сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-821

И.Л.Боголюбский

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УЗЛОВЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ СОЛИТОНОВ

1981

I. Настоящая работа является продолжением исследования устойчивости узловых ("возбужденных") сферически симметричных (SS) солитонов заряженного скалярного поля. В случае произвольного самодействия скалярного поля вопрос об их устойчивости остается, насколько известно автору, открытым. Поэтому, как и в работе [I], мы ограничимся конкретной моделью уравнения Клейна-Гордона с логарифмической нелинейностью ($KGLN$)

$$\varphi_{tt} - \nabla^2_{\vec{x}}\varphi - 3\varphi - \varphi \ln(|\varphi|^2) = 0, \tag{I}$$

эквивалентного уравнению $(\delta E)_Q = 0$, где

$$E = \int \mathcal{H} d^3x, \quad \mathcal{H} = |\varphi_t|^2 + |\nabla_{\vec{x}}\varphi|^2 + U(|\varphi|), \tag{2}$$

$$U(\varphi) = -2\varphi^2 - \varphi^2 \ln \varphi^2, \tag{3}$$

$$Q = i\int(\varphi_t \varphi^* - \varphi_t^* \varphi)\, d^3x. \tag{4}$$

Солитоны с любым числом узлов имеют вид

$$\varphi_s(\vec{x},t) = e^{-i\omega t} y_s(r,\omega) = e^{-i\omega t} e^{-\frac{\omega^2+3}{2}} \rho_s(r), \tag{5}$$

где $\rho_s(r)$ подчиняется не содержащему ω уравнению

$$\nabla^2_r \rho + \rho \ln \rho^2 = 0,$$
$$\nabla^2_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}, \quad r = |\vec{x}|. \tag{6}$$

В этой работе мы ограничимся исследованием устойчивости первого возбужденного солитонного состояния, соответствующего локализованному решению (6) $\rho_{s1}(r)$ с одним узлом (см. [2,I]).

2. Уравнение (I) принадлежит классу моделей, в которых $(d^2U/d\varphi^2)_{\varphi=0} = 2m_q^2 = \infty$, иногда их называют моделями с удержанием („confining models"). В этих моделях солитоны устойчивы относительно распада на волны бесконечно малой амплитуды, т.к. кванты соответствующего поля в силу $m_q = \infty$ не могут находиться в свободном состоянии.

Для моделей, в которых $(d^2U/d\varphi^2)_{\varphi=0}\neq\infty$, в работах /3-5/ получены условия устойчивости заряженных солитонов, причем в процессе доказательства существенно использовалось выражение для второй вариации $(\delta^2E)_Q$, которое можно записать в виде

$$(\delta^2E)_Q=2\int[(\nabla\delta y)^2-\omega^2(\delta y)^2+\frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\varphi^2}(\delta y)^2]d^3x+\frac{8\omega^2(\int y\,\delta y\,d^3x)^2}{\int y_s^2\,d^3x}. \qquad (7)$$

Выражение (7) не годится для случая $(d^2U/d\varphi^2)_{\varphi=0}=\infty$. Вместо него получим из формулы (2) соотношения для $(\delta E)_Q$ и $(\delta^2E)_Q$, в которых выделены слагаемые $(\delta E)_\omega$ и $(\delta^2E)_\omega$, соответствующие формальному варьированию функционала E (формула (2)) при постоянном параметре ω. При этом используем выражение для заряда солитона

$$Q_s=2\omega\int y_s^2\,d^3x \qquad (8)$$

и получающееся из условия сохранения заряда Q соотношение, связывающее вариации $\delta\omega=\omega-\omega_s$ и $\delta y(\vec{x})=y(\vec{x})-y_s(\vec{x})$:

$$\delta\omega\int y_s^2\,d^3x=-2\omega\int y_s\,\delta y\,d^3x.$$

Последовательно находим:

$$(\delta E)_Q=(\delta E)_\omega-4\omega^2\int y_s\,\delta y\,d^3x, \qquad (9)$$

где

$$(\delta E)_\omega=\int[2\omega^2y_s\delta y-2\nabla^2y_s\delta y+\frac{dU}{dy}\delta y]\,d^3x, \qquad (10)$$

и

$$(\delta^2E)_Q=(\delta^2E)_\omega-4\omega^2\int(\delta y)^2d^3x+8\omega^2\left(\int y_s\delta y\,d^3x\right)^2\Big/\int y_s^2\,d^3x, \qquad (11)$$

где

$$(\delta^2E)_\omega=\int[2\omega^2(\delta y)^2+2(\nabla\delta y)^2]\,d^3x+\delta\int\frac{dU}{dy}\delta y\,d^3x. \qquad (12)$$

В последнем слагаемом интегрирование и второе варьирование нельзя переставлять местами. Обозначим этот член $\delta^2\Pi[\delta y]$. Вычисление на ЭВМ функционала $\delta^2\Pi[\delta y]$ для конкретных $\delta y(\vec{x})$ удобнее выполнять на основании определения второй вариации

$$\delta^2\Pi[\delta y]=\Pi[y_s+\delta y]-2\Pi[y_s]+\Pi[y_s-\delta y]. \qquad (13)$$

Формулы (11)-(13) позволяют методом пробных функций (ПФ) исследовать устойчивость заряженных солитонов в моделях с $(d^2U/d\varphi^2)_{\varphi=0}=\infty$, или, говоря точнее, определять область неустойчивости.

Проиллюстрируем это в рассматриваемой конкретной модели. Перейдем к переменной $\rho(x)=y(x)\cdot\exp[(\omega^2+3)/2]$. Можно указать несколько эквивалентных записей $(\delta^2E)_Q$, удобных для вычисления на ЭВМ, получим одну из них.

Используя для слагаемого $\int 2(\nabla\delta y)^2d^3x$ в (12) его запись в виде, аналогичном (13), и применяя формулу перехода

$$U(y)=\exp(-\omega^2-3)\,\rho^2(1+\omega^2-\ln\rho^2), \qquad (14)$$

получим после объединения членов, пропорциональных $(\delta\rho)^2$,

$$\begin{aligned}(\delta^2E)_Q=\int[2(\delta\rho)^2&+(\nabla(\rho_s+\delta\rho))^2-2(\nabla\rho_s)^2+(\nabla(\rho_s-\delta\rho))^2-\\&-(\rho_s+\delta\rho)^2\ln(\rho_s+\delta\rho)^2+2\rho_s^2\ln\rho_s^2-\\&-(\rho_s-\delta\rho)^2\ln(\rho_s-\delta\rho)^2]d^3x+8\omega^2\left(\int\rho_s\delta\rho\,d^3x\right)^2I^{-1},\end{aligned} \qquad (15)$$

где

$$I=\int\rho_s^2\,d^3x. \qquad (16)$$

Подчеркнем, что здесь $\delta\rho(r)$ - произвольные малые возмущения, такие, что $\delta\rho\to0$ при $r\to\infty$.

3. В данной работе был применен и другой вариант метода ПФ, в котором ПФ $\varphi_p(x,t)$ выбираются так, чтобы заряд Q_p описываемых ими сгустков поля совпадал с Q_s. После этого анализируется разность $\Delta E=E[\varphi_p]-E[\varphi_s]$ как функция одного параметра, характеризующего малые отклонения $\delta\varphi=\varphi_p-\varphi_s$. В данной работе использованы оба способа выбора ПФ, описанные в /6,7/: 1) обобщенное масштабное преобразование и 2) варьирование по частоте.

1) Пусть $\varphi_p=\exp(-i\omega' t)\,a^{\varkappa/2}\rho_s(ax)\exp(-\frac{\omega^2+3}{2})$.

Из условия $Q_p=Q_s$ получаем $\omega'=\omega a^{3-\varkappa}$, в результате

$$\Delta E = C^2\{I[\rho_s]\cdot[\omega^2(a^{3-\varkappa}+a^{\varkappa-3}-2)+a^{\varkappa-3}(1-\varkappa\ln a)-1]+ (a^2-1)\,a^{\varkappa-3}\int(\nabla\rho_s)^2d^3x\}. \qquad (17)$$

Рассматривая $\alpha=a-1$, $|\alpha|\ll 1$, и используя равенство $\int(\nabla\rho_s)^2d^3x=\frac{3}{2}I[\rho_s]$, следующее из уравнения $d(\Delta E)/da=0$, после несложных вычислений приходим к результату:

$$\frac{d^2(\Delta E)}{da^2}=C^2I[\rho_s]\,[(3-\varkappa)^2(\omega^2-\tfrac{1}{2})+\varkappa]. \qquad (18)$$

Рассматривая различные $\varkappa$, получаем, что необходимое условие неустойчивости есть $\omega\gg 1/\sqrt{2}$.

2) Пусть $\varphi_p=\exp(-i\omega''t)\,y_s(x,\omega')$. Тогда $\omega''=\omega\exp(\omega'^2-\omega^2)$, и представляя $\omega'=\omega+\nu$, получим

$$\Delta E = B^2\exp(-\omega^2)\{[1-2\omega\nu+\nu^2(2\omega^2-1)]\times[2+6\omega\nu+3\nu^2+\omega^2(1+8\nu^2)]-(2\omega^2+1)\}. \qquad (19)$$

Отсюда нетрудно найти, что

$$\frac{d^2(\Delta E)}{d\nu^2}>0 \quad \text{при} \quad \omega\geq 1/\sqrt{2}.$$

Таким образом, независимо от числа узлов солитона, оба способа дают одинаковый результат, совпадающий с тем, который следует из известного неравенства $\frac{\omega}{Q}\frac{dQ}{d\omega}<0$ /3-5/.

4. Заметим, что использованные в п.3 возмущения имеют в пределе $a\to 1$ (или $\nu\to 0$) ту же форму, что и солитон. Формулы, полученные в п.2, позволяют исследовать возмущения произвольной формы, в результате чего область параметра, в которой обнаружена неустойчивость, может расшириться. При наличии неустойчивости следует ожидать, что на начальном этапе будут нарастать возмущения, имеющие колоколообразную форму. Поэтому рассмотрим безузловые вариации $\delta\rho$ вида

$$\delta\rho(r,a)=\varepsilon\exp[-(ar)^2/2] \qquad (20)$$

и, используя формулу (15), вычислим на них значение функционала $(\delta^2E)_Q$ при различных величинах параметра a (здесь $\varepsilon\ll 1$, в расчетах принято $\varepsilon=0{,}005$).

Перепишем (15) в виде

$$(\delta^2E)_Q=\Delta^2E+8\omega^2S^2I^{-1},$$
$$S=(\rho_s,\delta\rho)=\int\rho_s\,\delta\rho\,d^3x, \qquad (21)$$

где Δ^2E обозначает первый интеграл в (15).

Расчеты на ЭВМ для солитона с одним узлом позволили найти вид функций $\Delta^2E(a)$ (см.рис.1) и $S(a)$ (см.рис.2). Видно, что $S(a)=0$ при $a_0\simeq 0{,}7113$; в силу такой ортогональности функций $\rho_s(r)$ и $\delta\rho(r,a_0)$ имеем при любой частоте ω: $(\delta^2E)_Q=\Delta^2E<0$. Таким образом, в данной модели солитон с одним узлом полевой функции $\rho_{s1}(r)$ является неустойчивым при всех ω. Не вызывает сомнений, что это утверждение справедливо и для солитонов с большим числом узлов. В свете полученных результатов данные численных экспериментов работы /1/ можно объяснить либо существованием нелинейной стабилизации неустойчивости при достаточно малых возмущениях, либо малостью инкремента неустойчивости.

Автор благодарен профессорам Е.П.Жидкову, В.Г.Маханькову и С.И.Сердюковой за полезное обсуждение результатов работы.

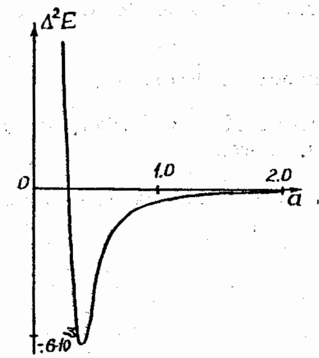

Рис.1. Зависимость Δ^2E от a.

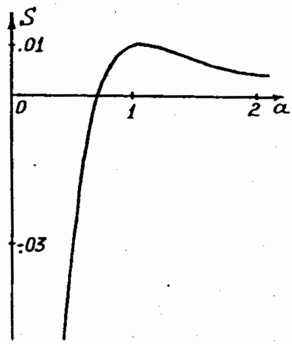

Рис.2. Зависимость S от a.

Литература

I. Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р2-80-796, Дубна, 1980.

2. Bialynicki-Birula I., Mycielski I. Physica Scripta, 1979, 20, p.539.

3. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. Известия вузов, радиофизика, 1979, т.ХУI, вып.7, с.1020.

4. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys.Rev., 1976, D13, p.2739.

5. Makhankov V.G. Phys.Reports, 1978, 35, p.1.

6. Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р2-II-923, Дубна, 1978. Phys.Lett., 1979, A73, p.87.

7. Боголюбский И.Л. ТМФ, 1980, 43, вып.3, с.378.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря 1981 года.