

сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

2644/82

2/6-82

P2-82-118

Г.С.Погосян, Я.А.Сморodinский, В.М.Тер-Антонян

МНОГОМЕРНЫЙ ИЗОТРОПНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР:  
ПЕРЕХОДЫ ОТ ДЕКАРТОВОГО БАЗИСА  
К ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИМ

1982

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе решена задача о взаимных переходах между декартовым и произвольным гиперсферическим базисом  $p$ -мерного изотропного осциллятора. Матрица перехода от декартового базиса к сферическому для кругового и трехмерного изотропного осцилляторов была вычислена в работах <sup>1,2</sup>.

С математической точки зрения знание матриц, реализующих эти переходы, примечательно тем, что оно открывает путь для выяснения трансформационных свойств гиперсферических гармоник при конечных вращениях, если, конечно, известно поведение декартового базиса при таких вращениях. Последнее было выяснено в работе <sup>3</sup>, где было введено понятие об осцилляторной функции Вигнера как о матричном элементе оператора  $p$ -мерных конечных вращений по декартовому осцилляторному базису и дан наглядный диаграммный метод ее построения.

Рассматриваемая нами задача может оказаться полезной и в физических приложениях, т.к. аппарат гиперсферических гармоник широко используется во многих теоретических подходах, принятых в настоящее время в ядерной физике низких энергий <sup>4</sup>.

## §1. ОБЩАЯ ФОРМУЛА

Рассмотрим  $p$ -мерный изотропный осциллятор с массой  $m$  и циклической частотой  $\omega$ . Обозначим волновые функции такого осциллятора в декартовом базисе через  $\Psi_{\vec{n}}(\vec{x})$ , где  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$ . Очевидно, что  $\Psi_{\vec{n}}(\vec{x})$  равна произведению волновых функций  $p$  линейных осцилляторов. В произвольном гиперсферическом базисе

$$\Psi_{N, \vec{l}}(\vec{r}, \vec{\theta}) = R_{N, \vec{l}_1}(\vec{r}) Y_{\vec{l}}(\vec{\theta}),$$

где  $N = n_1 + \dots + n_p$ ,  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{p-1})$ ,  $\vec{l} = (l_1, \dots, l_{p-1})$ ,  $l_1$  - глобальный момент,  $l_2, \dots, l_{p-1}$  - гипермоменты. Радиальная волновая функция  $R_{N, \vec{l}_1}(\vec{r})$  имеет вид

$$R_{N, \vec{l}_1}(\vec{r}) = \left\{ \frac{2a^p \Gamma\left(\frac{N + \vec{l}_1 + p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N - \vec{l}_1 + 1}{2}\right)} \right\}^{1/2} \frac{(\alpha r)^{\vec{l}_1}}{\Gamma(\vec{l}_1 + \frac{p}{2})} e^{-\frac{a^2 r^2}{2}} {}_1F_1\left(-\frac{N - \vec{l}_1}{2}, \vec{l}_1 + \frac{p}{2}; a^2 r^2\right),$$

где  $a = (m\omega/\hbar)^{1/2}$ .

Представим искомое нами разложение декартового осцилляторного базиса по гиперсферическому следующим равенством:

$$\Psi_{\vec{n}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{\ell}} W_{\vec{n}}^{N, \vec{\ell}} \Psi_{N, \vec{\ell}}(r, \vec{\theta}). \quad /1/$$

Пределы изменения  $\vec{\ell}$  определяются условием  $N = \text{const}$  и структурой гиперсферического дерева. Прделаем с разложением /1/ следующие операции: умножим его на  $r^{-N}$ , устремим все  $x_i$  к бесконечности, затем полученное предельное равенство умножим на  $Y_{\vec{\ell}}^*(\vec{\theta})$ , проинтегрируем по телесному углу и воспользуемся условием ортонормируемости гиперсферических гармоник

$$\int Y_{\vec{\ell}}^*(\vec{\theta}) Y_{\vec{\ell}'}(\vec{\theta}) d\Omega = \delta_{\vec{\ell} \vec{\ell}'}$$

После этого придем к общей для всех гиперсферических систем координат формуле

$$W_{\vec{n}}^{N, \vec{\ell}} = K \cdot \int d\Omega Y_{\vec{\ell}}^*(\vec{\theta}) \prod_{i=1}^p (\hat{x}_i)^{n_i} \quad /2/$$

в которой введено обозначение  $\hat{x}_i = x_i / r$ , а множитель  $K$  равен

$$K = \frac{(-1)^{\frac{N-l_1}{2}}}{\sqrt{2}^p \pi^{p/4}} \left\{ \frac{2^N \Gamma(\frac{N-l_1}{2} + 1) \Gamma(\frac{N+l_1+p}{2})}{(n_1)! (n_2)! \dots (n_p)!} \right\}^{l/2} \quad /3/$$

Для вычисления матрицы перехода /2/ необходимо иметь явный вид функций  $Y_{\vec{\ell}}(\vec{\theta})$  и  $\hat{x}_i(\vec{\theta})$ , а также формулу, выражающую элемент телесного угла  $d\Omega$  через произведение дифференциалов  $d\theta_1, \dots, d\theta_{p-1}$ .

Согласно работе /5/ всякой гиперсферической системе координат и соответствующей ей гиперсферической гармонике удобно поставить в соответствие определенный граф, называемый гиперсферическим деревом. В  $p$ -мерном пространстве любое дерево имеет  $p-1$  вершин и с каждой из этих вершин связана своя ячейка. Ячейки в общем случае могут быть четырех типов. Вклад каждой из этих ячеек в функции  $Y_{\vec{\ell}}(\vec{\theta})$ ,  $\hat{x}_i(\vec{\theta})$  и  $d\Omega(\theta)$  наиболее компактно представлен в табл. 1.

В первой строке таблицы приведены типы ячеек, во второй - пределы изменения углов, связанных с каждой из них. Параметры  $v_c$  и  $v_s$  означают число вершин, которые находятся выше основания ячейки, т.е. вершины с гипермоментом  $\ell$ , слева и справа от него. Числа  $N_c$  и  $N_s$  из последней строки таблицы равны суммам декартовых квантовых чисел  $n_i$ , которыми наделены свободные концы, "произрастающие" слева и справа от основания ячейки, причем для свободных концов  $N_c = n_c$ ,  $N_s = n_s$ . Функции, приведенные в четвертой строке таблицы, имеют вид

$$f_{l_s, v_s}^{s; l}(\theta) = (N_{l-l_s})^{a_s - 1/2} (\sin \theta)^{l_s} F_{l-l_s}^{a_s, a_s}(\cos \theta), \quad /4/$$

$$f_{l_c, v_c}^{c; l}(\theta) = (N_{l-l_c})^{a_c - 1/2} (\cos \theta)^{l_c} P_{l-l_c}^{a_c, a_c}(\sin \theta), \quad /5/$$

$$f_{l_c, v_c; l_s, v_s}^{c, s; l} = 2^{\frac{a_c + a_s}{2} + 1} (N_{l-l_s-l_c})^{a_s - 1/2} (\cos \theta)^{l_c} (\sin \theta)^{l_s} P_{l-l_s-l_c}^{a_s, a_c}(\cos 2\theta), \quad /6/$$



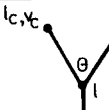
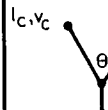
где  $P_n^{a, b}(x)$  - полиномы Якоби, а остальные обозначения таковы:

$$a_s = l_s + \frac{v_s - 1}{2}, \quad a_c = l_c + \frac{v_c - 1}{2},$$

$$N_n^{a, \beta} = \frac{2^{a+\beta+1} \Gamma(n+a+1) \Gamma(n+\beta+1)}{2n+a+\beta+1 \Gamma(n+1) \Gamma(n+a+\beta+1)}, \quad N_n^a \equiv N_n^{a, a}$$

В формуле /6/ индекс  $l-l_s-l_c$  обязан быть четным, в противном случае считается, что левая часть /6/ обращается в нуль.

Таблица 1

				
$\theta$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$	$0 \leq \theta \leq \pi$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$d\Omega$	$d\theta$	$(\sin \theta)^{v_s} d\theta$	$(\cos \theta)^{v_c} d\theta$	$(\sin \theta)^{v_s} (\cos \theta)^{v_c} d\theta$
$Y_{\vec{\ell}}(\vec{\theta})$	$e^{i\ell\theta} / \sqrt{2\pi}$	$f_{l_s, v_s}^{s; l}(\theta)$	$f_{l_c, v_c}^{c; l}(\theta)$	$f_{l_c, v_c; l_s, v_s}^{c, s; l}(\theta)$
$\prod_{i=1}^{p-1} \hat{x}_i$	$(\sin \theta)^{n_s} (\cos \theta)^{n_c}$	$(\sin \theta)^{N_s} (\cos \theta)^{N_c}$	$(\sin \theta)^{N_c} (\cos \theta)^{N_c}$	$(\sin \theta)^{N_s} (\cos \theta)^{N_c}$

## §2. ВКЛАДЫ ЯЧЕЕК В МАТРИЦУ ПЕРЕХОДА

Согласно приведенной в предыдущем пункте таблицы каждая ячейка вносит в матрицу перехода /2/ следующий вклад:

$$F_{n_c, n_s}^{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{n_c} (\sin \theta)^{n_s} e^{-i\ell\theta} d\theta, \quad /7/$$

$$F_{n_c, n_s}^{s; l}(\ell_s, v_s) = \int_0^\pi (\cos \theta)^{n_c} (\sin \theta)^{N_s + v_s} f_{\ell_s, v_s}^{s; l}(\theta) d\theta, \quad /8/$$

$$F_{N_c, n_s}^{c; l}(\ell_c, v_c) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta)^{N_c + v_c} (\sin \theta)^{n_s} f_{\ell_c, v_c}^{c; l}(\theta) d\theta, \quad /9/$$

$$F_{N_c, N_s}^{c; s; l}(\ell_c, v_c; \ell_s, v_s) = \frac{1+(-1)^{\ell-l_s-\ell_c}}{2} R_{N_c, N_s}^{c, s; l}(\ell_c, v_c; \ell_s, v_s), \quad /10/$$

$$R_{N_c, N_s}^{c, s; l}(\ell_c, v_c; \ell_s, v_s) = \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{N_c + v_c} (\sin \theta)^{N_s + v_s} f_{\ell_c, v_c; \ell_s, v_s}^{s, c; l}(\theta) d\theta. \quad /11/$$

Покажем, что интегралы /7/-/9/ приводятся к интегралу /11/. Начнем с интеграла /7/, соответствующего ячейке со свободными концами. Разобьем в нем интервал интегрирования на интервалы  $(0, \pi)$  и  $(\pi, 2\pi)$  и сделаем во втором интеграле замену  $\phi = \theta - 2\pi$ . Тогда, учитывая, что

$$\cos \ell \phi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (N_\ell^{-1/2}) P_{\ell}^{-1/2, -1/2}(\cos \phi),$$

$$\sin \ell \phi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (N_\ell^{1/2}) P_{\ell-1}^{-1/2, 1/2}(\cos \phi),$$

и возвращаясь к /8/, получим

$$F_{n_c, n_s}^{\ell} = \frac{1+(-1)^{n_s}}{2} F_{n_c, n_s}^{s; l}(0,0) - i \frac{1-(-1)^{n_s}}{2} F_{n_c, n_s}^{s, l}(1,0). \quad /12/$$

Далее, интегралы /8/ и /9/ после аналогичных операций и использования формулы

$$(N_k^a)^{-1/2} P_k^{a, a}(x) = \frac{1+(-1)^k}{2} 2^{\frac{a}{2} + \frac{1}{4}} (N_{k/2}^{a, -1/2})^{-1/2} P_{k/2}^{a, -1/2}(2x^2 - 1) + \frac{1-(-1)^k}{2} 2^{\frac{a}{2} + \frac{3}{4}} (N_{\frac{k-1}{2}}^{a, 1/2})^{-1/2} P_{\frac{k-1}{2}}^{a, 1/2}(2x^2 - 1)$$

принимают вид

$$F_{n_c, N_s}^{s; l}(\ell_s, v_s) = \left[ 1+(-1)^{\ell-l_s+n_c} \right] \left\{ \frac{1+(-1)^{\ell-l_s}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} R_{n_c, N_s}^{c, s; l}(0,0; \ell_s, v_s) + \frac{1-(-1)^{\ell-l_s}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} R_{n_c, N_s}^{c, s; l}(1,0; \ell_s, v_s) \right\}, \quad /13/$$

$$F_{N_c, n_s}^{c; l}(\ell_c, v_c) = (-1)^{\frac{\ell-l_c}{2}} [1+(-1)^{\ell-l_c+n_s}] \left\{ \frac{1+(-1)^{\ell-l_c}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} R_{N_c, n_s}^{c, s; l}(\ell_c, v_c; 0,0) - \right.$$

$$\left. - i \frac{1-(-1)^{\ell-l_c}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} R_{N_c, n_s}^{c, s; l}(\ell_c, v_c; 1,0) \right\}. \quad /14/$$

Рассмотрим теперь интеграл /11/. Переходя к переменной  $x = \cos 2\theta$ , расписывая полином Якоби согласно формуле Родрига, заменяя затем в интеграле  $x$  на  $-x$  и имея в виду интегральное представление для коэффициентов Клебша-Гордана /6/,

$$C_{a, b}^{c, \gamma} = \left\{ \frac{(2c+1)\Gamma(c+\gamma+1)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(a+b+c+2)}{\Gamma(a-b+c+1)\Gamma(a-a+1)\Gamma(a+a+1)\Gamma(b+\beta+1)\Gamma(b-\beta+1)\Gamma(c-\gamma+1)\Gamma(b+c-a+1)} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{a+b+c+1}} \int_{-1}^1 dx (1-x)^{a-a} (1+x)^{b-\beta} \left( \frac{d}{dx} \right)^{c-\gamma} \{ (1-x)^{c+b-a} (1+x)^{c-b+a} \},$$

получим

$$R_{N_c, N_s}^{c, s; l}(\ell_s, v_c; \ell_s, v_s) = \frac{N_c + \ell_s - \ell}{2} J_{a, a; b, \beta}^c C_{a, a; b, \beta}^{c, \gamma}. \quad /15/$$

где

$$J_{a, a; b, \beta}^c = \left\{ \frac{\Gamma(a-a+1)\Gamma(b+\beta+1)\Gamma(-b-\beta+1)\Gamma(a+a+1)}{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(a+b+c+2)} \right\}^{1/2}, \quad /16/$$

а индексы  $c, \gamma$  и т.д. имеют вид

$$c = \frac{\ell}{2} + \frac{v_c + v_s}{4} - \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{\ell_c + \ell_s}{2} + \frac{v_c + v_s}{4} - 1/2,$$

$$a = \frac{N_c + N_s + \ell_s - \ell_c}{4} + \frac{v_s - 1}{4}, \quad \alpha = \frac{\ell_s + \ell_c}{4} + \frac{N_s - N_c}{4} + \frac{v_s - 1}{4},$$

$$b = \frac{N_c + N_s + \ell_c - \ell_s}{4} + \frac{v_c - 1}{4}, \quad \beta = \frac{\ell_s + \ell_c}{4} + \frac{N_c - N_s}{4} + \frac{v_c - 1}{4}. \quad /17/$$

Итак, интеграл /11/ выражается через коэффициенты Клебша-Гордана группы  $SU(2)$ , если формально их распространить на четвертьцелые значения момента.  $3j$ -символы с четвертьцелыми значениями встречаются и в других задачах /7,8/. Причина возникновения четвертьцелых моментов и связь соответствующих им  $3j$ -символов с аналогичными объектами группы  $Sp(2, R)$  были выяснены в работе /9/.

Выразим коэффициенты Клебша-Гордана в формуле /15/ через обобщенные гипергеометрические функции  ${}_3F_2$ :

$$C_{a,a;b,\beta}^{c,\gamma} \delta_{\gamma,a+\beta} \left\{ \frac{(2c+1)\Gamma(a+a+1)\Gamma(b-\beta+1)\Gamma(c+\gamma+1)\Gamma(c-\gamma+1)\Gamma(a-b+c+1)\Gamma(c+b-a+1)}{\Gamma(a-a+1)\Gamma(b+\beta+1)\Gamma(a+b+c+2)\Gamma(a+b-c+1)} \right\}^{1/2} \times \frac{1}{\Gamma(c-b+a+1)\Gamma(c-a-\beta+1)} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -a-b+c, -a+a, -b-\beta \\ -a+c-\beta+1, -b+c+a+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}.$$

Тогда вместо /15/ будем иметь

$$R_{N_c, N_s}^{c,s;l}(\ell_c, v_c; \ell_s, v_s) = (-1)^{\frac{N_c + \ell_s - l}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N_s - \ell_s + 1}{2}) \Gamma(\frac{N_s + \ell_s}{2} + \frac{v_s + 1}{2})}{\Gamma(\frac{N_s + N - l}{2} + 1) \Gamma(\frac{N_c + N_s + l}{2} + \frac{v_c + v_s + 1}{2})} \times \left\{ \frac{(\ell + \frac{v_s + v_c}{2}) \Gamma(\frac{\ell + \ell_s + \ell_c}{2} + \frac{v_c + v_s}{2}) \Gamma(\frac{\ell + \ell_s - \ell_c}{2} + \frac{v_s + 1}{2}) \Gamma(\frac{\ell - \ell_s - \ell_c}{2} + 1) \Gamma(\frac{\ell + \ell_c - \ell_s}{2} + \frac{v_c + 1}{2})}{\Gamma(\frac{\ell - N_c + \ell_s}{2} + \frac{v_s + 1}{2}) \Gamma(\frac{\ell - N_c - \ell_s}{2} + 1)} \right\}^{1/2} \times {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} \frac{N_s + N_c - l}{2}, \frac{\ell_c - N_c}{2}, \frac{N_c + \ell_c}{2}, \frac{v_c - 1}{2} \\ \frac{\ell - N_c - \ell_s}{2} + 1, \frac{\ell - N_c + \ell_s}{2} + \frac{v_s + 1}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right\}$$

и в результате подстановки убедимся в справедливости тождеств

$$R_{N_c, N_s}^{c,s;l}(0,0; \ell_s, v_s) = R_{N_c, N_s}^{c,s;l}(1,0; \ell_s, v_s),$$

$$R_{N_c, N_s}^{c,s;l}(\ell_c, v_c; 0,0) = i R_{N_c, N_s}^{c,s;l}(\ell_c, v_c; 1,0).$$

Из этих тождеств следует, что формулы /12/-/14/ можно записать в более компактном виде:

$$F_{N_c, N_s}^{\ell} = \frac{1+(-1)^{\ell+n_c+n_s}}{\sqrt{2}} R_{N_c, N_s}^{c,s;l}(0,0;0,0), \quad /18/$$

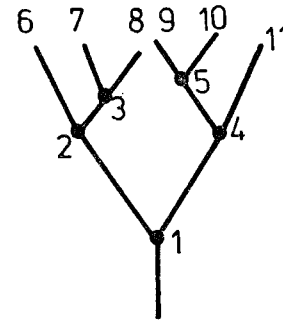
$$F_{N_c, N_s}^{s;l}(\ell_s, v_s) = \frac{1+(-1)^{\ell-\ell_s+n_c}}{\sqrt{2}} R_{N_c, N_s}^{c,s;l}(0,0; \ell_s, v_s), \quad /19/$$

$$F_{N_c, N_s}^{c,\ell}(\ell_c, v_c) = (-1)^{\frac{\ell-\ell_c}{2}} \frac{1+(-1)^{\ell-\ell_c+n_s}}{\sqrt{2}} R_{N_c, N_s}^{c,s;l}(\ell_c, v_c; 0,0). \quad /20/$$

Таким образом, вклады всех четырех типов ячеек в матрицу перехода вычислены. Они даются формулами /15/ и /18/-/20/. Поэтому перейдем к обсуждению вопроса о том, как по этим результатам вычислить саму матрицу перехода.

### §3. ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА

Сопоставим матрице перехода  $W_{\Pi}^{N,\ell}$  так называемое дерево перехода, которое по своей конструкции идентично соответствующему гиперсферическому дереву с той лишь разницей, что теперь вершине приписываются не гипермомент и число  $v$ , а гипермомент, число  $v$  и квантовое число  $N$ , равное сумме декартовых квантовых чисел  $n_i$ , которыми наделены свободные концы, "произрастающие" из этой вершины.



Например, в шестимерном пространстве возможно дерево перехода, изображенное на рисунке. С каждой вершиной мы связали ее порядковый номер, который в подробной записи означает тройку чисел; так,  $1 = (\ell_1 v_1 N_1)$ ,  $7 = (0, n, 7, 0)$  и т.д.

Проследим за вкладом коэффициентов /16/ в приведенное дерево перехода. Для упрощения формул обозначим этот коэффициент через  $J(m, q, r)$ , где  $m$ ,  $q$  и  $r$  - порядковые числа в данной ячейке, причем  $m$  относится к основанию, а  $q$  и  $r$  - к вышестоящей от него левой и правой вершине. Очевидно,  $v_m = v_q + v_r + 1$ , и поэтому согласно /16/

$$J(m, q, r) = \frac{f(q)f(r)}{f(m)},$$

где функция  $f$  имеет вид

$$f(i) = \left\{ \Gamma\left(\frac{N_i - \ell_i}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{N_i + \ell_i}{2} + \frac{v_i + 1}{2}\right) \right\}^{1/2}.$$

Полный вклад коэффициентов /16/ в приведенное дерево равен произведению факторов  $J(m, q, r)$ , и легко убедиться, что

$$\prod J(m, q, r) = \frac{1}{f(1)} \prod_{k=6}^{11} f(k),$$

т.е. в окончательный результат входит лишь информация о свободных концах и основании дерева перехода. Аналогичный вывод справедлив и для любого  $P$ -мерного дерева перехода. Отсюда

следует, что для произвольного дерева

$$\Pi J(m, q, r) = \frac{\pi^{p/4}}{2^{N/2}} \left\{ \frac{(n_1)! (n_2)! \dots (n_p)!}{\Gamma\left(\frac{N-l_1}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{N+l_1}{2}+\frac{p}{2}\right)} \right\}^{1/2}$$

Сравнивая эту формулу с формулой /3/, приходим к выводу, что общий вклад коэффициентов /16/ в любое дерево перехода сокращается с точностью фазового множителя и фактора  $1/\sqrt{2}$  с коэффициентом  $K$  в /3/. По этой причине их не следует учитывать и на промежуточных этапах, т.е. в пределах данной ячейки.

Обозначим через  $j$ ,  $t$  и  $q$  число свободных, частично-свободных и закрытых ячеек на дереве перехода. Очевидно,  $2j+t=q$ ,  $j+t+q=p-1$ , откуда  $j=q+1$ , и поэтому при учете формул /10/, /15/ и /18/-/20/ и заложенных в них правил четности можно сформулировать следующее правило построения матрицы перехода. Сначала чертится дерево перехода и проставляются на нем тройки чисел  $(l_i, N_i, v_i)$ . Затем каждой ячейке в зависимости от того, к какому типу она принадлежит, ставится в соответствие ее вклад согласно табл.2.

Таблица 2

$\frac{(-1)^{n_c-l}}{\sqrt{2}} C_{aa;b\beta}^{c\gamma}$	$(-1)^{\frac{n_c+l_s-l}{2}} C_{aa;b\beta}^{c\gamma}$	$(-1)^{\frac{N_c-l_c}{2}} C_{aa;b\beta}^{c\gamma}$	$(-1)^{\frac{N_c+l_s-l}{2}} C_{aa;b\beta}^{c\gamma}$
$l_c = l_s = v_c = v_s = 0$	$l_c = v_c = 0$	$l_s = v_s = 0$	

Последний этап - это перемножение выписанных в табл.2 вкладов с учётом конструкции дерева перехода. В окончательный ответ необходимо еще ввести в качестве множителя фактор  $(-1)^{\frac{N-l_1}{2}}$ , где  $l_1$  - глобальный момент, а  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ .

Из приведенных правил следует, что формально матрица перехода для любого дерева может быть записана в виде

$$W_{\vec{n}}^{N, \vec{l}} = \frac{(-1)^{\frac{N-l_1}{2}}}{2^{t/2}} \prod_{i=1}^{p-1} (-1)^{Q_i} C_{a_i b_i}^{c_i \gamma_i}$$

где  $l$  - число ячеек со свободными концами,  $Q_i$  для каждой ячейки определяется степенью, в которую возводится  $(-1)$  перед коэффициентами Клебша-Гордана в табл.2, а произведение берется по

всем вершинам. В случае канонического дерева  $j=1$ ,  $v_{c_i}=0$  и, как легко показать,  $v_{s_i}=p-i-1$ ,  $\sum Q_i = (N-l_1-p)/2$ , где  $i$  - порядковый номер вершины, считая от основания дерева.

Тот факт, что ячейкам со свободными концами соответствует добавочный фактор, равный  $1/\sqrt{2}$ , понятен и из следующих рассуждений. В частично-свободных и закрытых ячейках гипермоменты и соответствующие им числа  $N_i$  имеют одинаковую четность, и поэтому проекции моментов  $\alpha$  и  $\beta$  в /17/ изменяются с шагом, равным единице, и пробегают все допустимые значения. Для ячеек со свободными концами такого правила четностей нет, и поэтому шаг в  $\alpha$  и  $\beta$  равен  $1/2$ . Это приводит к тому, что в последнем случае значения проекций  $\alpha$  и  $\beta$  группируются в два подмножества, в каждом из которых шаг равен единице, и каждое из которых является полным в том смысле, что он охватывает все дозволённые значения проекций. По этой причине для коэффициентов Клебша-Гордана, соответствующих ячейкам со свободными концами, условие ортонормировки принимает вид

$$\sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{aa,b\beta}^{c\gamma} C_{aa,b\beta}^{c\gamma} = 2\delta_{cc'}$$

Из этой формулы следует, что добавочный фактор  $1/\sqrt{2}$  в первом столбце табл.2 призван для того, чтобы "восстановить" стандартную ортонормированность вкладов от ячеек со свободными концами.

Учитывая сказанное, легко показать, что для любого дерева матрица перехода подчиняется условию ортонормированности

$$\sum_{n_1+\dots+n_p=N} W_{\vec{n}}^{N, \vec{l}} W_{\vec{n}}^{*N, \vec{l}'} = \delta_{\vec{l}\vec{l}'}, \quad /21/$$

как это и должно быть исходя из общих соображений. Отсюда следует, что матрица обратного перехода, т.е. перехода от гиперсферического базиса к декартовому, равна  $W_{\vec{n}}^{*N, \vec{l}}$ , а само обратное преобразование имеет вид

$$\Psi_{N, \vec{l}}(\vec{r}, \vec{\theta}) = \sum_{n_1+\dots+n_p=N} W_{\vec{n}}^{*N, \vec{l}} \Psi_{\vec{n}}(\vec{x})$$

В работе /10/ было выяснено, что в некоторых частных случаях возможно вырождение коэффициентов Клебша-Гордана в D-функции Вигнера. Именно с таким случаем мы сталкиваемся, когда имеем дело с ячейкой со свободными концами. Действительно, можно показать, что

$$F_{n_c, n_s}^l = (-1)^{\frac{n_s}{2}} \sqrt{2} \left\{ \frac{(n_c)! (n_s)!}{\pi^2 \left(\frac{n_c+n_s+l}{2}\right)! \left(\frac{n_c+n_s-l}{2}\right)!} \right\}^{1/2} d_{\frac{l}{2}, \frac{n_c-n_s}{2}}^{\frac{n_c+n_s}{2}}(\pi/2)$$

Эта формула заимствована нами из работы /1/. С другой стороны, из /15/ и /18/ следует, что

$$F_{n_c, n_s}^{\ell} = (-1)^{\frac{n_c - \ell}{2}} \left\{ \frac{(n_c)! (n_s)!}{\pi 2^{n_c + n_s} \left( \frac{n_c + n_s + \ell}{2} \right)! \left( \frac{n_c + n_s - \ell}{2} \right)!} \right\}^{1/2} C_{\frac{n_c + n_s + 1}{4}, \frac{n_s - n_c - 1}{4}; \frac{n_c + n_s - 1}{4}, \frac{n_c - n_s - \ell}{4}}^{\frac{\ell}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$$

Сравнивая последние две формулы, получим

$$C_{a, a; a, \beta}^{c, -1/2} = (-1)^{a - \beta + \gamma - c} \frac{1}{\sqrt{2}} d_{c - \gamma, \beta - a}^{2a - \gamma}(\pi/2),$$

т.е. результат, аналогичный тому, который приводится в работе/10/.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уже отмечалось, что тот факт, что матрица перехода  $W_{\vec{n}}^{N, \vec{\ell}}$  выражается через коэффициенты Клебша-Гордана группы  $Sp(\vec{n}, \mathbb{R})$ , содержащие моменты, кратные  $1/4$ , имеет теоретико-групповое обоснование. В работе/9/ было показано, что построение произвольного гиперсферического осцилляторного базиса из декартового эквивалентно реализации определенной для этого базиса схемы сложения моментов, кратных  $-3/4$  и  $-1/4$ . Схема сложения диктуется структурой соответствующего гиперсферического дерева. В этом смысле некоторая информация о структуре матрицы перехода  $W_{\vec{n}}^{N, \vec{\ell}}$  содержится уже в работе/9/. Однако для получения явного вида  $W_{\vec{n}}^{N, \vec{\ell}}$  одних теоретико-групповых соображений недостаточно и следует привлечь аналитические вычисления, проведенные в настоящей работе. Как мы убедились, такой подход приводит к результату, который удастся оформить в виде сводки простых и конкретных правил.

Мы признательны Г.С.Саакяну и А.Н.Сисакяну за интересные обсуждения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М., Торосян Г.Т. Препринт ПРЛФ-77-04, Ереван, 1977.
2. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, P2-11962, Дубна, 1978.
3. Pogosyan G.S., Smorodinsky Ya.A., Ter-Antonyan V.M. J.Phys.A.Math.Gen., 1981, 14, p.769.
4. Смирнов Ю.Ф., Шитикова К.В. ЭЧАЯ, М., Атомиздат, 1977, т.8, вып.4.
5. Виленкин Н.Я., Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А. ЯФ, 1965, 2, с.906.

6. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
7. Смородинский Я.А., Шелепин Л.А. УФН, 1972, т.108, вып.1.
8. Кильдюшов М.С. ЯФ, 1977, 15, с.197.
9. Кныр В.А., Пипирайте П.П., Смирнов Ю.Ф. ЯФ, 1975, 22, с.1063.
10. Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А. ЯФ, 1977, 25.

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 февраля 1982 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д1,2-9224	IV Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1975.	3 р. 60 к.
Д-9920	Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра. Дубна, 1976.	3 р. 50 к.
Д9-10500	Труды II Симпозиума по коллективным методам ускорения. Дубна, 1976.	2 р. 50 к.
Д2-10533	Труды X Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Баку, 1976.	3 р. 50 к.
Д13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
Д17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
Д6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Погосян Г.С., Смородинский Я.А., Тер-Антонян В.М. P2-82-118  
Многомерный изотропный осциллятор: переходы от декартового базиса к гиперсферическим

При использовании графического метода построения гиперсферических гармоник вычислены матрицы переходов между декартовым и гиперсферическими базисами для многомерного изотропного осциллятора. Показано, что матрицы переходов выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана для группы  $SU(2)$ , продолженные на четвертьцелые значения момента. Предложен также диаграммный метод построения этих матриц для произвольного гиперсферического дерева.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Pogosyan G.S., Smorodinsky Ya.A., Ter-Antonyan V.M. P2-82-118  
Multidimensional Isotropic Oscillator: Transitions between the Cartesian and Hyperspherical Bases

By a diagrammatic method of construction of spherical harmonics we calculate matrices of transitions between the Cartesian and hyperspherical bases of a multidimensional isotropic oscillator. The transition matrices are shown to be expressed in terms of the Klebsch-Gordan coefficients for  $SU(2)$  group, continued onto moments multiple to  $1/4$ . A diagrammatic method is proposed for construction of these matrices for an arbitrary hyperspherical tree.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.