объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-799

А.Б.Говорков

# ПАРАСТАТИСТИКИ И ПАРАПОЛЯ

Направлено в "ТМФ"

1981

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее строгая формулировка принципа неразличимости тождественных частиц дана Н.Н.Боголюбовым [1,с.308] и состоит в требовании симметричности матрицы плотности относительно перестановок всех координат частиц. Н.Н.Боголюбов подчеркнул соответствие этого требования свойству симметрии классической функции распределения для одинаковых частиц и назвал его "классической симметрией" матрицы плотности в отличие от более специфического свойства "квантовой симметрии" волновых функций. Под последней обычно понимается их симметрия для бозе-статистики и антисимметрия для ферми-статистики. Эти свойства волновых функций, очевидно, обеспечивают классическую симметрию матрицы плотности, но обратное, конечно, несправедливо.

Многие авторы исследовали вопрос о том, какие еще квантовые статистики допустимы классической симметрией? Общая классификация допустимых обобщенных статистик была дана Хартлом, Столтом и Тейлором [2,3], исходившими из кластерных свойств волновых функций тождественных частиц, а также Хаагом с сотрудниками [4], исходившими из алгебры локальных наблюдаемых. Состоит она в следующем. Прежде всего, статистики тождественных частиц разделяются на два класса: бесконечных и конечных статистик.

В случае бесконечной статистики число частиц, находящихся в симметричном или в антисимметричном состояниях, ничем не ограничено. Возможно, что существует всего лишь одна бесконечная статистика, для которой симметрия волновых функций определяется всеми без исключения схемами Юнга [4], и что ей соответствует классическая больцмановская статистика, но доказать это пока не удалось. Ниже бесконечные статистики рассматриваться не будут.

Конечные статистики, в свою очередь, делятся на два типа. Для статистик первого типа число частиц в симметричном, а для второго - в антисимметричном состоянии не может превосходить некоторое наперед заданное целое число $p$, называемое "порядком" или "рангом" статистики. Им соответствуют: в первом случае - все без исключения схемы Юнга с числом столбцов, не большим $p$, а во втором - с числом строк, не большим $p$. Очевидно, $p=1$ означает обычные ферми- и бозе-статистики. Статистики, для которых $p>1$, получили наименование параферми- и парабозе-статистик, соответственно указанным типам.

Хорошо известно, что для описания систем тождественных частиц весьма удобен метод вторичного квантования, поскольку в перестановочных свойствах вводимых в нем операторов рождения и уничтожения заключена вся информация о перестановочных свойствах соответствующих волновых функций. Однако, если для случая обычных статистик эта связь /при использовании фоковского пространства/ очевидна, то в случае парастатистик она подвергалась сомнению и ее обсуждение породило значительную дискуссию /5-11/. При этом обычно обсуждался вопрос о соответствии парастатистик определенной заданной схеме обобщенного квантования, предложенной Грином /12/ и Волковым /13/. Представляется естественной постановка более общего вопроса: какие схемы вторичного квантования /поля/ вообще могут соответствовать парастатистикам, и каковы те необходимые условия, которым эти схемы должны удовлетворять?

В данной работе предпринята попытка ответить на этот вопрос. Мы исходим из предположения о существовании операторов рождения и уничтожения частиц, на которые налагаем общие ограничения, обусловленные постулатами квантовой теории, и частные требования, связанные с определенным типом статистики. При этом мы используем метод Боголюбова /1/, при котором вторичному квантованию подвергается не волновая функция тождественных частиц, симметрия которой заранее неизвестна, а непосредственно матрица плотности, которая в любом случае должна быть симметричной.

Первоначально рассмотрение производится в рамках нерелятивистской теории. Переход к релятивистской теории и, соответственно, теории поля легко совершить после того, как будут установлены перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения.

Материал расположен следующим образом. В разделе 2 формулируются постулаты вторичного квантования. В разделе 3 на основе дополнительных постулатов, определяющих пространство Фока, доказывается теорема о связи парастатистик с гриновским параквантованием полей. В Заключении подводятся итоги рассмотрения и кратко обсуждается смысл парастатистик.

## 2. ПОСТУЛАТЫ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

В работе /14/ было показано, что при квантовании матрицы плотности для системы с постоянным числом тождественных частиц можно определить операторы $N_{ij}$ перехода частиц из одного состояния, скажем, $i$, в другое состояние, скажем, $j$. Необходимыми условиями, которым должны удовлетворять эти операторы, являются:

условие эрмитовости

$$N_{ij}^{+} = N_{ji} \qquad /1/$$

и подчинение алгебре генераторов $SU(n \to \infty)$ / $n$ - число различных /дискретных/ одночастичных состояний/

$$[N_{ij}, N_{rs}] = \delta_{jr} N_{is} - \delta_{is} N_{rj} \,. \qquad /2/$$

Условия /1/ и /2/ являются алгебраическим выражением принципа неразличимости тождественных частиц. Они были установлены Н.Н.Боголюбовым /1,с.333/ при непосредственном квантовании матрицы плотности для случаев бозе- и ферми-статистики. Оказывается, что они должны выполняться и при любом обобщении статистик тождественных частиц /14/.

Перейдем теперь к рассмотрению систем с переменным числом тождественных частиц. Для этого введем операторы рождения и уничтожения частиц.

Постулат I. Оператор перехода $N_{ij}$ можно представить в виде произведения двух операторов: $b_i^{+}$ и $b_j$,

$$N_{ij} = \alpha^{-1} [b_i^{+}, b_j]_{\epsilon} + c_{ij} \,, \qquad /3/$$

где

$$[b_i^{+}, b_j]_{\epsilon} \equiv b_i^{+} b_j + \epsilon\, b_j b_i^{+} \qquad /4/$$

$\epsilon$ - произвольное вещественное число, $\alpha^{-1}$ - произвольный вещественный множитель, $c_{ij}$ - произвольная постоянная.

Операция эрмитового сопряжения определена так, что

$$(b_i^{+} b_j)^{+} = b_j^{+} b_i \,. \qquad /5/$$

Тогда вещественность $\alpha^{-1}$ и $\epsilon$ следует из /1/.

Оператором числа частиц в данном состоянии $r$ является /14/

$$N_r \equiv N_{rr} \,. \qquad /6/$$

Следующий постулат наделяет операторы $b_i$ и $b_i^{+}$ свойствами операторов уничтожения и рождения частицы в состоянии $i$:

Постулат II. Оператор $b_i$ уменьшает число частиц в состоянии $i$ на единицу:

$$[N_r, b_i]_{-} = -\delta_{ri}\, b_i \,. \qquad /7/$$

Следствием /7/ с учетом /5/ является также

$$[N_r, b_i^{+}] = \delta_{ri}\, b_i^{+} \,. \qquad /8/$$

Постулат III. /Принцип суперпозиции/. Допустимы неособые преобразования

$$b'_r = \sum_j u_{rj} b_j , \quad b'^{+}_r = \sum_j \bar{u}_{rj} b^+_j \qquad /9/$$

/черта означает комплексное сопряжение/, не изменяющие соотношений /1/, /2/, /7/.

Теперь, на основе постулатов I-III, мы можем получить необходимые перестановочные соотношения для b и b⁺.

Сначала покажем, что преобразование /9/ должно быть унитарным. Подстановка /3/ в /2/ дает

$$[[b^+_i, b_j]_\epsilon , [b^+_r, b_s]_\epsilon ]_- =$$

$$= a\delta_{jr} [b^+_i, b_s]_\epsilon - a\delta_{is} [b^+_r , b_j]_\epsilon + a(\delta_{jr} c_{is} - \delta_{is} c_{rj}) . \qquad /10/$$

Требование инвариантности этого соотношения относительно преобразования /9/ приводит к условию унитарности

$$\sum_m u_{jm} \bar{u}_{rm} = \delta_{jr} \qquad /11/$$

и уравнению для постоянных

$$\sum_{m,n} \bar{u}_{im} u_{sn} c_{mn} = c_{is} . \qquad /12/$$

Вследствие того, что уравнение /12/ должно выполняться при любых унитарных преобразованиях /11/, его решением является

$$c_{mn} = c\delta_{mn} , \qquad /13/$$

где $c$ - вещественная постоянная.

Отметим, что инвариантность теории относительно унитарных преобразований /9/ была постулирована в работе /15/. Здесь удалось связать доказательство унитарности этого преобразования с условием /2/, вытекающим из принципа неразличимости тождественных частиц.

Далее, подстановка /3/ /при $j = j = r$ / в /7/ дает

$$[[b^+_r, b_r]_\epsilon , b_j]_- = - a\delta_{rj} b_j \qquad /14/$$

Следуя работе /15/, произведем инфинитезимальное преобразование /9/ с коэффициентами

$$u_{rj} = \delta_{rj} + \epsilon_{rj} , \quad \bar{\epsilon}_{rj} = -\epsilon_{jr} . \qquad /15/$$

Для величин первого порядка малости по $\epsilon$ из /14/ получим

$$\sum_s (\epsilon_{rs} [[b_r^+, b_s]_\epsilon, b_j]_- - \epsilon_{sr} [[b_s^+, b_r]_\epsilon, b_j]_- -$$
$$- a\epsilon_{jr} \delta_{sr} b_s + a \epsilon_{rs} \delta_{rj} b_s) = 0.$$

В силу произвольности $\epsilon_{rs}$ стоящее при нем выражение /точнее, в отдельности при его действительной и мнимой частях/ должно обращаться в нуль. Отсюда мы получаем основное коммутационное соотношение

$$[[b_r^+, b_s]_\epsilon, b_j]_- = -a\delta_{rj} b_s . \qquad /16/$$

Эрмитовое сопряжение дает

$$[[b_r^+, b_s]_\epsilon, b_j^+]_- = a\delta_{sj} b_r^+ . \qquad /17/$$

Используя тождество

$$[[A,B]_\epsilon, [C,D]_\eta]_- = [A,[B,[C,D]_\eta]_-]_\epsilon +$$
$$+ \epsilon [B,[A,[C,D]_\eta]_-]_{1/\epsilon} , \qquad /18/$$

легко проверить, что при выполнении /16/, /17/ соотношение /10/ /с учетом /13// обращается в тождество. При $\epsilon$ ±1 соотношение /16/ переходит в гриновские соотношения [12].

## 3. ТЕОРЕМА О СВЯЗИ ПАРАКВАНТОВАНИЯ И ПАРАСТАТИСТИКИ

Рассмотрим представление Фока соотношений /16/ и /17/. В его основу положим

Постулат IV. Существует единственное вакуумное состояние $|0\rangle$ такое, что

$$b_r |0\rangle = 0 \quad \text{для всех } r . \qquad /19/$$

Следствие. Если $\epsilon \neq 0$, то

$$b_s b_r^+ |0\rangle = p\delta_{sr} |0\rangle , \qquad /20/$$

где p - произвольное число.

Доказательство этого следствия, как и многих других последующих утверждений, аналогично доказательству, приведенному в работе [16] для частного случая $\epsilon = \pm 1$. Здесь мы приводим доказательства для случая произвольного $\epsilon$ как раз для того, чтобы обосновать этот частный выбор. Для доказательства подействуем левой и правой частями /16/ на вакуум. С учетом /19/ получим

$$\epsilon b_j b_s b_t^+ |0> = 0.$$

Если $\epsilon \neq 0$, то в силу единственности вакуума имеем

$$b_s b_r^+ |0> = f_{sr} |0>, \qquad /21/$$

где $f_{sr}$ - некоторый числовой коэффициент. Подействуем теперь на вакуум обеими частями /10/ /с учетом /13//. Получим

$$\epsilon (\delta_{jr} f_{sl} - \delta_{ts} f_{jr}) |0> = 0.$$

Опять, при $\epsilon \neq 0$, имеем

$$f_{jr} = p \delta_{jr},$$

где $p$ - произвольный общий коэффициент. Следствие /20/ доказано.

Теорема. Если $\epsilon \neq 0$, то из условий: 1/ положительной определенности нормы векторов состояний в пространстве Фока; 2/ того, что число частиц в симметричном или антисимметричном состоянии не может превосходить некоторое заданное число $M \geq 2$, следует, что $\epsilon = -1$ в первом случае и $\epsilon = +1$ - во втором.

Доказательство. Рассмотрим симметричный или антисимметричный вектор $N$-частичного состояния

$$|\chi> = \sum_{\mathcal{P}} \lambda^{\eta(\mathcal{P})} b^+_{\mathcal{P}\ell_1} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} |0>, \qquad /22/$$

где $\mathcal{P}$ - произвольная перестановка индексов

$$(\ell_1, \dots, \ell_N) \to (\mathcal{P}\ell_1, \dots, \mathcal{P}\ell_N),$$

$\eta(\mathcal{P})$ - ее четность,

$$\lambda = \begin{cases} +1 & \text{для симметричного вектора,} \\ -1 & \text{для антисимметричного вектора.} \end{cases} \qquad /23/$$

Вычислим норму таких векторов. Предварительно докажем лемму:

Лемма

$$b_\ell |\chi> = R(N, z) (\sum_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}} \delta_{\ell, \mathcal{P}\ell_1} b^+_{\mathcal{P}\ell_2} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} |0>), \qquad /24/$$

где числовой коэффициент

$$R(N, z) = z^{1-N} \{p(z^{N-1} - z^{N-2} + \dots \mp z \pm 1) +$$

$$+ \alpha[(N-1) z^{N-2} - (N-2) z^{N-3} + \dots \pm 2z \mp 1]\}, \qquad /25/$$

$$z \equiv \lambda\epsilon. \qquad /26/$$

Верхний знак в /25/ берется при нечетном $N$, нижний - при четном $N$. Для краткости введено обозначение $\lambda_{\mathcal{P}} \equiv \lambda^{\pi(\mathcal{P})}$. Доказательство производится по индукции. Для $N = 1$ /24/ совпадает с/20/. Для $N = 2$ /24/ легко проверяется с помощью /17/, переписанного в виде

$$b_\ell b_r^+ b_j^+ = \epsilon^{-1} b_j^+ b_r^+ b_\ell - \epsilon^{-1} b_r^+ b_\ell b_j^+ + b_j^+ b_\ell b_r^+ + \\ + a\epsilon^{-1} \delta_{\ell j} b_r^+, \qquad /27/$$

и условий /19/, /20/. Далее, предполагается справедливость /24/ для $N-1$ и $N-2$ и доказывается его справедливость для $N$:

$$b_\ell (\sum_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}} b^+_{\mathcal{P}\ell_1} b^+_{\mathcal{P}\ell_2} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} | 0>) =$$

$$= \sum_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}} (\epsilon^{-1} b^+_{\mathcal{P}\ell_2} b^+_{\mathcal{P}\ell_1} b_\ell - \epsilon^{-1} b^+_{\mathcal{P}\ell_1} b_\ell b^+_{\mathcal{P}\ell_2} +$$

$$+ b^+_{\mathcal{P}\ell_2} b_\ell b^+_{\mathcal{P}\ell_1} + a\epsilon^{-1} \delta_{\ell,\mathcal{P}\ell_2} b^+_{\mathcal{P}\ell_1}) b^+_{\mathcal{P}\ell_3} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} | 0> =$$

$$= \sum_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}} \{ \epsilon^{-1} b^+_{\mathcal{P}\ell_2} b^+_{\mathcal{P}\ell_1} R(N-2, z) \delta_{\ell,\mathcal{P}\ell_3} b^+_{\mathcal{P}\ell_4} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} -$$

$$- \epsilon^{-1} b^+_{\mathcal{P}\ell_1} R(N-1, z) \delta_{\ell,\mathcal{P}\ell_2} b^+_{\mathcal{P}\ell_3} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} +$$

$$+ b^+_{\mathcal{P}\ell_2} R(N-1, z) \delta_{\ell,\mathcal{P}\ell_1} b^+_{\mathcal{P}\ell_3} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} +$$

$$+ a\epsilon^{-1} b^+_{\mathcal{P}\ell_1} \delta_{\ell,\mathcal{P}\ell_2} b^+_{\mathcal{P}\ell_3} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} \} | 0> =$$

$$= \sum_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}} \{ \epsilon^{-1} \lambda R(N-2, z) + (1 - \lambda\epsilon^{-1}) R(N-1, z) +$$

$$+ a\lambda\epsilon^{-1} \} \delta_{\ell,\mathcal{P}\ell_1} b^+_{\mathcal{P}\ell_2} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} | 0> =$$

$$= \sum_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}} R(N, z) \delta_{\ell,\mathcal{P}\ell_1} b^+_{\mathcal{P}\ell_2} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} | 0>.$$

Здесь на первом шаге использовалось /27/, на втором - предположение индукции, на третьем - перестановка индексов для восстановления их прежней последовательности и, наконец, последнее равенство следует из соотношения

$$zR(N, z) = R(N-2, z) + (z-1) R(N-1, z) + a, \qquad /28/$$

которое, в свою очередь, легко доказать на основе рекуррентного соотношения

$$R(N, z) = p - z^{-1}[R(N-1, z) - (N-1)\alpha], \qquad /29/$$

вытекающего из определения /25/. Лемма доказана.

Теперь, повторным применением /24/, легко вычислить норму вектора /22/:

$$\|\chi\|^2 \equiv \sum_{\mathcal{P},\mathcal{P}'} \lambda_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}'} \langle 0| b_{\mathcal{P}'\ell_N} \dots b_{\mathcal{P}'\ell_1} b^+_{\mathcal{P}\ell_1} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N}|0\rangle =$$

$$= R(N, z)\, R(N-1, z) \dots R(1, z) \times \qquad /30/$$

$$\times \left( \sum_{\mathcal{P},\mathcal{P}'} \lambda_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}'} \delta_{\mathcal{P}'\ell_1, \mathcal{P}\ell_1} \dots \delta_{\mathcal{P}'\ell_N, \mathcal{P}\ell_N} \right) =$$

$$= N!\, R(1, z)\, R(2, z) \dots R(N, z)\ .$$

Для $N=1$ имеем

$$\| b^+_{\ell_1} |0\rangle \|^2 = p$$

и из условия положительности этой нормы

$$p > 0\ . \qquad /31/$$

Далее, по условиям теоремы норма вектора /22/ при $N = M+1$ должна обращаться в нуль:

$$R(M+1, z) = 0. \qquad /32/$$

Согласно /25/, это означает

$$p = -\alpha[Mz^{M-1} - (M-1)z^{M-2} + \dots \mp 1]/(z^M - z^{M-1} + \dots \pm 1)\ . \qquad /33/$$

Вычислим еще норму вектора, симметричного или антисимметричного по $N$ частицам и имеющего еще одну "лишнюю" частицу, по индексу $\ell$ которой не производится симметризация с индексами остальных частиц. Вычисления производим точно так же, как и вычисление /30/. В результате получим:

$$\| \sum_{\mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{P}}\, b^+_{\mathcal{P}\ell_1} b^+_{\ell}\, b^+_{\mathcal{P}\ell_2} \dots b^+_{\mathcal{P}\ell_N} |0\rangle \|^2 =$$

$$= N!\, R(1, z) \dots R(N-1, z)\, z^{-3} \times \qquad /34/$$

$$\times \{ z(pz^2 - \alpha) R(N, z) + (p(z^2-1) + \alpha)\, R(N-1, z) + \alpha p z \}\ .$$

При $N=M+1$ эта норма также должна обращаться в нуль. Учитывая /32/, получаем новое условие

$$[p(z^2-1) + \alpha]\, R(M, z) + \alpha p z = 0. \qquad /35/$$

Воспользовавшись /29/ и выразив $R(M,z)$ через $R(M+1,z)$, перепишем /35/ в виде

$$[p(z^2-1)+\alpha](pz+M\alpha)+\alpha pz=0\,. \qquad /36/$$

Подставив в него выражение /33/ для $p$ и произведя некоторые преобразования, получим уравнение для $z$:

$$z^{2M-2}-2z^{2M-3}+3z^{2M-4}-\ldots+(-1)^M(M-1)z^M+$$
$$+(-1)^{M-1}(M-1)z^{M-2}+(-1)^{M-2}(M-2)z^{M-3}+ \qquad /37/$$
$$+\ldots-3z+2z-1=0\,.$$

В Дополнении доказывается, что при $M\geq 2$ оно имеет лишь два вещественных корня $z=\pm 1$.

Рассмотрим корень $z=+1$. При нечетном $M$ он не удовлетворяет исходному уравнению /32/. При четном $M$, согласно /33/, имеем

$$p=-\alpha M/2\,.$$

Тогда из условия /31/ следует

$$\alpha<0\,.$$

Рассмотрим, однако, условие положительности нормы вектора при $N=2$. Согласно /30/ и /25/, имеем

$$R(1,z)R(2,z)=pz^{-1}[p(z-1)+\alpha]=\alpha p>0$$

и, следовательно, $\alpha>0$. Таким образом, корень $z=+1$ не обеспечивает положительной определенности нормы векторов и должен быть отброшен. Легко проверить, что оставшийся корень $z=-1$ удовлетворяет этому условию при

$$\alpha>0\,. \qquad /38/$$

При этом из /36/ получаем

$$p=M\alpha/2\,. \qquad /39/$$

Учитывая /26/, получаем $\lambda\epsilon=-1$ и заключаем, что

$\epsilon$ = −1 при $\lambda=+1$, т.е. для параферми-статистики,
$\epsilon$ = +1 при $\lambda=-1$, т.е. для парабозе-статистики. /40/

Теорема доказана.

Заметим, что удобно выбрать нормировочные множители в операторах $b$ и $b^+$, входящих в /3/, так, чтобы $\alpha=2$. Тогда $p$ просто совпадает с максимальным числом частиц в симметричном состоянии для параферми-статистики и в антисимметричном состоянии для парабозе-статистики.

При доказательстве теоремы мы вынуждены были сделать два исключения: $\epsilon=0$ и $M=1$. Обсудим их более подробно.

В случае $\epsilon = 0$ выражение /3/ приобретает нормальный вид, и мы будем называть этот случай "нормальным". Соотношения /16/ и /17/ теперь имеют вид

$$b_r^+ b_s b_j - b_j b_r^+ b_s = -a\delta_{rj}\, b_s\,, \qquad /41а/$$

$$b_r^+ b_s b_j^+ - b_j^+ b_r^+ b_s = a\delta_{sj}\, b_r^+\,. \qquad /41б/$$

Этих соотношений недостаточно для того, чтобы вычислить нормы векторов состояний так, как это было проделано нами выше. Легко проверить, что обычные соотношения

$$[b_r\,,\, b_s^+]_\lambda = \delta_{rs} \qquad /42/$$

являются решениями /41/ /при $a = 1$/. Можно проверить также, что параполя высших порядков ($p > 2$) не удовлетворяют /41/. С этой целью удобно использовать для параполей так называемый "анзатц Грина" /12,16/. Остается еще возможность сопоставить квантованию /41/ бесконечные статистики, но она не исследована.

Нам остается рассмотреть в рамках общей схемы случай обычных статистик, соответствующий $M = 1$. В этом случае условие /32/ приобретает вид

$$R(2,\, z) = z^{-1}[p(z-1) + a] = 0$$

или

$$p = -a/(z-1)\,. \qquad /43/$$

Условие /36/ при этом выполняется автоматически и не налагает новых ограничений. Вообще, можно показать, что при соблюдении /43/ в пространстве Фока выполняются соотношения

$$[b_r\,,\, b_s^+]_\lambda = p\delta_{rs}\,. \qquad /44/$$

Единственное ограничение следует из условия /31/ и означает

$$-a/(z-1) > 0\,,$$

или, при $\lambda = 1$ /ферми-статистика/

$$a < 0,\quad \epsilon > 1;\quad a > 0,\quad \epsilon < 1, \qquad /45а/$$

при $\lambda = -1$ /бозе-статистика/

$$a < 0,\ \epsilon < -1;\ a > 0,\ \epsilon > -1. \qquad /45б/$$

Таким образом, обычные статистики описываются общими соотношениями /16/, /17/ и условиями /19/, /20/ при выполнении /43/, /45/. Очевидно, при помощи замены $b_r \to b_r/\sqrt{p}$ всегда можно придти к обычным соотношениям /42/. Это означает выбор $p = 1$ в /20/ и $a$ в /16/, /17/ составляет

$$a = 1 - z = 1 - \lambda\epsilon = \begin{cases} 1-\epsilon & \text{для ферми-статистики,} \\ 1+\epsilon & \text{для бозе-статистики} \end{cases} \qquad /46/$$

при произвольном $\epsilon$ /исключая особые случаи $\epsilon=0$, $\epsilon=1$ и $\epsilon=-1$/. Интересно, что для обычных статистик имеется такой произвол в выборе $\epsilon$.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наше рассмотрение показало, что, если исключить из него "нормальный случай" ($\epsilon=0$), то единственной схемой, удовлетворяющей постулатам I-IV и описывающей конечные парастатистики, является схема Грина/12/. С другой стороны, Гринберг и Мессиа/16/ показали достаточность этой схемы для описания конечных парастатистик. Тем самым мы приходим к заключению о необходимости и достаточности гриновского квантования полей для описания конечных парастатистик. Неисследованными остались случаи бесконечной парастатистики и "нормального" квантования, которые, возможно, соответствуют друг другу. Вывод о необходимости и достаточности гриновского квантования следует формулировать с указанием на это исключение.

С другой стороны, оказалось, что параквантование Грина/12/ - Волкова/13/ описывает на самом деле частицы различных сортов/8,17,18/ или, иначе, тождественные частицы с дополнительной внутренней координатой. Так, например, в терминах парафермиполя второго порядка удалось определить операторы изоспина $I$ и его третьей проекции $I_3$ и, тем самым, сопоставить состояниям парачастиц состояния обычных фермионов, обладающих внутренней координатой типа изоспина/18/. Объединяя этот результат с результатом, полученным в данной работе, можно заключить, что парастатистики представляют собой, в некотором смысле, тривиальное обобщение обычных статистик на случай вырождения по некоторой внутренней координате.

Однако исследование такого "скрытого" способа введения внутренней координаты посредством параполевых перестановочных соотношений представляет, на наш взгляд, значительный интерес, поскольку при этом могут возникнуть определенные ограничения на внутренние симметрии, которым такая скрытая внутренняя координата подчиняется. Так, в приведенном примере невозможно сформулировать в рамках параполя другие операторы изоспина $I_{\pm}$ /для этого требуется ввести вспомогательные параполя/ и тем самым определить целиком изоспиновое пространство. В этом смысле нельзя говорить о полной эквивалентности обычного описания вырождения по какой-либо внутренней координате при помощи введения некоторого внутреннего пространства типа изоспинового и, с другой стороны, при помощи параполя данного порядка. Такие подходы могут оказаться, скорее, альтернативными.

Автор выражает глубокую благодарность А.М.Балдину, С.Б.Герасимову, В.А.Матвееву и А.Н.Тавхелидзе за неоднократное обсуждение с ними изложенных здесь вопросов и ценные замечания.

## ДОПОЛНЕНИЕ

### Решение алгебраического уравнения /37/

Перепишем /37/, сложив первое слагаемое его левой части с последним, второе - с предпоследним и т.д.

$$(z^{2M-2}-1)-2z(z^{2M-4}-1)+3z^2(z^{2M-6}-1)- \\ -\ldots+(-1)^M\,(M-1)(z^2-1)\,z^{M-2}=0. \qquad /Д.1/$$

Очевидно, оно имеет корни $z=\pm 1$ /при $M\geq 2$/. Докажем, что оно не имеет других вещественных корней. Произведем суммирование

$$z^{2M-2}-2z^{2M-3}+\ldots+(-1)^M\,(M-1)\,z^M= \\ =\{z^{2M}+(-1)^M\,[(M-1)\,z^M+Mz^{M+1}]\}/(1+z)^2, \qquad /Д.2/$$

$$1-2z+3z-\ldots+(-1)^{M-1}\,(M-1)\,z^{M-2}= \\ =\{1+(-1)^M\,Mz^{M-1}+(-1)^M\,(M-1)\,z^M\}/(1+z)^2. \qquad /Д.3/$$

Подстановка /Д.2/ и /Д.3/ в /Д.1/ дает

$$(-1)^M\,Mz^{M-1}(z^2-1)+(z^{2M}-1)=0. \qquad /Д.4/$$

Сократив на $(z^2-1)$, получим

$$(-1)^M\,Mz^{M-1}+z^{2(M-1)}+z^{2(M-2)}+\ldots+z^2+1=0. \qquad /Д.5/$$

Пусть M - четно. Тогда для левой части /Д.5/ имеем

$$Mz^{M-1}+z^{2(M-1)}+z^{2(M-2)}+\ldots+z^2+1= \\ =(1+z^{M-1})^2+(1+z^{M-3})^2z^2+\ldots+(1+z)^2z^{M-2}. \qquad /Д.6/$$

Мы имеем сумму квадратов и она может обращаться в нуль только в том случае, если каждый из них обращается в нуль. Это может быть только при $z=-1$ и других корней /Д.6/ не имеет.

Пусть $M=2m+1$ - нечетно. Тогда для левой части /Д.5/ имеем

$$-(2m+1)z^{2m}+z^{4m}+z^{4m-2}+\ldots+z^{2(m+1)}+z^{2m}+$$

$$+z^{2(m-1)}+\ldots+z^{2}+1=(z^{2m}-1)^{2}+ \qquad /Д.7/$$

$$+z^{2}(z^{2(m-1)}-1)^{2}+\ldots+z^{2(m-1)}(z^{2}-1)^{2}.$$

Вновь мы получили сумму квадратов, и вещественными корнями /Д.7/ являются $z=\pm 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. Избранные труды. "Наукова думка", Киев, 1970, т.2.
2. Stolt R.H., Taylor J.R. Phys.Rev., 1970, D1, p.2226.
3. Hartle J.B., Stolt R.H., Taylor J.R. Phys.Rev., 1970, D2, p.1759.
4. Doplicher S., Haag R., Roberts J.E. Comm.Math.Phys., 1971, 23, p.199; ibid., 1974, 35, p.49.
5. Galindo A., Indurian F. Nuovo Cim., 1963, 30, p.1040.
6. Messiah A.M.L., Greenberg O.W. Phys.Rev., 1964, B136, p.248.
7. Greenberg O.W. In: Mathematical Theory of Elementary Particles. M.I.T. Cambridge, 1966, p.29.
8. Landshoff P.V., Stapp H.P. Ann.Phys.(N.Y.), 1967, 43, p.72.
9. Yamada M. Nucl.Phys., 1968, B6, p.596.
10. Ohnuki Y., Kamefuchi S. Ann.Phys.(N.Y.), 1970, 57, p.543.
11. Stolt R.H., Taylor J.R. Nucl.Phys., 1970, B19, p.1; Nuovo Cim., 1971, A5, p.185.
12. Green H.S. Phys.Rev., 1953, 90, p.270.
13. Волков Д.В. ЖЭТФ, 1959, 36, с.1560; там же, 1960, 38, с.519.
14. Govorkov A.B. J.Phys.A: Math.Gen., 1980, 13, p.1673.
15. Bialynicki-Birula I. Nucl.Phys., 1963, 49, p.605.
16. Greenberg O.W., Messiah A.M.L. Phys.Rev., 1965, B138, p.1155.
17. Chernikov N.A. Acta Physica Polonica, 1962, 21, p.51.
18. Говорков А.Б. ЖЭТФ, 1968, 54, с.1785; Govorkov A.B. Ann.Phys.(N.Y.), 1969, 53, p.349; Int.J.Theor.Phys., 1973, 7, p.49.
19. Bracken A.J., Green H.S. J.Math.Phys., 1973, 14, p.1784.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1981 года.