сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-81-849

Р.М.Ямалеев

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ДЛЯ ЧАСТИЦ С СОБСТВЕННЫМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

1981

Основные динамические величины механики построены на двух фундаментальных свойствах пространственно-временного континуума - на свойствах однородности и изотропности. Свойство однородности приводит к законам сохранения в формах движения, носящих поступательный характер, свойство изотропности соответственно обусловливает сохранение динамических величин во вращательных формах движения. К первой группе сохраняющихся величин относятся энергия и импульс, ко второй - момент импульса и специальный вектор, отвечающий закону сохранения движения центра масс. Следуя работе /1/, этот вектор будем называть моментом энергии *. Характерно не только выделение величин в отдельные совокупности: а/ энергия и импульс, б/ момент импульса и момент энергии, но и полная самостоятельность этих совокупностей и аналогия в их структурах - импульс относится к энергии так же, как момент импульса относится к моменту энергии. Как правило, в физических теориях пользуются только первой частью аналогии, а именно - аналогией между импульсом и моментом импульса. Момент импульса, если выбрать соответствующие обобщенные координаты, можно рассматривать как обобщенный импульс, сопряженный обобщенным координатам. В большинстве случаев это порождало убеждение в том, что структура момента импульса не имеет особого значения для построения теории, поскольку она сводима к известной структуре импульса. Например, структура теории Гамильтона-Якоби /Г-Я/ основана на соотношении между энергией и импульсом, и на том факте, что последние выражаются через скалярную функцию действия. Структура таких величин, как момент импульса и момент энергии, в теории не используется. Момент импульса здесь может появиться лишь в качестве орбитального момента. Если рассматриваются гироскопические системы, теория Г-Я также строится на соотношении между энергией и импульсом, с той лишь разницей, что эти величины определяются в пространстве обобщенных координат - углов Эйлера.

---

* В специальной теории относительности, где пространство и время объединены в одно 4-мерное пространство, сохранение момента энергии обусловлено изотропностью пространства времени относительно поворота в плоскости (x,t).

Теперь рассмотрим систему "летающий гироскоп", т.е. систему, обладающую двумя видами степеней свободы: внутренним и внешним. Внутренние степени свободы - это вращательные степени свободы гироскопа в собственной системе отсчета; внешние степени свободы относятся к движению центра тяжести гироскопа как точечной массы. Для описания движения системы "летающий гироскоп" в рамках формализма Г-Я необходимо вводить функцию действия от шести переменных, три из которых относятся к вращательным /внутренним/, три - к внешним степеням свободы. Квантование такой системы привело бы к уравнению квантовой механики, в данном случае - к уравнению Шредингера, в шестимерном пространстве.

Модель "летающего гироскопа" в предельном случае можно принять за точечную частицу, обладающую собственным угловым моментом /СУМ/. Поэтому с физической точки зрения и согласно принципу соответствия следовало бы ожидать, что частицы с отличным от нуля спином должны иметь в качестве своего классического аналога именно такие классические частицы, т.е. частицы, обладающие СУМ. Если принять такое физическое соответствие, то необходимо разработать и соответствующий формализм классической механики, который, с одной стороны, описывал бы классические частицы с СУМ, с другой - при квантовании переходил бы в соответствующий формализм квантовой механики, описывающий частицы со спином.

В настоящей работе показано, что в принципе такую теорию можно создать, если наряду с уравнением Г-Я на скалярную функцию действия, записанную на основе соотношения между энергией и импульсом, рассматривать систему уравнений на векторную функцию, построенную на основе соотношений между моментом импульса и моментом энергии. В квантовом случае эта система уравнений переходит в уравнения квантовой механики для частиц со спином 1.

1. Соотношения между моментом энергии и моментом импульса в нерелятивистской механике

Основным соотношением классической механики мы будем называть соотношение между энергией и импульсом, которое в нерелятивистской области имеет следующий простой вид:

$$2mE = \vec{p}^2, \qquad /1.1/$$

где E - энергия, $\vec{p}$ - вектор импульса.

С помощью радиуса-вектора $\vec{r}$ и операции векторного и скалярного умножения выражение /1.1/ можно представить в виде системы уравнений, линейных по вектору импульса $\vec{p}$. С этой целью определим вектор момента импульса обычным способом:

$$\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}]. \qquad /1.2/$$

Умножая /1.2/ векторно на $\vec{p}$, получим

$$[\vec{p}\times\vec{M}] = \vec{r}\,p^2 - \vec{p}\,s, \quad s = (\vec{r}\vec{p}). \qquad /1.3/$$

Таким образом, мы приходим к следующей системе однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}], \\ &2mE\vec{r} = [\vec{p}\times\vec{M}] + \vec{p}s, \\ &s = (\vec{r}\vec{p}). \end{aligned} \qquad /1.4/$$

Система /1.4/ содержит /1.1/. Действительно, поскольку мы заведомо предполагаем существование нетривиальных решений /1.4/ /в качестве независимых решений /1.4/ можно выбрать компоненты вектора $\vec{r}$ /, то определитель D системы /1.4/ равен нулю, т.е.

$$D \equiv 2mE - \vec{p}^2 = 0, \qquad /1.5/$$

что доказывает наше утверждение.

Смысл каждого из уравнений /1.4/ ясен: первое определяет момент импульса, второе - момент энергии, который имеет вид

$$\vec{T} = \frac{1}{2m}[\vec{p}\times\vec{M}]. \qquad /1.6/$$

Второе уравнение /1.4/ можно также рассматривать как разделение радиуса-вектора $\vec{r}$ на нормальную и продольную вектору импульса составляющие. При этом

$$\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}, \quad \vec{r}_{\perp} = \frac{1}{2mE}[\vec{p}\times\vec{M}], \quad \vec{r}_{\parallel} = \frac{\vec{p}s}{2mE}, \qquad /1.7/$$

где $\vec{r}_{\perp}$ - нормальная составляющая, $\vec{r}_{\parallel}$ - продольная составляющая вектора $\vec{r}$.

Структура системы /1.4/ тесно связана с процессом факторизации соотношения /1.1/. Чтобы уточнить это высказывание, перепишем /1.4/, используя базис матриц Паули $\hat{\sigma}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ /1/:

$$\begin{aligned} &s + i(\hat{\sigma}\vec{M}) = (\hat{\sigma}\vec{p})(\hat{\sigma}\vec{r}), \\ &2mE(\hat{\sigma}\vec{r}) = (\hat{\sigma}\vec{p})(s + i(\hat{\sigma}\vec{M})). \end{aligned} \qquad /1.8/$$

Подставляя первое во второе или второе в первое, получим

$$2mE = (\hat{\sigma}\vec{p})(\hat{\sigma}\vec{p}), \qquad /1.9/$$

т.е. факторизацию /1.1/ в базисе матриц Паули. Таким образом, определения момента импульса и момента энергии получаются в результате факторизации основного соотношения /1.1/. Появление спиновых матриц $\hat{\sigma}$ в /1.8/ и /1.9/ не случайно: в квантовом случае уравнения /1.8/ определяют структуру уравнений для частиц со спином, в классическом случае, как будет показано далее, они определяют структуру классических уравнений для частиц с СУМ.

2. Роль векторной функции в модифицированной теории Г-Я

Как известно, в теории Г-Я энергия и импульс выражаются через скалярную функцию /функцию действия S /:

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad E = -\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad /2.1/$$

а уравнение на функцию S получается путем подстановки /2.1/ в /1.1/

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}}\right)^2. \qquad /2.2/$$

Если $S = S^*(\vec{x}, \vec{c})$ – решение уравнения Г-Я /2.2/, где $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ – постоянные интегрирования, то траектория движения будет определяться из уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{c}} = -\vec{b}, \qquad /2.3/$$

где $\vec{b}$ – новый постоянный вектор, причем, если в качестве $\vec{c}$ взяты начальные значения координат, то вектор $\vec{b}$ будет соответствовать начальному значению вектора импульса.

Подставим выражение для импульса из /2.1/ в определение момента импульса /1.2/ и вычислим дивергенцию вектора $\vec{M}$:

$$\operatorname{div}\vec{M} = \vec{r}\operatorname{rot}\vec{p} - \vec{p}\operatorname{rot}\vec{r}.$$

Поскольку $\operatorname{rot}\vec{p} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} S) = 0$ и $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$, то

$$\operatorname{div}\vec{M} = 0. \qquad /2.4/$$

Из /2.4/ следует, что момент импульса можно представить как ротор от некоторой векторной функции $\vec{U}$, так что

$$\vec{M} = \operatorname{rot}\vec{U}. \qquad /2.5/$$

Таким образом, аналогично /2.1/, где импульс выражается через скалярную функцию, момент импульса представляется через векторную функцию. Определим заранее, какую роль призвана выполнять векторная функция $\vec{U}$ в теории. Скалярная функция действия позволяет описать траекторию движения классической частицы. Ясно, что частицы, движение которых будет описываться векторной функцией $\vec{U}$, обладают дополнительными внутренними степенями свободы. Для полной конкретизации этих степеней свободы необходимо составить уравнения на функцию $\vec{U}$.

Из сравнения /1.2/ и /2.5/ видно, что существует определенная связь между векторами $\vec{r}$ и $\vec{U}$. Наипростейший вид этой связи очевиден

$$\vec{U} = \vec{r} S + \mathrm{grad}\, f , \qquad /2.6/$$

$f(x,y,z)$ - произвольная функция координат. Выражение /2.6/ показывает, что $\vec{U}$ зависит как от $\vec{r}$, так и от S. Однако, с целью составления уравнения на $\vec{U}$, необходимо определить эту зависимость более конкретно. Мы определим ее следующим образом. Пусть S^*- решение уравнения Г-Я. Тогда определим $\vec{U}(\vec{r},S)$ так, чтобы

$$\vec{U}(\vec{r},t,S(\vec{r},t))|_{S=S^*} = \mathrm{const}. \qquad /2.7/$$

Далее будем рассматривать только такие S, которые являются решением уравнения Г-Я.

Полная производная по x и t от /2.7/ равна нулю, поэтому

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} = -\frac{\partial U_k}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x_\ell}, \quad \frac{\partial U_k}{\partial t} = -\frac{\partial U_k}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t} \; (k, \ell = 1,2,3). \qquad /2.8/$$

Учитывая /2.8/, формулу /2.5/ можно преобразовать так:

$$\vec{M} = \mathrm{rot}\,\vec{U} = [\frac{\partial \vec{U}}{\partial S} \times \frac{\partial S}{\partial \vec{x}}]. \qquad /2.9/$$

Сравнение выражений /1.2/ и /2.9/ приводит к зависимости $\vec{r}$ от $\vec{U}$:

$$\vec{r} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial S} + \alpha p, \qquad /2.10/$$

α - произвольная постоянная.

Подставим /2.10/ в систему /1.4/; принимая во внимание соотношения /2.8/, получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка для $\vec{U}(\vec{x},S)$:

$$\vec{M} = \mathrm{rot}\,\vec{U},$$

$$2m\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = [\vec{p} \times \vec{M}] + \vec{p}s, \qquad s = \mathrm{div}\,\vec{U}. \qquad /2.11/$$

Существуют и другие пути получения уравнений для $\vec{U}$. В частности, они даны в работах [2,3].

Изложенный способ удобен тем, что легко позволяет вводить в уравнения /2.11/ внешнее поле. Введение электромагнитного поля в эту систему будем производить согласно известному способу "удлинения" импульса и энергии:

$$\vec{P} \to \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A},$$

$$E \to E - e\phi, \qquad /2.12/$$

где $(\phi, \vec{A})$ – потенциалы электромагнитного поля. Подставляя /2.12/ в /2.11/, получим

$$\vec{M} = \mathrm{rot}\,\vec{U} + \frac{e}{c}[\vec{A} \times \frac{\partial \vec{U}}{\partial S}],$$

$$2m\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - e\phi\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial S} = [(p + \frac{e}{c}\vec{A}) \times \vec{M}] + (\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})\cdot s, \qquad /2.13/$$

$$s = \mathrm{div}\,\vec{U} + \frac{e}{c}(\vec{A}\,\frac{\partial}{\partial S}\vec{U}).$$

Таков окончательный вид уравнений на $\vec{U}$ с учетом электромагнитного поля. Не имеет смысла пытаться их решать, пока не ясна физическая модель, к описанию которой она пригодна. Не зная физической модели, мы не в состоянии вычислить функцию действия S, поскольку не определен гамильтониан данной задачи. Поэтому мы поступим следующим образом. Заменяя вектор

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

на оператор

$$\vec{\pi}_s = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A}\,\frac{\partial}{\partial S}, \qquad /2.14/$$

преобразуем /2.13/ в соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка. Используя обозначение /2.14/ и вводя оператор

$$\pi_t = \frac{\partial}{\partial t} - e\phi\,\frac{\partial}{\partial S}, \qquad /2.14'/$$

запишем это уравнение в виде системы

$$\vec{M} = [\pi_s \times \vec{w}],$$

$$2m\pi_t\,\frac{\partial}{\partial S}\vec{w} = [\vec{\pi}_s \times \vec{M}] + \vec{\pi}_s\,(\vec{\pi}_s w). \qquad /2.15/$$

Замена вектора импульса $\vec{P}$ на дифференциальный оператор представляет известную процедуру перехода от характеристических уравнений к волновым, осуществляемым в модифицированной теории Г-Я [4]. Она, в отличие от квантовой механики, не выводит за пределы классической механики. Преобразуем уравнение /2.15/, раскрывая двойное векторное произведение. При этом необходимо учесть коммутационные соотношения для операторов π_{xs}, π_{ys}, π_{zs}. Они имеют вид

$$[\pi_{xs},\pi_{ys}] = \frac{e}{c}\mathcal{H}_z\frac{\partial}{\partial S}, \quad [\pi_{ys},\pi_{zs}] = \frac{e}{c}\mathcal{H}_x\frac{\partial}{\partial S}, \qquad /2.16/$$

$$[\pi_{zs},\pi_{xs}] = \frac{e}{c}\mathcal{H}_y\frac{\partial}{\partial S},$$

$\mathcal{H}$ - вектор напряженности магнитного поля.

В результате получим уравнение второго порядка

$$\pi_t\frac{\partial}{\partial S}\vec{w} = \frac{1}{2m}\pi_s^2\vec{w} + \frac{e}{2mc}[\vec{\mathcal{H}}\times\frac{\partial}{\partial S}\vec{w}]. \qquad /2.17/$$

Нетрудно увидеть аналогию /2.17/ с уравнением Паули для спина I. В классическом случае уравнение /2.17/ описывает вышеупомянутую систему "летающий гироскоп" или классическую материальную точку, обладающую СУМ. Чтобы показать это, нам необходимо снова вернуться к уравнениям первого порядка.

Полученное уравнение первого порядка для /2.17/ будет иметь отличный от /2.13/ вид:

$$\pi_t\vec{U} = \frac{1}{2m}[\vec{P}\pi_s)\vec{U} + \frac{e}{2mc}[\vec{\mathcal{H}}\times\vec{U}]. \qquad /2.18/$$

Переходя к обозначению

$$\vec{\rho} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial S}, \quad \vec{r} = \vec{\rho} + \alpha\vec{P}, \qquad /2.19/$$

получим алгебраическое уравнение

$$(E - \vec{P}^2/2m)\vec{\rho} = \frac{e}{2mc}[\vec{\mathcal{H}}\times\vec{U}]. \qquad /2.20/$$

В /2.20/ установлена связь между $\vec{\rho}$ и $\vec{U}$. Отсюда также следует, что

$$(\vec{\rho}\vec{U}) = 0 \quad \text{и} \quad (\vec{\rho}\vec{\mathcal{H}}) = 0. \qquad /2.21/$$

Введем новый /пока неизвестный/ вектор $\vec{s}$, ортогональный векторам $\vec{\rho}$ и $\vec{U}$, т.е.

$$(\vec{s}\vec{\rho}) = 0, \quad (\vec{s}\vec{U}) = 0.$$

Выберем $\vec{s}$ так, чтобы имело место равенство

$$\vec{U} = [\vec{s}\times\vec{\rho}\,]. \qquad /2.22/$$

Подставляя /2.22/ в /2.20/ и учитывая /2.21/, получим

$$[E - \vec{P}^2/2m - \frac{e}{2mc}(\vec{H}\vec{s})]\,\rho = 0. \qquad /2.23/$$

Поскольку $\vec{\rho} \neq 0$, то

$$E = \vec{P}^2/2m + \frac{e}{2mc}(\vec{H}\,\vec{s}). \qquad /2.24/$$

Последний член, который, вводя магнитный момент

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2mc}\vec{s}, \qquad /2.25/$$

можно записать как $(\vec{\mu}\vec{H})$, отвечает энергии взаимодействия магнитного момента с магнитным полем. Поэтому физическая трактовка вектора $\vec{s}$ как вектора СУМ классической частицы уже ясно следует из /2.24/. Однако это было бы не так легко сделать, если бы мы заведомо не знали структуру данного взаимодействия. Поэтому необходимо еще показать, что вектор $\vec{s}$ действительно соответствует СУМ.

Вернемся к прежнему определению связи между векторами $\vec{\rho}$ и $\vec{U}$:

$$\vec{\rho} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{U}}{\Delta S}. \qquad /2.26/$$

Тот факт, что $\vec{\rho}$ и $\vec{U}$ взаимно-ортогональны, означает, что $\Delta\vec{U}$ есть изменение вектора $\vec{U}$ при повороте на угол $\Delta\theta$, т.е.

$$\Delta\vec{U} = \vec{U}\sin\theta\,\Delta\theta = [\vec{n}\times\vec{U}]\,\Delta\theta \qquad /2.27/$$

– единичный вектор, вокруг которого производится поворот. Изменение функции действия при таком повороте выражается через угловой момент

$$\Delta S = L\;\Delta\theta, \qquad /2.28/$$

где $L = \frac{\partial S}{\partial\theta}$ есть собственный угловой момент в направлении $\vec{n}$. Подставив /2.28/ и /2.27/ в /2.26/, получим

$$\vec{\rho} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial s} = [\frac{\vec{n}}{L}\times\vec{U}], \quad (\vec{n}\vec{\rho}) = 0. \qquad /2.29/$$

Подставляя /2.22/ в /2.29/, находим, что

$$\vec{\rho} = [\frac{\vec{n}}{L}\times[\vec{s}\times\vec{\rho}]] = \vec{\rho}\;\frac{(\vec{s}\vec{n})}{L},$$

откуда следует

$$(\vec{s}\vec{H}) = L.$$

Последняя формула и показывает, что вектор $\vec{s}$ есть вектор собственного углового момента.

Таким образом, мы восстановили гамильтониан и физическую модель системы, описываемой векторной функцией действия. Гамильтониан /2.24/ соответствует классической частице с СУМ. Функция действия определяется из уравнения Г-Я с гамильтонианом /2.24/, через которую находится траектория движения частиц с СУМ. Для решения уравнения /2.18/ необходимо вектор $\vec{\rho}$ из /2.20/

$$\vec{\rho} = \frac{e}{2mc}[\vec{H} \times \vec{U}]/(\vec{H}\vec{s})$$

подставить в /2.18/. Векторная функция $\vec{U}$ может быть применена для определения поляризации и сечения рассеяния частиц с СУМ.

3. Переход к уравнениям квантовой механики. Квазиклассический предел

Волновое уравнение /2.17/, описывающее классическую частицу с собственным угловым моментом, позволяет сравнительно легко переходить из классической области в квантовую. Этот переход осуществляется путем стандартного представления функций

$$\vec{w}(\vec{x},S) = \vec{w}_0(\vec{x},S)\exp(-iS/\hbar). \qquad /3.1/$$

Поскольку в этом представлении

$$\frac{\partial}{\partial S}\vec{w}(\vec{x},S) = -\frac{i}{\hbar}\vec{w}(\vec{x},S),$$

то в уравнении /2.17/ оператор $\frac{\partial}{\partial S}$ достаточно заменить на $-i/\hbar$, чтобы /2.17/ трансформировалось в квантовое уравнение. В результате получим уравнение Паули для спина I:

$$\hat{\pi}_t\vec{w} = \hat{\pi}^2\vec{w} + \frac{i\hbar e}{2mc}[\vec{H} \times \vec{w}]. \qquad /3.2/$$

Здесь

$$\pi_t \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi, \quad \hat{\pi} \equiv i\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A}.$$

Обратный переход из /3.2/ к классическому уравнению /2.17/ можно было бы проделать, поделив /3.2/ на $\hbar^2$ и заменяя $-i/\hbar$ на оператор $\partial/\partial S$. Однако такая процедура не соответствует традиционному способу перехода из квантовой в классическую механику. Традиционный способ перехода из уравнений квантовой механики в соответствующие уравнения классической механики осуществляется через предельный переход при $\hbar \to 0$. При этом волновая функция представляется в виде квазиклассического разложения по $\hbar$

$$\vec{w} = (\vec{w}_0 + \vec{w}_1 \hbar + \ldots \vec{w}_n \hbar^n + \ldots) \exp(-iS/\hbar) \qquad /3.3/$$

и подставляется в уравнение /3.2/. В результате при $\hbar = 0$ получим

$$[(\frac{\partial S}{\partial t} - e\phi) + \frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{c}A)^2]\vec{w}_0 = 0. \qquad /3.4/$$

Предполагая, что $\vec{w}_0 \neq 0$ из /3.4/, получаем уравнение Г-Я. При $\hbar = 0$ член, ответственный за взаимодействие спина с магнитным полем, исчезает, поскольку он имеет порядок $\hbar$. Для учета спиновых эффектов необходимо рассмотреть первый порядок по $\hbar$ в системе уравнений /3.2/, полученной в результате подстановки /3.3/ в /3.2/ и группировки членов по порядкам параметра $\hbar$.

Прежде чем переходить к обсуждению первого порядка по $\hbar$ приближения уравнения /3.2/, рассмотрим еще одну закономерность на примере частиц без спина, а затем обобщим ее на случай частиц со спином I.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial \vec{x}^2}\Psi, \qquad /3.5/$$

квазиклассическое приближение которого будем искать в виде

$$\Psi = (\Psi_0 + \hbar\Psi_1 + \ldots \hbar^n \Psi_n + \ldots) \exp(-iS/\hbar). \qquad /3.4'/$$

В нулевом приближении получим

$$[\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}})^2]\Psi_0 = 0, \qquad /3.5'/$$

что равносильно уравнению Г-Я, поскольку $\Psi_0 \neq 0$. В /3.5/ Ψ_0 остается неопределенной. В первом приближении получим уравнение на $\Psi_0 = \Psi_0(\vec{x},t)$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial \vec{x}}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\Psi_0 + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{x}^2}\Psi_0 = 0. \qquad /3.6/$$

Если умножить /3.6/ слева на Ψ_0 и соответствующим образом преобразовать, то получим уравнение на Ψ_0^2

$$\frac{\partial \Psi_0^2}{\partial t} + \frac{1}{m}\mathrm{div}(\Psi_0^2 \,\mathrm{grad}\, S) = 0, \qquad /3.7/$$

которое совпадает с уравнением непрерывности. Отсюда следует интерпретация Ψ_0^2 как функции плотности.

Уравнение /3.6/ может быть записано как производная Фреше по S от функционала

$$\Phi(S) = [\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}})^2]\Psi_0 . \qquad /3.8/$$

Действительно, вычисляя производную Фреше по S от /3.8/, получим

$$\frac{\delta}{\delta S}\Phi(S) = \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \Psi_0}{\partial \vec{x}} + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{x}^2}\Psi_0 , \qquad /3.9/$$

что совпадает с левой частью уравнения /3.6/. Пусть $S=S^*$ есть решение уравнения Г-Я. Тогда

$$\Phi(S)|_{S=S^*} = 0, \qquad \frac{\delta}{\delta S}\Phi(S)|_{S=S^*} = 0. \qquad /3.10/$$

На основе равенств /3.10/ мы можем, зная /3.9/ /т.е. первое приближение/, восстановить вид выражения /3.8/ /т.е. нулевое приближение/.

Применим этот метод к спину I. Подставляя /3.3/ в /3.2/ в первом приближении, получим уравнение

$$\frac{\partial \vec{w}_0}{\partial t} + \frac{1}{m}(\vec{P}\frac{\partial}{\partial \vec{x}})\vec{w}_0 + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{x}^2}\vec{w}_0 + \frac{1}{2mc}[\vec{H}\times\vec{w}_0] = 0. \qquad /3.11/$$

Умножая его скалярно на $\vec{w}_0$, мы снова получили бы уравнение непрерывности для функции плотности $\vec{w}_0$.

Как известно, в квазиклассическом приближении первый порядок по $\hbar$, которое содержит уравнение на амплитудную часть волновой функции, уже включает информацию о спиновых степенях свободы частицы. С другой стороны, в разложении для волновой функции мы сохраняем только нулевой порядок по $\hbar$, поэтому уравнение непрерывности, так же, как и уравнение Г-Я, относится к области классической механики. Теперь мы вправе задаться вопросом: движение каких частиц описывает уравнение /3.11/ в классической механике? На этот вопрос можно ответить, обращаясь к выражениям /3.10/. Поскольку /3.11/ представимо в виде

$$\frac{\delta}{\delta S}\Phi(S) = 0,$$

где

$$\Phi(S) = [(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi) + \frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A})^2]\vec{w}_0 + \frac{1}{2mc}[\vec{H}\times\vec{U}],$$

$$/3.12/$$

$$\frac{\delta \vec{U}}{\delta S} = \vec{w}_0 ,$$

то $S = S^*$ есть решение уравнения

$$\Phi(S) = 0, \qquad /3.13/$$

т.е. уравнения Г-Я с гамильтонианом для частицы с СУМ.

Таким образом, мы установили двустороннее соответствие между квантовым уравнением для спина I и классическим уравнением для частицы с собственным угловым моментом. Если из уравнения /3.2/ переходить к уравнениям классической механики, то достаточно ограничиться первым квазиклассическим приближением по $\hbar$, игнорируя нулевое приближение. Тогда соответствие между спином и собственным угловым моментом будет достигнуто. При решении уравнения /3.11/ функцию действия необходимо определять из уравнения Г-Я с гамильтонианом /2.31/. Решения /3.11/ могут быть применены для определения поляризации и сечения рассеяния частиц с собственным угловым моментом. Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и в теории Г-Я для бесспиновых частиц. Если в рамках этой теории попытаться получить сечение рассеяния, то необходимо знать функцию плотности, т.е. решать уравнение /3.6/, которое соответствует первому порядку по $\hbar$ члену в квазиклассическом разложении уравнения Шредингера.

4. Собственный угловой момент в релятивистской механике

В релятивистской механике общепринятым является следующее определение собственного углового момента [5]. Если рассматривать свободную частицу в ее системе покоя, то к ней применима нерелятивистская теория. Поэтому четырехмерный вектор спина s^μ совпадает в системе покоя с трехмерным вектором $\vec{s}$

$$s^\mu = (0, \vec{s}). \qquad /4.1/$$

Этот четырехвектор ортогонален 4-импульсу в системе покоя /где $s^\mu = (0, \vec{s})$, $p^\mu = (mc, 0)$ /, а поэтому в произвольной системе отсчета

$$s^\mu p_\mu = 0. \qquad /4.2/$$

В произвольной системе отсчета будет также

$$s^\mu s_\mu = -s^2. \qquad /4.3/$$

По своим трансформационным свойствам компоненты вектора собственного углового момента /как и всякого момента в релятивистской механике/ являются пространственными компонентами антисимметричного тензора $s^{\mu\nu}$. Вектор s^λ связан с этим тензором посредством соотношений

$$s^{\lambda\mu} = \frac{1}{2mc} e^{\lambda\mu\nu\rho} s_\nu p_\rho \,, \qquad s^\lambda = -\frac{2}{m} e^{\lambda\mu\nu\rho} s_{\mu\nu} p_\rho \,. \qquad /4.4/$$

Далее мы будем пользоваться выражением собственного углового момента с помощью $s^{\lambda\mu}$.

Основное соотношение релятивистской механики /соотношение между энергией и импульсом/ имеет вид

$$E^2/c^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2c^2 = 0. \qquad /4.5/$$

Аналогично тому, как это было показано в §1, факторизация /4.5/ даст нам систему уравнений для момента импульса. Она будет иметь вид

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \,,$$

$$m^2c^2 x_\lambda = p^\mu M_{\mu\lambda} + p_\lambda s \,, \qquad /4.6/$$

$$s = p^\mu x_\mu \,.$$

Система /4.6/ представляет систему однородных алгебраических уравнений, определитель которых равен левой части /4.5/.

Антисимметричный тензор момента импульса может быть записан через векторную функцию

$$M_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu \,, \qquad /4.7/$$

где $U_\nu = U_\nu(x,S)$. Зависимость U_ν от S может быть определена так же, как в /2.7/:

$$U_\nu(x, S(x))\big|_{S=S^*} = \mathrm{const},$$

S^* - решение релятивистского уравнения Г-Я.

Далее, переходя от уравнений /4.6/ к дифференциальным уравнениям и включая электромагнитное взаимодействие по правилу

$$P_\lambda \to \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - \frac{e}{c} A_\lambda \frac{\partial}{\partial S} \equiv \pi_{\lambda s} \,, \qquad /4.8/$$

придем к следующим уравнениям:

$$(\pi_s^2 - m^2c^2) w_\lambda - \frac{e}{c} F^\mu_{\ \lambda} U_\mu = 0, \qquad /4.9/$$

$$(\pi_s^2 - m^2c^2)\, s - \pi_{\lambda s} \pi_{\mu s} w^{\lambda\mu} = 0. \qquad /4.10/$$

Но, в силу антисимметричности $w^{\lambda\mu}$

$$\pi_{s\mu}\pi_{s\nu} w^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\pi_{s\mu},\pi_{s\nu}]w^{\mu\nu} = \frac{e}{2c}F_{\mu\nu}U^{\mu\nu}.$$

Поэтому /4.10/ может быть преобразовано к виду

$$(\pi_s^2 - m^2c^2)s - \frac{e}{2c}F_{\mu\nu}U^{\mu\nu} = 0. \qquad /4.11/$$

Проводя аналогичные нерелятивистскому случаю рассуждения, введем тензор собственного углового момента $s_{\mu\nu}$, так что

$$U_{\mu\nu} = s_{\mu\nu} \cdot s. \qquad /4.12/$$

Подставляя /4.12/ в /4.11/, получим

$$E^2/c^2 = P^2 + m^2c^2 + \frac{e}{2c}F_{\mu\nu}s^{\mu\nu}, \qquad /4.13/$$

которое совпадает с известным выражением энергии для классической частицы, обладающей собственным угловым моментом.

Уравнения /4.9/-/4.10/ в квантовом случае переходят в уравнение Прока в формализме Штюкельберга.

5. Скобки Пуассона для собственного углового момента

Определяя собственный угловой момент частицы в классической механике, мы должны определить для него и скобки Пуассона. Соотношения для скобок Пуассона должны иметь тот же вид, что и для момента импульса [6]. Наиболее важными являются следующие:

$$\{s_x, s_y\} = s_z, \quad \{s_y, s_z\} = s_x, \quad \{s_z, s_y\} = s_x, \qquad /5.1/$$

$$\{\vec{F}, (\vec{s}\vec{n})\} = [\vec{n} \times \vec{F}], \qquad /5.2/$$

где $\vec{F}(\vec{x},\vec{p})$ - произвольная функция $\vec{x}$ и $\vec{p}$; $\vec{n}$ - единичный вектор.

Уравнения движения для вектора СУМ через скобки Пуассона записываются в виде

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \{\vec{s}, \vec{H}\}, \qquad /5.3/$$

где гамильтониан H, согласно /2.24/, имеет вид

$$H = H_0 + \frac{e}{2mc}(\vec{H}\vec{s}). \qquad /5.4/$$

Принимая во внимание /5.2/ и

$$\{\vec{s}, H_0\} = 0,$$

получим уравнение прецессии вектора СУМ в магнитном поле

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{2mc}[\vec{s}\times\vec{H}]. \qquad /5.5/$$

При переходе в квантовую механику мы потребуем выполнения тех же коммутационных соотношений для оператора спина $\vec{s}$, что и соотношения скобок Пуассона для СУМ. Это соответствует общему правилу перехода из классической в квантовую механику в формализме скобок Пуассона. Здесь наиболее интересным является соотношение

$$[\vec{F}, (\vec{s}\vec{n})] = [\vec{n}\times\vec{F}] \qquad /5.6/$$

- аналог соотношения /5.2/. Оно показывает, что

$$\vec{s} = \frac{\hat{\tau}}{2}, \qquad /5.7/$$

где $\hat{\tau}(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ - известные трехрядные матрицы. Представление /5.7/ имеет спин I. Этот результат является еще одним доказательством соответствия модели СУМ квантовой модели спина I.

Приложение

В работе[4] модифицированное уравнение Г-Я применяется для перехода в волновое уравнение классической механики. Здесь мы рассмотрим, какой смысл может быть придан волновому уравнению классической механики. В модифицированной теории Г-Я вводится функция, зависящая от координат и действия, так что

$$\Omega(\vec{x}, S)\,|_{S=S^*} = \text{const}, \qquad /\text{П}.1/$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\frac{\partial\Omega}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\vec{x}} = -\frac{\partial\Omega}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial\vec{x}}.$$

Трансформированное по /П.1/ уравнение Г-Я записывается в виде

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial S}\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{x}}\right)^2 = 0. \qquad /\text{П}.2/$$

Уравнение /П.2/ можно принять за уравнение характеристик для классического волнового уравнения

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial S} + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial\vec{x}^2} = 0. \qquad /\text{П}.3/$$

Таким образом вводится волновое уравнение в классическую механику. Бихарактеристики /П.3/ есть уравнения движений, записанные в обычной гамильтоновой форме.

Уравнение /П.3/, вообще говоря, записано формально. Чтобы придать ему смысл, необходимо определить зависимость $\phi(\vec{x},S)$ от S и раскрыть уравнение /П.3/ при $S=S^*$. Для функции $\phi(\vec{x},S)$ примем ту же зависимость от S, что и для $\Omega(\vec{x},S)$, так что

$$\phi(\vec{x},S)=\rho(\vec{x})\Omega(\vec{x},S). \qquad /П.4/$$

Далее положим, что

$$\Omega(\vec{x},S)|_{S=S^*}=0.$$

Из /П.4/ находим

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}=\frac{\partial\rho}{\partial\vec{x}}\Omega+\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{x}}\rho,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\vec{x}^2}=\frac{\partial^2\rho}{\partial\vec{x}^2}\Omega+2\frac{\partial\rho}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{x}}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial\vec{x}^2}\rho. \qquad /П.5/$$

Подставляя /П.5/ в /П.3/, получим уравнение на $\Psi(\vec{x})=\rho(\vec{x})\frac{\partial\Omega}{\partial S}$.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\Psi}{\partial\vec{x}}+\frac{1}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial\vec{x}}\Psi=0, \qquad /П.6/$$

которое совпадает с уравнением непрерывности /3.6/.

Заметим, однако, что уравнения /П.3/ и /П.6/ идентичны только при $S=S^*$, где S^* - есть решение уравнения Г-Я. Поскольку /П.6/ заведомо записано только для $S=S^*$, то волновое уравнение /П.3/, несомненно, является более общим, чем /П.6/. Уравнение /П.3/ открывает перспективу новой ступени формализации аппарата классической механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-81-302, Дубна, 1981.
2. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р4-12774, Дубна, 1979.
3. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-80-619, Дубна, 1980.
4. Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее приложение к новой технике. "Наука", М., 1979.
5. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. "Наука", М., 1968, ч.1.
6. Голдстейн Г. Классическая механика. "Наука", М., 1975, с.290.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1981 года.