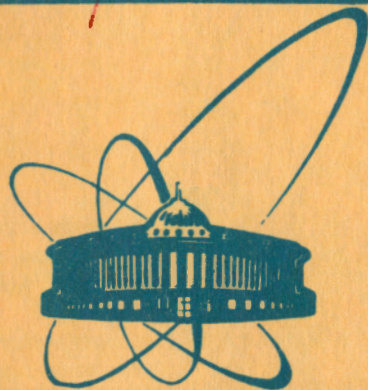


1517/82

5/IV-82



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P2-81-822

Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков

**НОВЫЕ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

1981

1. Одним из основных достижений математической физики за последнее время можно считать развитие методов обнаружения и исследования нелинейных уравнений, решаемых методом обратной задачи /М03/ ^{1/1/}.

В данное время М03 успешно развивается в применении к квантовым операторным уравнениям ^{2/}. При этом представляется весьма полезным иметь точно решаемые разностные и дифференциально-разностные нелинейные уравнения ^{3/}. Для практических приложений важно также развивать методы исследования близких к интегрируемым нелинейных эволюционных уравнений ^{4/}.

В этой работе мы рассмотрим некоторые новые решаемые и близкие к ним нелинейные уравнения. Первое из них ^{5/} в частном случае описывает модель Хаббарда ^{5/}. Второе ^{23/} является матричным дифференциально-разностным аналогом векторного нелинейного уравнения Шредингера ^{6/}. Ниже мы увидим, что в представлении когерентных состояний ^{7/} в длинноволновом приближении оба уравнения приводят к нелинейному матричному уравнению Шредингера /НМУШ/. Для второго уравнения получена пара линейных операторов Лакса и тем самым показана в принципе интегрируемость с помощью М03.

Рассматриваемые уравнения при определенных ограничениях имеют глобальную неабелеву группу симметрии. Вводя компенсирующие калибровочные поля ^{8/}, можно обеспечить локальную калибровочную симметрию, а налагая условия периодичности на систему, получить широкий класс точно решаемых систем обыкновенных нелинейных уравнений. Обсуждаются вопросы аналитического и численного решения полученных уравнений с привлечением методов Монте-Карло ^{9/}.

2. Рассмотрим гамильтониан

$$H = \sum_n \text{tr} (\bar{\Psi}_{n+1} \Psi_n + \bar{\Psi}_n \Psi_{n+1} - 2\bar{\Psi}_n \Psi_n - g(\bar{\Psi}_n \Psi_n)^2), \quad /1/$$

где $\Psi_n = \Psi_{n\alpha\beta}$ - операторнозначная матрица размерности $N \times M$, $\bar{\Psi}_n = G \Psi^+ \Gamma$ - сопряженная матрица, G, Γ - постоянные, s - числовые матрицы размерности соответственно $M \times M$ и $N \times N$. В случае, когда

$$\Gamma = \text{diag}(p(1), q(-1)), \quad p + q = N, \quad /2/$$

$$G = \text{diag}(k(1), r(-1)), \quad k + r = M,$$

гамильтониан /1/ инвариантен по отношению к глобальным преобразованиям

$$\Psi'_n = U \Psi_n V,$$

$$\bar{\Psi}'_n = \bar{V} \bar{\Psi}_n \bar{U},$$

/3/

где

$$\bar{V} = G V^\dagger G, \quad \bar{U} = \Gamma U^\dagger \Gamma,$$

при этом

$$\bar{U} U = U \bar{U} = I,$$

$$\bar{V} V = V \bar{V} = I.$$

/4/

I - единичная матрица соответствующей размерности.

Из условия /4/ следует, что группой симметрии /1/ является полупростая псевдоунитарная группа

$$U(p, q) \times U(r, k).$$

Уравнения движения

$$i \dot{\Psi}_n + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n + \Psi_{n+1} = 2g \Psi_n \bar{\Psi}_n \Psi_n,$$

$$-i \dot{\bar{\Psi}}_n + \bar{\Psi}_{n-1} - 2\bar{\Psi}_n + \bar{\Psi}_{n+1} = 2g \bar{\Psi}_n \Psi_n \bar{\Psi}_n$$

/5/

получаем с помощью /1/ "квантовых" уравнений

$$i \dot{\Psi}_n = [H, \Psi_n],$$

$$i \dot{\bar{\Psi}}_n = [H, \bar{\Psi}_n]$$

и перестановочных соотношений

$$\{\Psi_{\alpha\beta}, \Psi_{\mu\eta}\} = \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\eta} \delta_{\gamma\beta}$$

$$\{\bar{\Psi}_{\alpha\beta}, \bar{\Psi}_{\mu\eta}\} = \{\bar{\Psi}_{\alpha\beta}, \bar{\Psi}_{\mu\eta}\} = 0,$$

/6/

где квадратные скобки означают коммутатор, фигурные - коммутатор, если хотя бы один из $\Psi_{\alpha\beta}$ и $\bar{\Psi}_{\mu\eta}$ является бозонным оператором, и антикоммутатор, если Ψ и $\bar{\Psi}$ - фермионные операторы. В случае, когда Ψ и $\bar{\Psi}$ - фермионные операторы, $M=1$, $p=q=1$, модель /1/ сводится к модели Хаббарда /5/, которая описывает магнитные свойства некоторых твердых тел. В случае $M=N=1$, Ψ - бозонное поле получим "бозонный вариант" /12/ модели Хаббарда. Эти частные случаи решены точно в одномерном пространстве методом Бете /11/ соответственно в работах /10,12/.

Рассмотрим когерентное состояние /КС/ /7/:

$$|\Phi\rangle = \exp\left(\sum_n \text{tr}(\bar{\Psi}_n \Phi_n - \bar{\Phi}_n \Psi_n)\right) |0\rangle,$$

/7/

где Φ и $\bar{\Phi}$ - числовые матричные функции, $|0\rangle$ - фоковское основное состояние. Из формулы /7/ и перестановочных соотношений /6/ следует, что

$$\Psi_{n\alpha\beta}|\Phi\rangle = \Phi_{n\alpha\beta}|\Phi\rangle,$$

$$\langle\Phi|\bar{\Psi}_{n\gamma\delta} = \langle\Phi|\bar{\Phi}_{n\alpha\beta}.$$

где

$$\langle\Phi| = \langle 0| \exp\left(\sum_n \text{tr}(\bar{\Phi}_n \Psi_n - \bar{\Psi}_n \Phi_n)\right),$$

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = 1.$$

В качестве пробной волновой функции удобно выбрать КС /7/. Гамильтониан /1/ и уравнения движения /5/ принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \equiv \langle\Phi|H|\Phi\rangle = \sum \text{tr}(\bar{\Phi}_{n+1} \dot{\Phi}_n + \bar{\Phi}_n \dot{\Phi}_{n+1} - (2+g)\bar{\Phi}_n \Phi_n - \\ - g(\bar{\Phi}_n \Phi_n)^2), \end{aligned} \quad /8/$$

$$i\dot{\Phi}_n + \dot{\Phi}_{n-1} - 2\dot{\Phi}_n + \dot{\Phi}_{n+1} = 2g\bar{\Phi}_n \bar{\Phi}_n \Phi_n + g\bar{\Phi}_n.$$

$$-i\dot{\bar{\Phi}}_n + \dot{\bar{\Phi}}_{n-1} - 2\dot{\bar{\Phi}}_n + \dot{\bar{\Phi}}_{n+1} = 2g\bar{\Phi}_n \Phi_n \bar{\Phi}_n + g\bar{\Phi}_n.$$

С помощью преобразования

$$\Phi_n \rightarrow e^{-igt} \Phi_n,$$

$$\bar{\Phi}_n \rightarrow e^{igt} \bar{\Phi}_n$$

можно убрать последние слагаемые в уравнениях /8/.

Длинноволновому приближению соответствует предельный случай, когда постоянная решетки стремится к нулю. Перейдем к новым переменным:

$$t \rightarrow t/h^2, \quad x_n = nh, \quad \Phi_n(t) = h\Phi(x_n, t). \quad /9/$$

Уравнения /8/ в переменных /9/ принимают вид

$$i\Phi_t - \frac{\Phi(x+h) + 2\Phi(x) + \Phi(x-h)}{h^2} = 2g\bar{\Phi}\bar{\Phi}\Phi(x, t), \quad /10/$$

$$-i\bar{\Phi}_t - \frac{\bar{\Phi}(x+h) - 2\bar{\Phi}(x) + \bar{\Phi}(x-h)}{h^2} = 2g\bar{\Phi}\Phi\bar{\Phi}(x, t),$$

откуда в пределе $h \rightarrow 0$ получим

$$i\Phi_t - \Phi_{xx} = 2g\bar{\Phi}\bar{\Phi}\Phi(x, t), \quad /11/$$

$$-i\bar{\Phi}_t - \bar{\Phi}_{xx} = 2g\bar{\Phi}\Phi\bar{\Phi}(x, t).$$

Система уравнений /11/ является гамильтоновой; соответствующий гамильтониан и скобки Пуассона имеют вид

$$H = \int dx \operatorname{tr} (\bar{\Phi}_x \Phi_x + g(\bar{\Phi}\Phi)^2), \quad /12/$$

$$\{A, B\} = \int dx \operatorname{tr} \left(\frac{\delta A}{\delta \Phi(x)} \frac{\delta B}{\delta \bar{\Phi}(x)} - \frac{\delta B}{\delta \Phi(x)} \frac{\delta A}{\delta \bar{\Phi}(x)} \right).$$

С помощью /12/ уравнения записываются в форме

$$i\dot{\Phi}_t = \{H, \Phi\}, \quad /13/$$

$$i\dot{\bar{\Phi}}_t = \{H, \bar{\Phi}\}.$$

Ниже будет показана интегрируемость системы /11/. С этим обстоятельством тесно связано наличие бесконечного числа законов сохранения:

$$\partial_\mu J_\mu^k = 0, \quad /14/$$

$$\mu = t, x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для нескольких первых сохраняющихся токов имеем

$$J_t^1 = \bar{\Phi}\Phi, \quad J_x^1 = i(\bar{\Phi}\Phi_x - \bar{\Phi}_x\Phi),$$

$$J_t^2 = i(\bar{\Phi}\Phi_x - \bar{\Phi}_x\Phi),$$

$$J_x^2 = 2\bar{\Phi}_x\Phi_x - \bar{\Phi}\Phi_{xx} - \bar{\Phi}_{xx}\Phi + 2g(\bar{\Phi}\Phi)^2,$$

$$J_t^3 = \bar{\Phi}_x\Phi_x + g(\bar{\Phi}\Phi)^2, \quad /15/$$

$$J_x^3 = i(\bar{\Phi}_x\Phi_{xx} - \bar{\Phi}_{xx}\Phi_x)$$

$$+ 2ig(\bar{\Phi}\Phi_x - \bar{\Phi}_x\Phi)\bar{\Phi}\Phi,$$

$$J_t^4 = i(\bar{\Phi}_x\Phi_{xx} - \bar{\Phi}_{xx}\Phi_x)$$

$$+ 3ig(\bar{\Phi}\Phi_x - \bar{\Phi}_x\Phi)\bar{\Phi}\Phi.$$

Законам сохранения /14/ соответствуют сохраняющиеся во времени интегралы движения

$$Q_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{tr} (J_t^n). \quad /16/$$

Конечность величин /16/ обеспечивается регулярностью и достаточно быстрым убыванием решений с ростом x .

3. Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$\phi(n+1, m) = A(n, m)\phi(n, m),$$

$$\dot{\phi}(n, m+1) = B(n, m)\phi(n, m),$$

/17/

где переменные n и m принимают целочисленные значения и задают пространственную с шагом h и временную с шагом τ решетки. Из системы /17/ следует соотношение

$$A(n, m+1)B(n, m) = B(n+1, m)A(n, m).$$

/18/

Если операторы перехода A и B зависят от внешнего поля /потенциала/, то уравнение /18/ представляет собой, вообще говоря, нелинейное уравнение для потенциала. Непрерывному времени соответствует предел $\tau \rightarrow 0$. При этом из /17/ получим

$$\phi_{n+1} = A_n \phi_n,$$

/19/

$$\dot{\phi}_n = B_n \phi_n,$$

где

$$A_n(t) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} A(n, m),$$

$$B_n(t) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} (B(n, m) - I) / \tau,$$

$$\phi_n(t) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \phi(n, m).$$

Уравнение /18/ переходит в

$$\dot{A}_n = B_{n+1}A_n - A_nB_n.$$

/20/

Аналогичным образом снимается и пространственная решетка. Устремив h к нулю, получим из /19/

$$\phi_x = A\phi(x, t),$$

/21/

$$\dot{\phi}_t = B\phi(x, t),$$

где

$$A(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} (A_n(t) - I) / h,$$

$$B(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} B_n(t),$$

$$\Psi(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \Psi_n(t).$$

Уравнение /20/ переходит теперь в

$$A_t = B_x + [B, A] = [B, A - \partial_x].$$

/22/

Покажем переход от системы /19/ к /21/ на примере уравнений

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}_n + \Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1} &= \bar{\Psi}_{n+1} \bar{\Psi}_n \Psi_n + \Psi_n \bar{\Psi}_n \Psi_{n-1}, \\ -i\bar{\Psi}_n + \bar{\Psi}_{n+1} - 2\bar{\Psi}_n + \bar{\Psi}_{n-1} &= \bar{\Psi}_{n+1} \Psi_n \bar{\Psi}_n + \bar{\Psi}_n \Psi_n \bar{\Psi}_{n-1}. \end{aligned} \quad /23/$$

Нетрудно убедиться в том, что эти уравнения можно записать в виде /19/, где

$$A_n = \begin{pmatrix} z I_M & \bar{\Psi}_n \\ \Psi_n & z^{-1} I_N \end{pmatrix}, \quad B_n = -i \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},$$

$$a_n = I_M (z^2 - 1) - \bar{\Psi}_n \Psi_{n-1},$$

$$b_n = z \bar{\Psi}_n - z^{-1} \bar{\Psi}_{n-1}, \quad /24/$$

$$c_n = z \Psi_{n-1} - z^{-1} \Psi_n,$$

$$d_n = I_N (1 - z^{-2}) + \Psi_n \bar{\Psi}_{n-1};$$

I_N и I_M - единичные матрицы размерности соответственно $N \times N$ и $M \times M$; z - спектральный параметр, $z_t = 0$; матрицы-операторы Ψ_n и $\bar{\Psi}_n$ определены во второй части работы. Вычислим операторы A и B /21/ с помощью A_n и B_n /24/. Для оператора A получим конечное значение, если конечны величины:

$$\lim (z-1)/h \equiv i\lambda, \quad /25/$$

$$\bar{\Psi}_n / h \equiv \bar{\Psi}(nh, t), \quad /26/$$

$$\Psi_n / h \equiv \Psi(nh, t).$$

Условию /25/ можно удовлетворить, выбрав $z = z(\lambda, h) = e^{i\lambda h}$, т.е. $|z| = 1$, $z^{-1} = e^{-i\lambda h}$. Конечность /26/ имеет место для решений, достаточно медленно меняющихся с n . Для обеспечения конечности оператора B с учетом определений /25/ и /26/ необходимо перенормировать переменную времени $t \rightarrow t/h^2$ и векторы линейного пространства

$$\phi_n(t) \rightarrow e^{-2\lambda h t} \phi(x, t).$$

При этом для операторов A и B имеем /6.13/

$$A = \begin{pmatrix} i\lambda & \bar{\Phi} \\ \Phi & -i\lambda \end{pmatrix}, \quad /27/$$

$$iB = 2\lambda^2 \begin{pmatrix} -I_M & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Phi} \\ \Phi & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\bar{\Phi}\Phi & \bar{\Phi}_x \\ -\Phi_x & \Phi\bar{\Phi} \end{pmatrix}.$$

Система уравнений /23/ отличается от системы /5/ нелинейным членом. Система /5/ допускает редукцию

$$\bar{\Psi} = G\Psi^\dagger \Gamma, \quad /28/$$

тогда как для системы /23/ такая редукция невозможна. Действительно, используя /28/, из первого уравнения /23/ получим

$$i\bar{\Psi}_n + \bar{\Psi}_{n+1} - 2\bar{\Psi}_n + \bar{\Psi}_{n-1} = \bar{\Psi}_n \Psi_n \bar{\Psi}_{n+1} + \bar{\Psi}_n \Psi_{n-1} \bar{\Psi}_n.$$

Это уравнение отличается от второго уравнения /23/, что и доказывает невозможность редукции /28/ для системы /23/. В представлении когерентных состояний /7/ операторные уравнения /23/ сводятся к системе нелинейных уравнений для с-числовых функций:

$$\begin{aligned} i\bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_{n+1} - 2\bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_{n-1} &= \bar{\Phi}_{n+1} \bar{\Phi}_n \Phi_n + \bar{\Phi}_n \bar{\Phi}_n \Phi_{n-1}, \\ -i\bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_{n+1} - 2\bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_{n-1} &= \bar{\Phi}_{n+1} \Phi_n \bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_n \Phi_n \bar{\Phi}_{n-1}. \end{aligned} \quad /29/$$

В длинноволновом приближении система /29/ аналогично системе /5/ приводит к уравнениям /11/. Заметим, что уравнения /29/, так же как и /23/, не допускают редукции /28/ в матричном случае. В скалярном случае / M = N = 1 / редукция /28/ имеет место.

Системы уравнений /5/, /11/ и /23/ не меняются при преобразованиях /3/. Матрицы U и V при этом не зависят от координат и времени. Симметрию /3/ можно обеспечить в каждой точке пространства и времени введением компенсирующих калибровочных полей. Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \text{tr}(\bar{\Phi}(iD_0 + D_1^2)\Phi(x,t) - g(\bar{\Phi}\Phi)^2 + \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2), \quad /30/$$

где

$$D_0 = \partial_t - ieA_0,$$

$$D_1 = \partial_x - ieA_1,$$

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1.$$

Калибровочные поля в двумерном пространстве-времени не имеют динамических степеней свободы. Выбором соответствующей калибровки их можно исключить из уравнений движения. Действительно, в калибровке $A_1 = 0$ уравнение движения для A_0 имеет вид

$$\partial_{\mathbf{x}}^2 A_0 = e \bar{\Phi} \Phi.$$

/31/

Исключив с помощью решения уравнения /31/ поле A_0 , лагранжиан для поля Φ можно записать в форме

$$\int dx \mathcal{L} = \int dx \operatorname{tr} (\bar{\Phi} (i \partial_t + \partial_{\mathbf{x}}^2) \Phi) - \int dx dy \operatorname{tr} (\rho(x) V(x-y) \rho(y)),$$

/32/

где

$$V(x) = -g \delta(x) - \frac{e^2}{2} |x|,$$

$$\rho(x) = \bar{\Phi}(x,t) \Phi(x,t).$$

4. Среди численных методов исследования моделей типа /1/ наибольшей популярностью пользуются методы молекулярной динамики^{/15/} и Монте-Карло^{/9/}. На примере модели /1/ обсудим некоторые вопросы применения второго метода. Конкретные вычисления на ЭВМ с включением калибровочных полей приведем в другой работе. Квантовостатистические свойства модели /1/ полностью определяются производящим функционалом для функции Грина^{/16/}:

$$Z(\bar{J}, J) = \int d(\bar{\Psi}, \Psi) \exp(-\int_0^\beta dr \mathcal{L}(\bar{\Psi}, \Psi)),$$

/33/

где

$$d(\bar{\Psi}, \Psi) = \prod_n d\bar{\Psi}_n d\Psi_n,$$

$$\mathcal{L} = \sum_n \operatorname{tr} (\bar{\Psi}_n \partial_\tau \Psi_n) - H,$$

$$H = \sum_{n,m} \operatorname{tr} (\bar{\Psi}_n t_{nm} \Psi_m) + \sum_n \operatorname{tr} (\bar{\Psi}_n \Psi_n)^2 + \bar{J}_n \Psi_n + \bar{\Psi}_n J_n,$$

$$\beta = 1/T,$$

T - температура.

Для конкретного вычисления функционального интеграла необходимо рассмотреть конечную область пространства-времени, на которой вводится решетка.

В нашем примере необходимо ввести решетку по переменной τ , $0 \leq \tau_n \leq \beta$, $\tau_n = n \Delta \tau$, $n=1, \dots, k$, $\tau_k = \beta$. Для полевых величин потребуем условия периодичности $\Psi_{n+L}(\tau_n) = \Psi_n(\tau_n)$ для бозонов и антипериодичности $\Psi_{m+L}(\tau_n) = -\Psi_m(\tau_n)$ для фермионов. Для таких функций уравнения движения /5/ и /23/ сводятся к системам, состоящим из $2L$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Например, в случае $L=2$ система /23/ приводит к уравнениям

$$i\dot{\Psi}_1 + 2(\Psi_2 - \Psi_1) = \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 \Psi_1 + \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_1 \Psi_2,$$

$$-i\dot{\bar{\Psi}}_1 + 2(\bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_1) = \bar{\Psi}_2 \Psi_1 \bar{\Psi}_1 + \bar{\Psi}_1 \Psi_1 \bar{\Psi}_2,$$

/34/

$$i\dot{\Psi}_2 + 2(\Psi_1 - \Psi_2) = \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2 \Psi_2 + \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_2 \Psi_1,$$

$$-i\dot{\bar{\Psi}}_2 + 2(\bar{\Psi}_1 - \bar{\Psi}_2) = \bar{\Psi}_1 \Psi_2 \bar{\Psi}_2 + \bar{\Psi}_2 \Psi_2 \bar{\Psi}_1,$$

где введены обозначения

$$\Psi_m = \Psi_1, \quad \Psi_{m \pm 1} = \Psi_2.$$

Заметим, что вторая пара уравнений /34/ получается из первой заменой $1 \rightarrow 2$. Аналогичные системы получаются и в случае $L \geq 3$.

Заметим, что вопрос интегрируемости этих систем уравнений тесно связан с интегрируемостью уравнений /23/ с периодическими граничными условиями. Фермионные поля в функциональном интеграле /33/ представляются грассмановыми c -числами /17/ для которых нет удобной процедуры вычислений. В этом случае необходимо перейти к бозонному представлению. Введем вспомогательные бозонные поля Φ , с помощью которых величину /33/ представим в виде

$$Z(\bar{J}, J) = \int d(\bar{\Psi}, \Psi) d\Phi \exp\left(-\int_0^\beta dr \mathcal{L}(\bar{\Psi}, \Psi, \Phi)\right), \quad /35/$$

где

$$\mathcal{L}(\bar{\Psi}, \Psi, \Phi) = \mathcal{L}(\bar{\Psi}, \Psi) + \sum_n \text{tr}(\bar{\Psi}_n \Psi_n - \Phi_n)^2,$$

$$d\Phi = \prod_n d\Phi_n.$$

В выражении /34/ зависимость от величин $\bar{\Psi}$ и Ψ квадратичная, поэтому по ним функциональная квадратура берется точно:

$$Z(\bar{J}, J) = \int d\Phi \det(A) \exp(-S(\Phi, \bar{J}, J)), \quad /36/$$

где

$$S(\Phi, \bar{J}, J) = \int_0^\beta dr \sum_n \text{tr} \Phi_n^2 - \int_0^\beta dr dr' \sum_{n,m} \text{tr}(\bar{J}_n(r) A_{nm}^{-1}(r, r') J(r')),$$

$$A_{nm}(r) = \delta_{nm}(\partial_r - \Phi_n(r)) - t_{nm}.$$

Теперь в /36/ интегрирование производится только по бозонным полям. Произвольную функцию Грина можно представить в виде функциональной квадратуры по бозонным полям. Например, фермионный пропагатор имеет вид:

$$\langle 0 | \Phi_n(\tau) \Phi_m(\tau') | 0 \rangle = \frac{\delta^2 Z(\bar{J}, J)}{\delta \bar{J}_n(\tau) \delta J_m(\tau')} \Big|_{\bar{J}=J=0} \quad /37/$$

$$= \int d\Phi A_{nm}^{-1}(\tau, \tau') \det(A) \exp\left(-\int_0^\beta dr \sum \text{tr} \Phi_n^2\right).$$

Вычисление выражений типа /37/ требует больших затрат машинного времени /18/. При этом основное время тратится на вычисление детерминанта от A ; значительно меньше времени уходит на вычисление A^{-1} . Можно упростить выражение для детерминанта, используя точную формулу /19/

$$\det_{\tau, n} (\partial_\tau - H) = \det_n (\delta_{nm} + \text{rexp}(\int_0^\beta d\tau H(\tau))), \quad /38/$$

где

$$H(\tau) = t_{nm} + \delta_{nm} \Phi_n(\tau).$$

В правой части формулы /38/ имеем упорядоченную по времени экспоненту. Детерминант /38/ при $n, m \leq 10$ можно вычислить точно с помощью методов аналитических преобразований на ЭВМ. Вычисления размерности матрицы 4×4 проводились по программе REDUCE-2 на ЭВМ ЕС-1060. Метод Монте-Карло позволяет построить ансамбль из большего числа состояний, входящих в него с вероятностью

$$D = \det(A) \exp(-S(\Phi)). \quad /39/$$

Генерируя такой ансамбль состояний, можно вычислить среднее значение произвольной величины O по формуле

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A(\Phi_i). \quad /40/$$

При больших N формула /40/ дает ответ с погрешностью порядка $N^{-1/2}$. Суть вычислений по методу Монте-Карло состоит в следующем: строится дискретный марковский процесс, который из произвольного начального состояния приводит к равновесному состоянию. После достижения равновесия генерируется ансамбль состояний, на основе которого производится вычисление средних величин /40/. Марковский процесс однозначно определяется матрицей перехода W_{ij} между произвольными состояниями i и j :

$$W_{ij} > 0, \quad \sum_j W_{ij} = 1.$$

В настоящее время в вычислениях континуальных интегралов по методу Монте-Карло применяются разные модификации методов Метрополиса /20/ и теплового резервуара /9/. Суть первого метода состоит в следующем: в результате одного шага марковского процесса из исходного состояния i генерируется случайным образом новое состояние $i+1$, для которого вычисляется величина /39/, D_{i+1} . Если $D_{i+1}/D_i \geq 1$, то $(i+1)$ состояние при-

нимается за исходное к следующему шагу марковского процесса. Если $\epsilon_i \equiv (D_{i+1} / D_i) < 1$, то генерируется случайное число ϵ с однородным распределением в интервале $[0, 1]$ и отношение ϵ_i сравнивается с ϵ . Теперь, если $\epsilon_i > \epsilon$, то $(i + 1)$ -состояние снова принимается за исходное, в случае $\epsilon_i < \epsilon$ программа возвращается к (i) -состоянию, принимая его за исходное для нового шага, и т.д.

В методе теплового резервуара каждое новое состояние генерируется из данного состояния с вероятностью $1/39$. В методе Метрополиса в сравнении с методом теплового резервуара вычисление одного шага марковского процесса проще, но соседние состояния скореллированы в большей степени, поэтому для достижения равновесного состояния и генерации ансамбля состояний требуется большее число итераций. Преимущество того или иного метода устанавливается в конкретных вычислениях. В расчетах одномерных моделей с фермионами 19,21 и многомерных моделей калибровочных теорий поля, в особенности при больших группах симметрии $(SU(4), SU(5))^{22}$, предпочтение отдается методу Метрополиса. Для моделей калибровочных теорий поля с группой симметрии $SU(2)^{23}$ и $SU(3)^{24}$ успешно применяется метод теплового резервуара.

В заключение отметим, что в данной работе мы ввели новые нелинейные дифференциально-разностные уравнения $^{5/}$, $^{23/}$, которые в формальном непрерывном пределе приводят к матричному нелинейному уравнению Шредингера $^{6,14/}$. При этом уравнение $^{5/}$ в одном частном случае описывает точно решаемую одномерную модель Хаббарда $^{5/}$, в другом - ее бозонный аналог $^{12/}$. Получено представление Лакса для уравнения $^{23/}$ и тем самым показана в принципе интегрируемость методом обратной задачи. Введено представление когерентных состояний, с помощью которых установлена связь между операторными уравнениями $^{5/}$ и $^{23/}$ с соответствующими классическими уравнениями $^{8/}$ и $^{29/}$ для σ -числовых функций. Обсуждается обобщение уравнений $^{5/}$, $^{23/}$ на случай с локальной калибровочной группой симметрии. Описываются современные методы вычисления континуальных интегралов для точно решаемых, близких к точно решаемым, а также произвольных нелинейных моделей физики конденсированного состояния и теории элементарных частиц с привлечением методов Монте-Карло в приложении к модели $^{1/}$.

Один из авторов /Н.В.Махалдиани/ благодарит Е.П.Жидкова и И.В.Пузынина за интерес к работе и поддержку, В.П.Гердта за помощь в проведении расчетов на ЭВМ, А.В.Кудинова, Э.М.Ильгенфрица, В.К.Митрюшкина, М.Мюллер-Пройскар, О.К.Пашаева и С.Ю.Шмакова за обсуждение некоторых вопросов, затронутых в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов: метод обратной задачи. М., "Наука", 1980.
2. Фаддеев Л.Д. Квантовые вполнеинтегрируемые модели теории поля. В кн.: Проблемы квантовой теории поля. ОИЯИ, P2-12462, Дубна, 1979.
3. Ablowitz M.J. Stud.Appl.Math., 1978, v. 58, p. 17.
4. Makhankov V.G. Phys.Rep., 1978, v. 35, p. 1.
5. Hubbard J. Proc.R.Soc., 1963, v. A276, p. 238.
6. Makhankov V.G., Makhaldiani N.V., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1981, v. 81A, p. 161.
7. Klauder J.R. Classical Concepts in Quantum Contexts. Acta Physics Austriaca, Suppl., 1977, v. XVIII, p. 1.
8. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. "Наука", М., 1978.
9. Binder K. In Phase Transitions and Critical Phenomena, ed. by C.Domb and M.S.Green, v.5B, Academic, New York, 1976.
10. Lieb E.H., Wu F.Y. Phys.Rev.Lett., 1968, v.20, p. 1445.
11. Bethe H. Z.Phys., 1931, v. 71, p. 205.
12. Haldane F.D.M. Phys.Lett., 1980, v. 80A, p. 281.
13. Makhankov V.G., Pashaev O.K. JINR, E2-81-264, Dubna, 1981.
14. Кулиш П.П. В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. "Наука", М., 1980, с. 317.
15. Aïder B.J., Wainwright T. Journ.Clem.Phys., 1975, v.27, p.1209.
16. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Атомиздат, М., 1976.
17. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. "Наука", М., 1965.
18. Weingarten D.H., Petcher D.N. Phys.Lett., 1981, v.1399, p. 333.
19. Blankenbecler R., Scalapino D.J., Sugar R.L; Phys.Rev., 1981, v. D24, p. 2278.
20. Metropolis N. et al. J. Chem.Phys., 1953, v. 24, p. 1087.
21. Duncan A., Furman M. Nucl.Phys., 1981, v. B190, p. 751.
22. Creutz M. Phys.Rev.Lett., 1981, v. 46, p. 1441.
23. Creutz M. Phys.Rev., 1980, v. D21, p. 2308.
24. Pietarinen E. Nucl.Phys., 1981, v. B190, p. 349.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря 1981 года.