сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-1

Зыонг Ван Фи, Нгуен Монг Зао

ПОПРАВКА К ФУНКЦИИ ГРИНА ФОТОНА

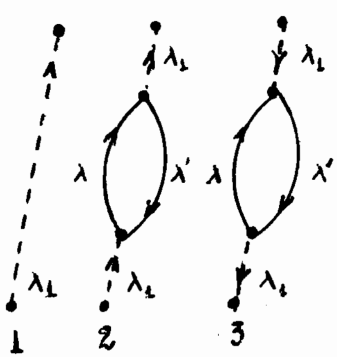
1982

В[1] была рассмотрена собственная энергия свободного фотона в формализме полевой теории в объединенном пространстве во втором порядке теории возмущения. В данной работе рассмотрим диаграммы собственной энергии фотона, которые соответствуют поправкам к гриновской функции $D(\lambda_1^2)$ [1] в четвертом порядке теории возмущения. Функция $D(\lambda_1^2)$ соответствует диаграмме 1 рисунка, а поправки к такой функции, которые будем обозначать через $\delta G(\lambda_1^2)$, соответствуют сумме двух диаграмм 2 и 3 на рисунке.

Здесь мы имеем дело с виртуальными фотонами, которые имеют 8-импульсы $\lambda_1 = (p_1, P_1)$ [1], где p_1 - обычный 4-импульс, а P_1 - внутренний 4-импульс. Величины p_1 и P_1 определяются на основе закона сохранения обычного и внутреннего импульсов: $p_1 = p_e \pm p_{e'}$ и $P_1 = P_e \pm P_{e'}$, где p_e, p_e' - обычные импульсы электрона и позитрона или двух электронов в начальном состоянии; $P_e, P_{e'}$ - их соответствующие внутренние импульсы.

Согласно[2] в случае свободного движения частиц /в начальных и конечных состояниях/ p_e и P_e, так же как $p_{e'}$ и $P_{e'}$, принадлежат двум инвариантным пространствам: пространству Минковского и внутреннему: $p_e^2 = m_e^2 = P_e^2 = \mathrm{const}$, $p_{e'}^2 = m_e^2 = P_{e'}^2 = \mathrm{const}$. Таким образом, $D(\lambda_1^2)$ и $\delta G(\lambda_1^2)$ являются функциями двух инвариантов $s = p_1^2$ и $S = P_1^2$: $D(\lambda_1^2) = D(s,S)$, $\delta G(\lambda_1^2) = \delta G(s,S)$.

Заметим далее, что из лагранжиана типа лагранжиана электромагнитного взаимодействия в[1] и формализма теории взаимодействия в объединенном пространстве[2] /с ориентацией фейнмановских диаграмм/ следует, что в четвертом порядке теории возмущения имеются всего 4!=24 различных диаграмм собственной энергии фотона и среди них только две приведенные на рисунке диаграммы 2 и 3 могут дать ненулевые матричные элементы.



Используя гриновские функции бозонов и фермионов[1], получим для поправки

$$\delta G(\lambda_1^2) = g^4 g_{aa} g_{bb} \frac{\Gamma_a}{\lambda_1^2} \Big\{ \int_{\curvearrowleft} \frac{Sp[\Gamma_a \hat{\lambda} \Gamma_b](\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda})\, \theta(p_0)\theta(p_{10}-p_0)}{(\lambda^2 + i\epsilon)[(\lambda_1-\lambda)^2 + i\epsilon]} d\lambda +$$

$$+ \int_{\curvearrowright} \frac{Sp[\Gamma_a \hat{\lambda} \Gamma_b (\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda})]\theta(p_0)\theta(p_{10}-p_0)}{(\lambda^2 + i\epsilon)[(\lambda_1-\lambda)^2 + i\epsilon]} d\lambda \Big\} \frac{\Gamma_b}{\lambda_1^2}, \qquad /1/$$

где g - константа связи /2/; g_{aa} - метрика объединенного пространства; Γ_a - матрицы спинорного уравнения в объединенном пространстве; $\curvearrowleft$ и $\curvearrowright$ обозначают контуры интегрирования, замыкающиеся соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости внутренней энергии P_0 /2/; $\lambda = (p, P)$; $p = (\vec{p}, p_0)$; $P = (\vec{P}, P_0)$; $\hat{\lambda} = \Gamma^a \lambda_a$. Тогда функция Грина фотона в четвертом порядке теории возмущения может быть представлена в форме

$$G(\lambda_1^2) = D(\lambda_1^2) + \delta G(\lambda_1^2). \qquad /2/$$

При этом $D(\lambda_1^2)$ соответствует диаграмме 1 на рисунке. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\lambda_1^2 > 0$, $s \geq 0$.

Выполнив интегрирования в /1/, получим

$$\delta G(\lambda_1^2) = \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{g^2}{8(2\pi)^7} \Big\{ -\frac{5(s-S)^5}{4s^3} \int_{S+s}^{9-s} \frac{dx}{x} \ln \frac{|x-2S|}{|x+2S|} +$$

$$+ \frac{(s-S)^2 S}{s^3} \Big[-20 \Big(\frac{s^4}{40S^2} - \frac{s^3}{5S} + \frac{381s^2}{320} - \frac{35Ss}{32} + \frac{319S^2}{192} - \frac{15S^3}{16s} -$$

$$- \frac{3155S^4}{192s^2} - \frac{1525S^5}{96s^3} - \frac{411S^6}{64s^4} \Big) \ln \frac{|s-S|}{|s+3S|} + \Big(\frac{s^4}{320S^2} + \frac{s^3}{60S} +$$

$$+ \frac{211s^2}{960} + \frac{9Ss}{32} + \frac{683S^2}{32} + \frac{47S^3}{24s} + \frac{47S^4}{320s^2} + \frac{S^5}{160s^3} + \frac{S^6}{96s^4} \Big) \times$$

$$\times \ln \frac{|s-S|}{|s+S|} - \Big(\frac{s^4}{320S^2} - \frac{s^3}{40S} + \frac{109s^2}{960} - \frac{3Ss}{320} - \frac{197S^2}{320} +$$

$$+ \frac{93S^3}{80s} + \frac{1539S^4}{320s^2} - \frac{1863S^5}{160s^3} + \frac{243S^6}{32s^4} \Big) \ln \frac{|s+3S|}{|s-3S|} -$$

$$- \frac{5}{4S^3} \Big(\frac{13s^5}{10} - \frac{503Ss^4}{10} + \frac{383S^2s^3}{4} - \frac{143S^3s^2}{3} - \frac{457S^4s}{4} +$$

$$+ \frac{1897S^5}{10} - \frac{68S^6}{5s} \Big) \ln \frac{|s+S|}{|s-3S|} - \Big(12Ss^4 - 60S^2s^3 + \frac{520S^3s^2}{3} -$$

$$- 280S^4 s + \frac{1297S^5}{5} - \frac{1556S^6}{15s} \Big) \ln \frac{|s-S||s+3S|}{|s+S||s-3S|} - \frac{20}{S} \Big(\frac{191s^3}{120} + \qquad /3/$$

$$+ \frac{889Ss^2}{360} - \frac{904S^2s}{45} + \frac{2731S^3}{60} - \frac{3871S^4}{45s} - \frac{11S^5}{12s^2} - \frac{13S^6}{12s^2} \Big) \Big] \Big\} -$$

$$- \frac{i}{\lambda_1^2} \frac{5g^2(s-S)^2}{128(2\pi)^3 s^2} \Big[5(s-S)^2 - \frac{248}{15}(S-8s)S \Big].$$

Мнимая часть возникает при $\lambda_1^2 > 0$ и $p_{10} \geq 2m_e$. К этому вопросу мы еще вернемся в дальнейшем при рассмотрении условия унитарности.

В /3/ остается интеграл, который, как известно, нельзя выразить через элементарную функцию. Его обозначим через $I(a)$:

$$I(a) = \int_{1+a}^{1-a} \frac{dy}{y} \ln \frac{y-2}{y+2}, \qquad /4/$$

где $a = \frac{s}{S} \geq 1$.

В таблице представлены значения $I(a)$, приближенно вычисленные по значениям a от 1,1 до 90. При значениях $a > 10^2$ величина $I(a)$ оказывается постоянной. Результатом вычислений является то, что при $10^2 \leq a \leq 10^{10}$ $I(a)$ принимает значение 9,70.

Таблица

a	I,I	I,2	I,3	I,4	I,5	I,6	I,7	I,8	I,9	2,0	2,2
I(a)	2,98	3,47	3,94	4,39	4,86	5,37	5,99	6,II	7,I5	7,48	7,93

a	2,4	2,6	2,8	3,0	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	6,0	7,0
I(a)	8,25	8,48	8,66	8,80	9,0I	9,I5	9,25	9,33	9,36	9,48	9,54

a	8,0	9,0	I0	20	30	40	50	60	70	80	90
I(a)	9,58	9,6I	9,63	9,69	9,70	9,70	9,70	9,70	9,70	9,70	9,70

Выражение /3/ является общим для функции Грина фотона в четвертом порядке теории возмущения при $\lambda_1^2 > 0$. Для оценки поправки $\delta G(\lambda_1^2)$ по сравнению с $D(\lambda_1^2)$ следует рассмотреть ее для конкретного эффекта. Очевидно, что $G(\lambda_1^2)$ можно использовать как пропагатор в случае диаграммы упругого e^+e^--рассеяния во втором приближении, в которой электрон и позитрон входят в начальном состоянии. Эффект упругого e^+e^--рассеяния в первом приближении был вычислен в /2/ и с помощью него можно вывести соотношение между константой g и константой электромагнитного взаимодействия e: $8g^2 m_e^4 = e^2$, где m_e - масса электрона.

Рассмотрим случай малых энергий рассеяния при $s \approx 4m_e^2$. Значение мнимой части, как видно из /3/, мало по сравнению со значением действительной части, причем часть, пропорциональная $I(a)$, пренебрежимо мала. Отсюда можем получить в таком пределе выражение для $\delta G(s,S)$:

$$\delta G(s,S) = \frac{12469\,\alpha}{1536(2\pi)^4 m_e^4}(s-S)\ln\frac{|s-S|}{|s+S|}. \qquad /5/$$

Величина S в /5/ принимает значение в интервале $2m_e^2 \leq S \leq 4m_e^2$, так как $S = (P_{e^-} + P_{e^+})^2$, а P_{e^-0} и P_{e^+0} - положительные величины /2/; α - константа тонкой структуры. В случае высоких энергий поправка принимает вид

$$\delta G(s,S) = \frac{1}{s-S}\left\{\frac{\alpha s^2}{8(2\pi)^4 m_e^4}\left[\frac{s}{S}\ln\frac{|s-S|}{|s-3S|} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{8}\ln\frac{|s-S|\,|s-3S|}{|s+S|\,|s+3S|} - \frac{196}{3}\right] + i\,\frac{25\alpha(s-S)^3}{256(2\pi)^2 m_e^4}\right\}. \qquad /6/$$

Видим, что при малых энергиях поправка оказывается малой. Возьмем, например, $a \leq 2{,}2$, если положим $G(\lambda_1^2) = D(\lambda_1^2)[1 + \delta D(\lambda_1^2)]$, то величина $\delta D(\lambda_1^2)$ принимает значение меньше 10^{-4}. При высоких энергиях поправка становится заметной. Однако для оценки поправки к эффекту упругого e^+e^--рассеяния в этой области энергии следует учитывать другие поправочные диаграммы и затем усреднить выражение по всем возможным значениям S.

Рассмотрим теперь условие унитарности. Если положим S-матрицу в форме $S = 1 + iT$, то из соотношения $S^*S = 1$ имеем

$$\langle f|T|i\rangle - \langle i|T|f\rangle^* = i\langle j|T|f\rangle^*\langle j|T|i\rangle. \qquad /7/$$

Покажем теперь, что это условие для приведенной поправки к функции Грина фотона выполняется. Здесь имеем электрон и позитрон в начальном $|i\rangle$ и в конечном состоянии $|f\rangle$. Промежуточные состояния $|j\rangle$ в связи с электромагнитным взаимодействием тогда будут состояниями этих частиц. Появление состояния $|j\rangle$ в соотношении /7/, как известно, связано со скачком гриновской функции, возникающим из-за того, что контур интегрирования оказывается зажатым между полюсами.

Подынтегральные выражения в /1/ имеют следующие полюса:

$$P_0^{\binom{1}{2}} = \pm\sqrt{p^2 - \vec{P}^2} \pm i\epsilon \quad \text{и} \quad P_0^{\binom{3}{4}} = P_{10} \pm \sqrt{(p_1-p)^2 - (\vec{P}_1 - \vec{P})^2} \pm i\epsilon.$$

Видно, что при $P_{10} = \sqrt{p^2 - \vec{P}^2} + \sqrt{(p-p_1)^2 - (P-P_1)^2}$ контур интегрирования оказывается зажатым между полюсами $P_0^{(1)}$ и $P_0^{(4)}$. Такое зажатие происходит при $(\lambda_1 - \lambda)^2 = 0$, причем $\lambda^2 > 0$ или $P_{10}^2 \geq S$, которое с учетом $\lambda_1^2 > 0$ приводит к требованию $p_{10}^2 \geq 4m_e^2$.

Из /1/ можно показать, что $\delta G(\lambda_1^2) = 0$ при $\lambda_1^2 \leq 0$ и отсюда выводим связь между скачком и мнимой частью:

$$\delta G(\lambda_1^2) = 2i\,\mathrm{Im}\,G(\lambda_1^2). \qquad /8/$$

Используя /8/ и /1/, можем написать для левой части соотношения /7/

$$\langle f|T|i\rangle - \langle i|T|f\rangle^* = -i(2\pi)^{10} V^{(1)}(\lambda_1)V^{(2)}(-\lambda_1) \times$$
$$\times \int d\lambda\, F(\lambda_1,\lambda)\,\theta(P_0)\,\theta(P_{10}-P_0)\,\theta(p_0)\,\delta(\lambda^2)\,\delta[(\lambda_1-\lambda)^2]\,\delta(\lambda_i-\lambda_f). \qquad /9/$$

При этом $F(\lambda_1,\lambda) = 64g^4\lambda_1^4(\lambda_1\lambda)$; $V^{(1)}(\lambda_1)$, $V^2(-\lambda_1)$ - амплитуды начального и конечного состояний. Для правой части /7/, по определению, имеем

$$\langle j|T|f\rangle^*\langle j|T|i\rangle = (2\pi)^{16} M_{ji}^* M_{jf}\,\delta(\lambda_j - \lambda_f)\,\delta(\lambda_j - \lambda_i) =$$
$$= g^4\frac{(2\pi)^{16}}{\lambda_1^4} V^{(1)}(\lambda_1)V^{(2)}(-\lambda_1)V^{(j)}(\lambda_1)V^{(j)}(-\lambda_1)\,\delta(\lambda_j-\lambda_i)\,\delta(\lambda_j-\lambda_f), \qquad /10/$$

где $V^{(j)}$ - амплитуда состояния $|j\rangle$.

Суммируя по всем поляризованным индексам в /10/, получим

$$\langle j|T|f\rangle^*\langle j|T|j\rangle = g^4\frac{(2\pi)^{16}}{\lambda_1^4} V^{(1)}(\lambda_1)V^{(2)}(-\lambda_1) \times$$
$$\times \int \frac{d\vec{\lambda}}{(2\pi)^7\, 2P_0}\,\frac{d\vec{\lambda}'}{(2\pi)^7\, 2P_0'}\,F(\lambda_1,\lambda)\,\theta(p_0)\,\theta(P_{10}-P_0)(2\pi)^8\,\delta(\lambda_j-\lambda_f)\,\delta(\lambda_j-\lambda_i). \qquad /11/$$

Выражение /11/ точно совпадает с /9/ и, следовательно, условие унитарности доказано.

Таким образом, в формализме полевой теории в объединенном пространстве поправка к функции Грина фотона в четвертом порядке теории возмущения вычислена последовательно и результат свободен от расходимостей. При применении этого результата в случае e^+e^--рассеяния получается, что в области малых энергий поправка мала /вне зависимости от S/. При высоких энергиях рассеяния поправка может быть заметной. Однако в этом случае необходимо учитывать поправки всех вышеуказанных приближений. Более того, для оценки поправок следует усреднить выражения для вероятности рассеяния по всем возможным значениям величины S -усреднение на поверхности массы электрона /8/. По этим причинам в настоящей работе оценка поправки в области высоких энергий еще не сделана.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессорам В.А.Мещерякову и А.А.Кузнецову за постоянное внимание к работе, профессору Я.П.Терлецкому за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Duong van Phi, Nguyen Mong Giao. JINR, E2-81-520, Dubna, 1981.
2. Duong van Phi. Cahiers de Physique, Paris, 1967, v.21, p. 101.
3. Nguyen duc Bich, Duong van Phi. Annalen Phys., 1975, v. 32, p. 466.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 января 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Зыонг Ван Фи, Нгуен Монг Зао. Поправка к функции Грина фотона P2-82-1

Используется подход к теории взаимодействия полей в объединенном пространстве для вычисления поправки четвертого порядка теории возмущения к функции Грина фотона. Расчеты оказываются свободными от расходимостей и условие унитарности выполняется. Результаты применяются для e^+e^--рассеяния, сделана оценка поправки в области малых энергий.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Duong Van Phi, Nguyen Mong Giao The Correction of the Photon Green Function P2-82-1

The formalism of interaction field theory in the unified space is used to calculate the photon Green function in the fourth order approximation of perturbation theory. The calculations are free from divergences, and the unitarity condition is satisfied. The result is applied to e^+e^--scattering, and the correction at low energies is estimated.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energy, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.