объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-82-121

А.С.Гальперин*, Л.Б.Литов, В.А.Сорока**

ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА ГРУППЫ USp(N)-РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ЗАРЯДАМИ

Направлено в "Journal of Physics, A".

* ИЯФ АН УзССР, г.Ташкент.
** ХФТИ АН УССР, г.Харьков.

1982

I. Алгебра N - расширенной суперсимметрии [1,2] может быть непротиворечиво обобщена путем включения центральных зарядов [3]. В этом случае антикоммутаторы супералгебры приобретают вид[x)]

$$\{ Q^I_\alpha , \bar{Q}_{\dot\beta L} \} = \delta^I_L (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu , \tag{I.I}$$

$$\{ Q^I_\alpha , Q^L_\beta \} = \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{Z}^{IL} , \tag{I.2}$$

$$\{ \bar{Q}_{\dot\alpha I}, \bar{Q}_{\dot\beta L} \} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} Z_{IL} , \tag{I.3}$$

где Q^I_α и $\bar{Q}_{\dot\alpha I} = (Q^I_\alpha)^+$ –генераторы спинорных трансляций, P_μ –генераторы импульса и $Z_{IL} = -Z_{LI} = (\bar{Z}^{IL})^+$– центральные заряды. Индексы $I, L = 1,2,\dots,N$ отвечают некоторому представлению группы внутренней симметрии, чья структура будет фиксирована ниже. Согласно [3] центральные заряды должны коммутировать со всеми генераторами супералгебры, включая и генераторы внутренней симметрии.

Если $Z_{IL} = 0$, то максимальной возможной группой внутренней симметрии является группа $U(N)$ [3]. В этом случае известен полный набор операторов Казимира супералгебры: P^2, квадрат вектора суперспина [4,2] и соответствующее суперсимметричное обобщение операторов Казимира группы $U(N)$ [2,5]. В настоящей работе мы приводим операторы Казимира для супералгебры N –расширенной суперсимметрии с центральными зарядами и группой внутренней симметрии $USp(N) = Sp(N,C) \cap U(N)$ ($N = 2,4,6,8,\dots$) (см., например,[7]) – максимально возможной для каждого заданного четного N группой при наличии центральных зарядов[xx)] и при условии, что спинорные генераторы Q^I_α и $\bar{Q}_{\dot\alpha I}$ преобразуются по фундаментальному представлению группы внутренней симметрии.

Изложим кратко соображения, по которым это представляет интерес. Возможность включения в алгебру расширенной суперсимметрии центральных зарядов поначалу рассматривалась как математический курьез. Затем было обнаружено уменьшение размерности неприводимых представлений групп расширенной суперсимметрии при наличии центральных зарядов [8], что

---

x) Принятые нами обозначения приведены в Приложении.

xx) Отметим, что для группы $O(2)$ –расширенной суперсимметрии с центральными зарядами операторы Казимира в системе покоя получены в работе [6].

приводит к более экономным теориям, построенным на их основе. Наконец, недавно было показано, что центральные заряды играют фундаментальную роль при формулировке $N=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса и $N=2$ супергравитации /9,10/: понятие представления с центральным зарядом сохраняется и при включении взаимодействия. Значение центральных зарядов будет, по-видимому, увеличиваться вместе с ростом N. Операторы Казимира супералгебры расширенной суперсимметрии с центральными зарядами можно использовать как для классификации ее представлений, так и для нахождения ковариантных суперполевых уравнений движения /11/.

Из соотношений (I.2), (I.3) следует, что центральные заряды преобразуются группой внутренней симметрии как компоненты антисимметричного тензора /12/ (согласно /3/ они должны быть ее инвариантами). Вследствие этого выбор возможного вида группы внутренней симметрии сильно ограничен. (Имеющиеся возможности перечислены в работе /12/.) Так, для четных N максимальной возможной группой внутренней симметрии является симплектическая группа $USp(N)$, оставляющая инвариантным антисимметричный метрический тензор Ω_{IL}, который можно представить в виде

$$\Omega_{IL}=\delta_{il}\varepsilon_{ab}\ ,\quad \Omega^{IL}=\delta^{il}\varepsilon^{ab}\ ,\quad \Omega^{IK}\Omega_{KL}=\delta^{I}_{L}\ , \tag{I.4}$$

где $I=(i,a)\ ,\ L=(l,b)\quad (i,l=1,2,\ldots,N/2\ ;\ a,b=1,2)$

и δ_{il}, δ^{il}, δ^{I}_{L} – обычные символы Кронекера, а ε_{ab}, ε^{ab} – единичные антисимметричные тензоры (их определение дано в Приложении). В этом случае центральные заряды имеют вид

$$Z_{IL}=\Omega_{IL}(z_1+iz_2)\ ,\quad \overline{Z}^{IL}=-\Omega^{IL}(z_1-iz_2), \tag{I.5}$$

где эрмитовы заряды z_1 и z_2 коммутируют с генераторами T_{IL} группы $USp(N)$, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$[\,T_{IK},T_{LM}]=-i\,(\Omega_{IM}T_{KL}+\Omega_{KL}T_{IM}+\Omega_{IL}T_{KM}+\Omega_{KM}T_{IL}) \tag{I.6}$$

и обладающими следующими свойствами по отношению к перестановке индексов и эрмитовскому сопряжению x):

$$T_{IK}=T_{KI}\ ,\quad (T_{IK})^{+}=T^{IK}=\Omega^{IL}\Omega^{KM}T_{LM}\ .$$

---

x) Отметим, что $USp(2)\cong SU(2)$. Переход к привычным изовекторным обозначениям генераторов $SU(2)$ осуществляется с помощью матриц Паули $(\sigma_q)_I{}^K$: $T_q=-\frac{i}{4}(\sigma_q)_I{}^K\,T_{KL}\,\Omega^{IL}$; $[T_q,T_r]=i\varepsilon_{qrs}T_s$.

Соотношения (I.I)-(I.3), выраженные через биспинорные генераторы

$$S^{I}_{\alpha}=\begin{pmatrix}\overline{Q}^{I}_{\dot\alpha}\\ Q^{I}_{\alpha}\end{pmatrix},$$

удовлетворяющие $USp(N)$-ковариантному условию Майорана

$$\overline{S}^{\alpha}_{I}\equiv\overline{S^{I}_{\alpha}}=\Omega_{IK}\,(C^{-1}\gamma_5)^{\alpha\beta}S_{\beta}{}^{K}\ ,$$

с учетом (I.4),(I.5) принимают следующий вид:

$$\{\,S^{I}_{\alpha},\overline{S}^{\beta}_{K}\}=\delta^{I}_{K}\,(P.\gamma+z_1+i\gamma_5 z_2)_{\alpha}{}^{\beta}. \tag{I.7}$$

Генераторы S^{I}_{α} преобразуются по фундаментальному N-мерному представлению группы $USp(N)$:

$$[\,T^{IK},S^{L}_{\alpha}]=i\,(\Omega^{IL}S^{K}_{\alpha}+\Omega^{KL}S^{I}_{\alpha}),$$

и по спинорному представлению группы Лоренца:

$$[\,M_{\mu\nu},S^{I}_{\alpha}]=i\,(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}S^{I}_{\beta},$$

где $\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$. Мы не выписываем явно остальные хорошо известные перестановочные соотношения супералгебры.

2. Очевидными операторами Казимира рассматриваемой супералгебры являются P^2 и центральные заряды z_1 и z_2. В зависимости от того, какие собственные значения принимают эти инвариантные операторы, мы будем в дальнейшем различать два типа представлений, для которых собственно $P^2\neq Z^2$ и $P^2=Z^2$, где $Z^2=z_1^2+z_2^2$. Рассмотрим сначала случай $P^2\neq Z^2$.

Для обобщения на случай центральных зарядов понятия суперспина /4,2/ введем модифицированный вектор суперспина.

$$\widetilde{J}^{\mu}=J^{\mu}-\frac{1}{2(P^2-Z^2)}\,\overline{S}_I\gamma_5\Big[\frac{1}{2}(P^{\mu}\gamma^{\nu}-P^{\nu}\gamma^{\mu})+(z_1-i\gamma_5 z_2)\sigma^{\mu\nu}\Big]P_\nu S^{I}, \tag{2.I}$$

где $J^{\mu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}P_\nu M_{\rho\lambda}$ – вектор Паули-Любанского. Оператор $\widetilde{J}^{\mu}$ преобразуется генераторами момента $M_{\mu\nu}$ как лоренцевский вектор и коммутирует со всеми остальными генераторами рассматриваемой группы. Следовательно, его квадрат является оператором Казимира. На представлениях с $P^2=m^2>0$ собственные значения $\widetilde{J}^2$ равны $m^2 Y(Y+1)$, где Y – целое или полуцелое число, называемое суперспином. Действительно, продольная компонента вектора $\widetilde{J}^{\mu}$ равна нулю, $P.\widetilde{J}=0$, а его ортогональные поперечные компоненты $Y^{n}=\frac{n^{(n)}_{\mu}}{m}\widetilde{J}^{\mu}$, где $n^{(n)}_{\mu}n^{(m)\mu}=-\delta^{nm}$ $(n,m=1,2,3)$, образуют алгебру $SU(2)$:

$$[\,Y^{m},Y^{n}]=i\,\varepsilon^{mnl}Y^{l}.$$

Аналогично для обобщения квантовых чисел группы внутренней симметрии /2/ нужно ввести модифицированные генераторы внутренней симметрии $\tilde{T}_{IK}$:

$$\tilde{T}_{IK} = T_{IK} + \frac{i}{2(P^2-Z^2)}\left[\bar{S}_I(P\cdot\gamma - Z_1 + i\gamma_5 Z_2)S_K + \right.$$
$$\left. + \bar{S}_K(P\gamma - Z_1 + i\gamma_5 Z_2)S_I\right]. \qquad (2.2)$$

Операторы $\tilde{T}_{IK}$ коммутируют со всеми, кроме T_{IK}, генераторами супералгебры и удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и генераторы T_{IK}, что определяет спектр собственных значений соответствующих им операторов Казимира /7/:

$$C_p = \tilde{T}_{I_1}{}^{I_2}\,\tilde{T}_{I_2}{}^{I_3}\dots\tilde{T}_{I_p}{}^{I_1} \qquad (p=2,4,\dots,N),$$

где $\tilde{T}_I{}^K = \Omega^{KL}\tilde{T}_{IL}$.

Рассмотрим теперь представления, для которых собственные значения инвариантных операторов P^2, Z_1 и Z_2 связаны соотношением $P^2=Z^2$. В случае таких представлений матрица в правой части антикоммутатора (I.7) становится вырожденной и ее ранг уменьшается вдвое. Выраженное через величины /6/

$$Q^i_\alpha = (e^{i\gamma_5\frac{\theta}{2}})_\alpha{}^\beta(S^{i1}_\beta + i S^{i2}_\beta),$$

где $Z_1 + i\gamma_5 Z_2 = Z e^{i\gamma_5\theta}$, в системе покоя $\vec{P}=0$ и в стандартном представлении для γ-матриц (см. Приложение) соотношение (I.7) диагонализуется:

$$\{Q^i_\alpha,(Q^k_\beta)^+\} = \delta^{ik}\begin{pmatrix}(m+Z)I & 0\\ 0 & (m-Z)\end{pmatrix},$$

$$\{Q^i_\alpha, Q^k_\beta\} = \{(Q^i_\alpha)^+,(Q^k_\beta)^+\} = 0, \qquad (2.3)$$

переходя в алгебру операторов рождения и уничтожения. Из (2.3) следует, что операторы Q^i_α и $(Q^i_\alpha)^+$ с α = 3,4 в представлении с $P^2=Z^2$ имеют нулевые матричные элементы. Выраженные через имеющие ненулевые матричные элементы в рассматриваемом представлении генераторы спинорных трансляций Q^i_α и $\bar{Q}^\alpha_i = (Q^i_\alpha)^+$ с α = I,2, модифицированные вектор суперспина $\tilde{J}^\mu$ и суперсимметричные генераторы внутренней симметрии $\tilde{T}_{IK}$ имеют вид

$$\tilde{J}^n = mM^n - \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{k=1}^{N/2}\bar{Q}^\alpha_k(\sigma^n)_\alpha{}^\beta Q_{\beta k}\ ; \quad \tilde{J}^0 = 0 \qquad (n=1,2,3); \qquad (2.4)$$

$$\tilde{T}_{ia;kb} = T_{ia;kb} + \delta_{ik}1\!\!1_{ab} - \frac{1}{4m}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\bar{Q}^\alpha_i Q_{\alpha k}(1+\tau_2)_{ab} + \right.$$
$$\left. + \bar{Q}^\alpha_k Q_{\alpha i}(1-\tau_2)_{ab} + Q^\alpha_i Q_{\alpha k}(\tau_1 + i\tau_3)_{ab} + \bar{Q}^\alpha_i \bar{Q}_{\alpha k}(\tau_1 - i\tau_3)_{ab}\right]; \qquad (2.5)$$

где $Q^\alpha_i = \varepsilon^{\alpha\beta}Q^i_\beta$, $\bar{Q}_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta}\bar{Q}^\beta_k$;

$(\sigma^n)_\alpha{}^\beta$ и $(\tau)_{ab}$ – обычные матрицы Паули, а $M^n = -\frac{1}{2}\varepsilon^{onkl}M_{kl}$ – оператор момента в системе покоя.

Спектр собственных значений построенных из величин (2.4) и (2.5) операторов Казимира $\tilde{J}^2$ и C_p остается таким же, как и в случае представлений с $P^2 \neq Z^2$, так как можно убедиться, что операторы (2.4) и (2.5) по-прежнему удовлетворяют коммутационным соотношениям для генераторов групп $SU(2)$ и $USp(N)$ соответственно. Однако структура состоящей из генераторов J^μ, T_{IK}, S^I_α, P_μ, Z_1 и Z_2 малой группы импульса P_μ изменяется при переходе от представлений с $P^2 \neq Z^2$ к представлениям с $P^2 = Z^2$. Это выражается в уменьшении ранга матрицы в правой части антикоммутатора (I.7) (или (2.3)), что приводит к уменьшению вдвое числа операторов рождения и уничтожения. Вследствие этого неприводимые мультиплеты, для которых $P^2 \neq Z^2$, при предельном переходе к представлениям с $P^2 = Z^2$ становятся приводимыми и распадаются на несколько неприводимых представлений меньшей размерности /8/. Этот замечательный факт позволяет, по крайней мере на массовой поверхности, строить неприводимые представления группы N -расширенной суперсимметрии с центральными зарядами исходя из неприводимых представлений группы $2N$ -расширенной суперсимметрии без центральных зарядов /13,5/.

Отметим, что похожая ситуация имеет место в группе Пуанкаре, когда при предельном переходе $0 < P^2 \to 0$ малая группа импульса, меняя свою структуру, переходит от группы $SU(2)$ для вектора обычного спина J^μ в группу движения двумерной плоскости $E(2)$. Приводимость представлений, осуществляющаяся при таком переходе, составляет основу описания безмассовых частиц со спином и соответствующих им калибровочных полей. Последнее обстоятельство делает заманчивым продолжить указанную аналогию, исследуя возможность введения калибровочной идеологии в группе расширенной суперсимметрии с центральными зарядами в случае выполнения соотношения $\rho^2=Z^2$, когда в общем случае $\rho^2\neq 0$.

Уменьшение размерности неприводимых представлений группы расширенной суперсимметрии при наложении условия $P^2=Z^2$ весьма существенно при построении согласованных схем расширенной супергравитации.

В заключение авторы благодарят Д.В. Волкова, Е.А. Иванова, В.И. Огиевецкого и Э. Сокачева за полезные обсуждения в ходе работы.

Приложение

Мы придерживаемся следующих обозначений. Сигнатура метрического тензора $g_{\mu\nu}=(1,-1,-1,-1)$, а компоненты антисимметричного тензора $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ выбраны так, что $\varepsilon^{0123}=1$. Используются двухкомпонентные спиноры с точечными и бесточечными индексами, поднятие и опускание которых осуществляется по правилам

$$Q^\alpha=\varepsilon^{\alpha\beta}Q_\beta\,,\quad Q_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}Q^\beta\,,\quad \bar Q^{\dot\alpha}=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar Q_{\dot\beta}\,,\quad \bar Q_{\dot\alpha}=\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar Q^{\dot\beta}$$

с помощью антисимметричного тензора

$$\varepsilon^{\alpha\beta}=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}=-\varepsilon_{\alpha\beta}=-\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}=(\varepsilon)_{\alpha\beta}\,,\quad \varepsilon^{12}=1.$$

Релятивистские матрицы Паули выбраны в виде

$$(\sigma^\mu)_{\dot\alpha\beta}=(1,-\vec\sigma)\,,\quad (\tilde\sigma^\mu)^{\alpha\dot\beta}=(1,\vec\sigma)_{\alpha\dot\beta}\,,$$

где $\vec\sigma$ – векторные матрицы Паули.

Спинорные представления γ^μ -матриц Дирака

$$\gamma^\mu=\begin{pmatrix}0 & \sigma^\mu\\ \tilde\sigma^\mu & 0\end{pmatrix}\,,\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\,,\quad C=\begin{pmatrix}-\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$$

связаны со стандартными соотношениями $\gamma_{ст}=X\gamma_{сп}X^{-1}$, $C_{ст}=XC_{сп}X^T$ с помощью матрицы $X=\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_5)$, где γ_0 и γ_5 взяты в спинорном представлении. Дираковское сопряжение определено как $\bar S=(S)^+\gamma_0$.

Индексы группы $USp(N)$ поднимаются и опускаются метрическим тензором Ω:

$$S^I=\Omega^{IK}S_K\,,\quad S_I=\Omega_{IK}S^K.$$

Литература

I. Волков Д.В., Акулов В.П. Письма ЖЭТФ, I972, I6, 62I; Phys.Lett., I973, B46, I09.
2. Salam A., Strathdee J. Nucl.Phys., 1974, B76, 477; Nucl.Phys., 1974, B80, 499.
3. Haag R., Lopuszanski I., Sohnius M.F. Nucl.Phys., 1975, B88, 257.
4. Лихтман Е.П. Препринт ФИАН СССР, № 4I, Москва, I97I.
5. Rittenberg V., Sokatchev E. Bonn preprint HE-81-5.
6. Freedman D.Z. In: Recent Development in Gravitation. eds M.Levy and S.Deser. Plenum, New York, 1979, p.549.
7. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения, т.I, М., "Мир", I980.
8. Sohnius M.F. Nucl.Phys., 1978, B138, 109.
9. Stelle K.S., West P.C. Phys.Lett., 1980, 90B, 393.
10. Sohnius M.F., Stelle K.S., West P.C. Nucl.Phys., 1980, B173, 127.
11. Ogievetsky V.I., Sokatchev E. J.Phys. A, 1977, 10, 2021.
12. Ferrara S., Savoy C.A., Zumino B. Phys.Lett., 1981, B100, 393.
13. Fayet P. Nucl.Phys., 1979, B149, 137.

Рукопись поступила в издательский отдел
I5 февраля I982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Гальперин А.С., Литов Л.Б., Сорока В.А.

P2-82-121

Операторы Казимира группы $USp(N)$ -расширенной суперсимметрии с центральными зарядами.

Построены операторы Казимира группы N -расширенной суперсимметрии с центральными зарядами и группой внутренней симметрии $USp(N)$ $(N=2,4,6,8,\dots)$. Обсуждаются неприводимые представления этой группы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Galperin A.S., Litov L.B., Soroka V.A.

P2-82-121

Casimir Operators of $USp(N)$ of Extended Supersymmetry Group with Central Charges

Casimir operators for N-extended supersymmetry group with central charges and internal symmetry group $USp(N)$ $(N=2,4,6,8,\dots)$ are constructed. Irreducible representations of this group are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.