,2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{F}_{1,0} - \hat{\mathcal{F}}_{1,0}\right),$$

$$\mathcal{F}_{2,1} = \hat{\mathcal{F}}_{2,1} + \mathcal{F}_{1,0} - \hat{\mathcal{F}}_{1,0}, \quad \mathcal{F}_{2,2} = \hat{\mathcal{F}}_{2,2}, \quad \mathcal{F}_{2,3} = \hat{\mathcal{F}}_{2,3}. \qquad /63/$$

Из равенств /19/, /20/, /25/, /26/ и /28/-/32/ имеем

$$F_{0,0,2} = F_{0,1,2} = F_{1,0,2} = F_{2,1,2} = 0, \quad F_{1,1,2} = F_{2,0,2} = 1. \qquad /64/$$

Таким образом, в силу /19/ и /60/-/64/ справедливо равенство

$$\mathcal{F} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa} \sum_{r=0}^{m+1} F_{3r+\kappa-3}\, \eta^{m-r+1} + \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{f_p^{(s)}}{(\eta-\eta_s)^{p_s-p+1}} - \rho\, \tilde{\Gamma}_0 - \sigma \Gamma_1, \qquad /65/$$

где

$$\rho = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa}\, F_{3(m+1)+\kappa,0,2} - \sum_{s=1}^{s_0} f^{(s)}_{p_s,0,2},$$

$$\sigma = \rho' + \sum_{m=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{2} c_{m,\kappa}\, F_{3(m+1)+\kappa,1,2} - \sum_{s=1}^{s_0} f^{(s)}_{p_s,1,2}. \qquad /66/$$

На основе /16/ и /34/ нетрудно убедиться, что при подстановке /65/ в /59/ получаются уравнения /45/.

3. Преобразование Миуры. Возьмем теперь оператор

$$L = \partial + P, \qquad /67/$$

где матрица P имеет вид

$$P = \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & q \\ p_2 & 0 & p_1 & q \\ p_1 & p_2 & 0 & q \\ w & w & w & 0 \end{vmatrix}, \qquad /68/$$

и рассмотрим уравнение

$$(L - \zeta \Lambda)\Phi = 0, \qquad /69/$$

причем матрица Λ определена посредством равенства /25/. Положим

$$\phi_1=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3, \quad \phi_2=\Phi_1+\lambda\Phi_2+\lambda^2\Phi_3, \quad \phi_3=\Phi_1+\lambda^2\Phi_2+\lambda\Phi_3; \quad \psi=\Phi_4. \qquad /70/$$

Тогда согласно /67/-/70/ имеем

$$\phi_1'+q_1\phi_1+3q\psi=\zeta\phi_2, \quad \phi_2'+q_2\phi_2=\zeta\phi_3,$$

$$\phi_3'+q_3\phi_3=\zeta\phi_1, \quad \psi'+w\phi_1=0,$$

где

$$q_1=p_1+p_2, \quad q_2=\lambda^2 p_1+\lambda p_2, \quad q_3=\lambda p_1+\lambda^2 p_2. \qquad /71/$$

Отсюда следует, что пара функций

$$\phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3, \quad \psi=\Phi_4 \qquad /72/$$

удовлетворяет системе уравнений

$$D_3\phi+3D_2(q\psi)=\zeta^3\phi, \quad \psi'+w\phi=0, \qquad /73/$$

где

$$D_2=(\partial+q_3)\cdot(\partial+q_2), \quad D_3=D_2(\partial+q_1). \qquad /74/$$

С помощью /71/, /73/ и /74/ нетрудно убедиться, что определенная посредством /72/ пара функций $h=(\phi,\psi)$ удовлетворяет уравнению /2/, если $\eta=\zeta^3$, и выполняются равенства

$$u_0=p_1^3+p_2^3+3(p_1+p_2)qw-6q'w-3qw'-$$

$$-(p_1+p_2)[(1-\lambda^2)p_1'+(1-\lambda)p_2']+p_1''+p_2'', \qquad /75/$$

$$u_1=-3p_1p_2+(1-\lambda)p_1'+(1-\lambda^2)p_2'-3qw,$$

$$v=3[(p_1^2-p_1p_2+p_2^2+\lambda^2p_1'+\lambda p_2')q-(p_1+p_2)q'+q''].$$

Равенства /75/ определяют преобразование, которое связывает рассматриваемый ниже класс нелинейных эволюционных уравнений с уравнениями /45/. Это преобразование аналогично известному преобразованию Миуры, которое устанавливает связь между уравнением Кортевега-де Вриза и модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза.

Оператор L вида /67/ порождает нелинейные эволюционные уравнения, получаемые следующим образом. Пусть A_0' - диагональная матрица с не зависящими от x диагональными элементами. Определим матрицы A_m' при $m>0$ так, чтобы выполнялось равенство

$$[\Lambda, A_m']-[P, A_{m-1}']-\frac{\partial A_{m-1}'}{\partial x}=0. \qquad /76/$$

Равенство /76/ однозначно определяет матрицы A_m' с номером $m>0$, если наложить дополнительное условие

$$A_m'\equiv 0 \quad \text{при} \quad P\equiv 0, \quad m>0. \qquad /77/$$

При этом согласно результатам работы[5] элементы матрицы A_m' при $m>0$ будут полиномами от элементов матрицы P и ее производных по x.

Пусть теперь матрица J имеет вид

$$J=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad /78/$$

Тогда на основании /25/, /68/ и /78/ имеем

$$J^{-1}\Lambda J=\lambda\Lambda, \quad [J,P]=0. \qquad /79/$$

Возьмем теперь произвольное целое число κ и положим $A_{0,\kappa}=\Lambda^\kappa$. С учетом /79/ легко получаем, что определяемые соотношением /76/ и условием /77/ матрицы $A_{m,\kappa}$ удовлетворяют равенству

$$J^{-1}A_{m,\kappa}J=\lambda^{\kappa-m}A_{m,\kappa}, \quad m\geq 0. \qquad /80/$$

Пусть, далее, $\Phi=\Phi(x,\zeta)$ - фундаментальная матрица решений уравнения /69/, удовлетворяющая при некотором $x=x_0$ и произвольном $\zeta\in\mathbf{C}$ условию $\Phi=E$. Тогда в силу /79/ справедливо равенство

$$J^{-1}\Phi(x,\zeta)J=\Phi(x,\lambda\zeta).$$

Из этого равенства следует, что матрица

$$A^{(s)}=\Phi C^{(s)}\Phi^{-1}, \quad \frac{\partial C^{(s)}}{\partial x}=0, \qquad /81/$$

удовлетворяет условию

$$J^{-1}A^{(s)}(\zeta)J=\lambda^{\mu_s}A^{(s)}(\lambda\zeta), \qquad /82/$$

если матрица $C^{(s)}=C^{(s)}(\zeta)$, входящая в /81/, удовлетворяет условию

$$J^{-1}\, C^{(s)}(\zeta)\, J = \lambda^{\mu_s}\, C^{(s)}(\lambda\zeta)\,.$$

Положим

$$A^{(0)} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \zeta^p\,.$$

Тогда на основании /82/ имеем

$$J^{-1}\alpha_p J = \lambda^{\mu_0 + p}\alpha_p\,. \qquad /83/$$

Возьмем теперь произвольную точку $\zeta_s \in \mathbf{C}$, $\zeta_s \neq 0$, $s = 1,\dots,s_0$, и положим

$$A^{(s)} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p^{(s)}(\zeta-\zeta_s)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p^{(s)}(\zeta-\lambda\zeta_s)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p^{(s)}(\zeta-\lambda^2\zeta_s)^p\,.$$

С помощью /82/ имеем

$$J^{-1}\alpha_p^{(s)} J = \lambda^{\mu_s+p}\beta_p^{(s)},\quad J^{-1}\beta_p^{(s)} J = \lambda^{\mu_s+p}\gamma_p^{(s)},\quad J^{-1}\gamma_p^{(s)} J = \lambda^{\mu_s+p}\alpha_p^{(s)}. \qquad /84/$$

Пусть, наконец,

$$\mathcal{A}^* = \sum_{m=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{2} c^*_{m,\kappa} \sum_{r=0}^{3m+\kappa} A_{r,\kappa}\,\zeta^{3m+\kappa-r} + \sum_{p=0}^{p_0}\frac{\alpha_p}{\zeta^{p_0-p+1}} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{s_0}\sum_{p=0}^{p_s}\left\{\frac{\alpha_p^{(s)}}{(\zeta-\zeta_s)^{p_s-p+1}} + \frac{\beta_p^{(s)}}{(\zeta-\lambda\zeta_s)^{p_s-p+1}} + \frac{\gamma_p^{(s)}}{(\zeta-\lambda^2\zeta_s)^{p_s-p+1}}\right\}. \qquad /85/$$

Из равенств /80/, /83/ и /84/ легко следует, что определенная посредством /85/ матрица $\mathcal{A}^*$ удовлетворяет условию

$$J^{-1}\mathcal{A}^*(\zeta)\, J = \mathcal{A}^*(\lambda\zeta), \qquad /86/$$

если существуют целые числа q_s, такие, что

$$\mu_s + p_s + 1 = 3q_s\,,\quad s = 0,1,\dots,s_0\,.$$

В силу /86/ условие совместности $[T^*, X^*]=0$ операторов T^* и X^* вида

$$T^* = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}^*\,,\quad X^* = L - \zeta\Lambda$$

корректным образом определяет следующее нелинейное эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial x} - [P, \mathcal{A}^*] + \zeta[\Lambda, \mathcal{A}^*] = 0\,. \qquad /87/$$

Равенства /75/ устанавливают связь между уравнениями /43/ и /87/. Действительно, на основании /86/ матрица $\mathcal{A}^*$ имеет следующую структуру:

$$\mathcal{A}^* = \begin{vmatrix} a_0(\zeta) & a_1(\zeta) & a_2(\zeta) & a_3(\zeta) \\ a_2(\lambda\zeta) & a_0(\lambda\zeta) & a_1(\lambda\zeta) & a_3(\lambda\zeta) \\ a_1(\lambda^2\zeta) & a_2(\lambda^2\zeta) & a_0(\lambda^2\zeta) & a_3(\lambda^2\zeta) \\ a_4(\zeta) & a_4(\lambda\zeta) & a_4(\lambda^2\zeta) & a_5(\zeta) \end{vmatrix},$$

где $a_0,\dots,a_5$ – рациональные функции параметра ζ, причем $a_5(\zeta) = a_5(\lambda\zeta)$. Согласно /87/ фундаментальную матрицу решений уравнения /69/ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathcal{A}^*\Phi = 0\,.$$

Отсюда следует, что определенные посредством /72/ функции ϕ и ψ удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{k=0}^{2} a(\lambda^k\zeta)\,\Phi_{k+1} + b(\zeta)\psi = 0\,,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{k=0}^{2} c(\lambda^k\zeta)\,\Phi_{k+1} + d(\zeta)\psi = 0\,, \qquad /88/$$

где

$$a(\zeta) = a_0(\zeta) + a_1(\lambda^2\zeta) + a_2(\lambda\zeta),$$

$$b(\zeta) = a_3(\zeta) + a_3(\lambda\zeta) + a_3(\lambda^2\zeta),$$

$$c(\zeta) = a_4(\zeta)\,,\qquad d(\zeta) = a_5(\zeta).$$

Очевидно, что функции $b = b(\zeta)$ и $d = d(\zeta)$ удовлетворяют соотношениям

$$b(\zeta) = b(\lambda\zeta),\quad d(\zeta) = d(\lambda\zeta).$$

С помощью /69/-/72/ находим

$$\Phi_1 = \frac{1}{3}\phi + \frac{1}{3\zeta}L_1 + \frac{1}{3\zeta^2}L_2\,,$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{3}\phi + \frac{1}{3\lambda\zeta} L_1 + \frac{1}{3\lambda^2\zeta^2} L_2 ,$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{3}\phi + \frac{1}{3\lambda^2\zeta} L_1 + \frac{1}{3\lambda\zeta^2} L_2 ,$$

где

$$L_1 = \phi' + q_1\phi + 3q\psi ,$$

$$L_2 = \phi'' - q_3\phi' + (q_1 q_2 + q_1' - 3qw)\phi + 3(q' + q_2 q)\psi .$$

Таким образом, из /88/ вытекают уравнения

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{k=0}^{2} f_k \frac{\partial^k\phi}{\partial x^k} + f_3\psi = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{k=0}^{2} g_k \frac{\partial^k\phi}{\partial x^k} + g_3\psi = 0 , \qquad /89/$$

где f_k и g_k – рациональные функции параметра ζ, удовлетворяющие условиям

$$f_k(\zeta) = f_k(\lambda\zeta), \quad g_k(\zeta) = g_k(\lambda\zeta), \quad k = 0,1,2,3. \qquad /90/$$

Равенства /90/ означают, что функции f_k и g_k в действительности являются рациональными функциями параметра $\eta = \zeta^3$. Далее, при выполнении условий /75/, как уже отмечалось ранее, пара функций $h = (\phi,\psi)$ удовлетворяет уравнению /2/. Следовательно, оператор $\mathfrak{A}$ вида

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{2} f_k\partial^k & f_3 \\ \sum_{k=0}^{2} g_k\partial^k & g_3 \end{vmatrix}$$

таков, что уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathfrak{A}h = 0$$

в силу /89/ имеет фундаментальную систему решений

$$H = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \psi_0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} ,$$

которая образована решениями уравнения /2/. Отсюда следует, что существует зависящий рационально от параметра η оператор $\mathfrak{B}$ требуемой структуры, который вместе с оператором $\mathfrak{A}$ удовлетворяет /43/. Из этих рассуждений вытекает следующая

Теорема. При замене /75/ любое уравнение вида /87/ переходит в уравнение вида /43/.

Доказательство этой теоремы весьма сходно с доказательством аналогичного утверждения в работе[7] и поэтому опущено. Справедливость этого утверждения для приводимых ниже примеров может быть проверена непосредственно.

4. Примеры. Возьмем матрицу $\mathcal{F}$ следующего вида:

$$\mathcal{F} = \eta F_0 + F_3 - \rho\tilde{\Gamma}_0 - \sigma\Gamma_1 ,$$

где $\rho = F_{6,0,2}$, $\sigma = \rho' + F_{6,1,2}$. На основании /19/ и /34/ получаем

$$\mathcal{F} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & v \\ -vw & 0 & 0 & v' \\ -2v'w - vw' & -vw & 0 & v'' \\ u_1 w + w'' & -w' & w & \eta \end{vmatrix} .$$

В этом случае система /45/ имеет вид

$$\dot{u}_0 + 3(v'w)' = 0, \quad \dot{u}_1 + 3(vw)' = 0,$$

$$\dot{v} = u_0 v + u_1 v' + v''' , \quad \dot{w} = -u_0 w + (u_1 w)' + w''' . \qquad /91/$$

Система /91/ имеет два инвариантных многообразия, определяемых равенствами

$$u_0 = \frac{1}{2}u', \quad u_1 = u , \quad w = \pm v .$$

Движение на этих многообразиях определяется уравнениями

$$\dot{u} \pm 6vv' = 0, \quad \dot{v} = \frac{1}{2}u'v + uv' + v''' . \qquad /92/$$

Возьмем теперь матрицу $\mathcal{F}$ вида

$$\mathcal{F} = c\eta F_{-1} + cF_2 - \rho\tilde{\Gamma}_0 - \sigma\Gamma_1 ,$$

$\mathcal{F}_{1,1} = \frac{\partial \mathcal{F}_{0,1}}{\partial x} + \mathcal{F}_{0,0} - \mathcal{F}_{0,1} u_0$

где $\rho = cF_{5,0,2}$, $\sigma = \rho' + cF_{5,1,2}$. Непосредственно с помощью /19/ и /34/ получаем

$$\mathcal{F} = c \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u_1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}u_1' - u_0 + \eta & -\frac{1}{3}u_1 & 0 & -v \\ \frac{2}{3}u_1'' - u_0' + vw & \frac{1}{3}u_1' - u_0 + \eta & -\frac{1}{3}u_1 & -v' \\ w' & -w & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Система /45/ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{u}_0 = \frac{2c}{3} u_1 u_1' + 2c(vw)' - cu_0'' + \frac{2c}{3} u_1''' , \\ &\dot{u}_1 = -2cu_0' + cu_1'' , \\ &\dot{v} + \frac{2c}{3} u_1 v + cv'' = 0, \qquad \dot{w} = \frac{2c}{3} u_1 w + cw'' . \end{aligned} \qquad /93/$$

Из первых двух уравнений этой системы удается исключить u_0 и получить уравнение для $u = \frac{2}{3}u_1$ вида

$$\ddot{u} + c^2 \left(u^2 + \frac{8}{3} vw + \frac{1}{3} u''\right)'' = 0 .$$

Полагая, далее, $c = i$, а $w = \pm\bar{v}$, в результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned} &\ddot{u} - \left(u^2 \pm \frac{8}{3} |v|^2 + \frac{1}{3} u''\right)'' = 0, \\ &i\dot{v} = uv + v'' . \end{aligned} \qquad /94/$$

В заключение необходимо отметить, что все уравнения вида /45/ обладают рядом замечательных свойств. Все они допускают бесконечномерную группу симметрий и, как следствие, имеют несколько бесконечных серий локальных законов сохранения. Детальному рассмотрению этих вопросов, а также применению метода обратной задачи к нахождению решений этих уравнений /в частности, уравнений /92/ и /94// будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C.S. et al. Phys.Rev.Lett., 1967, 19, No.19, p.1095-1097.
2. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. УМН, 1976, XXXI, вып.1, с.55-136.
3. Теория солитонов /под ред. С.П.Новикова/. "Наука", М., 1980.
4. Solitons (ed. by R.K.Bullough, P.J.Caudrey). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
5. Мельников В.К. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.5, с.1224-1272.
6. Мельников В.К. Матем.сб., 1979, 108, с.378-392.
7. Мельников В.К. ОИЯИ, Р2-81-205, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 февраля 1982 года.

Мельников В.К. Р2-82-129

Некоторые новые нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи

Найдены новые нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи. Метод, примененный для нахождения этих уравнений, в существенной части является новым.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Mel'nikov V.K. P2-82-129

Several New Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Method of Inverse Problem

Several new nonlinear evolution equations solvable by the method of inverse problem are found. To a great extent the method used for finding these equations is new.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982