1140/82

9/III-82

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-749

А.Б.Говорков

ПАРАСТАТИСТИКА И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ

Направлено в ТМФ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние годы в физике адронов наметился значительный прогресс, связанный с открытием цветовой степени свободы кварков [1-6] и развитой на ее основе калибровочной теорией взаимодействия кварков и глюонов [7,8] - КХД, которая, полагают, заменит собою старую теорию сильных взаимодействий адронов.

При этом на саму цветовую симметрию имеется два взгляда. При одном из них она рассматривается как не нарушаемая никаким образом с о в е р ш е н н а я симметрия, при другом - приравнивается к обычным нарушенным внутренним симметриям. В настоящее время большей популярностью пользуется первый взгляд, хотя совершенство цветовой симметрии и тем более его причины не установлены. Поэтому нам представляется целесообразным для лучшего понимания природы цветовой симметрии вновь обратиться к ее исходной формулировке.

Как известно, основной причиной для предположения у кварков дополнительной внутренней степени свободы, принимающей три значения, послужила поднятая в связи с развитием спектроскопии адронов проблема статистики кварков: при составлении из них барионов кварки оказывались в симметричном спин-унитарном состоянии.

Впервые указанное решение этой проблемы было дано в работе Боголюбова-Струминского-Тавхелидзе [1], предложивших "в в е с т и д о п о л н и т е л ь н ы е к в а н т о в ы е ч и с л а, к о т о р ы е а н т и с и м м е т р и з у ю т п о л н у ю в о л н о в у ю ф у н к ц и ю" /кварков/, а затем - в ряде работ других авторов [2-6]. Впоследствии новая степень свободы получила образное наименование "ц в е т а к в а р к о в", а связанная с нею симметрия -"ц в е т о в о й $SU(3)_c$ -симметрии" [7,8].

Существовало, однако, другое решение проблемы статистики кварков, предложенное Гринбергом [9] и опиравшееся на использование для кварков парафермии-статистики ранга /или порядка/ 3, допускающей помещение трех тождественных спинорных частиц в одно квантовомеханическое состояние. Теория поля, соответствующая обобщенным статистикам такого типа, в общем виде была развита Грином [10] и Волковым [11], изучалась затем многими авторами [12-16] и получила наименование теории "п а р а п о л я".

В интерпретации Гринберга и Мессиа [16] подчеркивалось различие между парастатистикой и случаем вырождения по какой-либо внутренней степени свободы /см. следующий раздел/. Однако впоследствии в ряде работ /см., например, [7]/ ошибочным образом ставился знак равенства между ними. На самом деле удалось доказать [17] лишь ограниченную эквивалентность парастатистики случаю вырождения по некоторой внутренней координате /см. также [18-20] /. Термин "о г р а н и ч е н н а я   э к в и в а л е н т н о с т ь" следует понимать в том смысле, что неявное введение посредством параполя внутренней степени свободы налагает весьма жесткие ограничения /вместе с требованием локальности/ на возможные внутренние симметрии, которым эта скрытая степень свободы соответствует. В частности, было показано, что гринберговские параферми-кварки не эквивалентны цветовой /в современной терминологии/ $SU(3)$ -симметрии, но эквивалентны лишь $SO(3)$ внутренней симметрии [17].

Представляется важным внесение ясности в этот вопрос и установление правильного соотношения между указанными подходами также и потому, что это может иметь принципиальное значение не только для кварковой модели, но, возможно, и для будущего развития теории элементарных частиц. Например, использование парастатистики, с одной стороны, и новых симметрий типа цветовой, с другой, при развитии представлений о составной природе кварков и лептонов могло бы привести к совершенно различным вариантам теории фундаментальных частиц /преонов/.

В настоящей работе подробно анализируется связь между парастатистикой и калибровочными симметриями. Материал расположен следующим образом. В разделе 2 дается краткое изложение формализма теории параполей. В разделе 3 рассматриваются их локальные взаимодействия юкавского типа "т о к   х   п о л е". В разделе 4 устанавливается посредством преобразования Клейна глобальная симметрия этих взаимодействий. В разделе 5 доказывается в явном виде, что в теории параполей можно построить единственный лагранжиан, эквивалентный янг-милсовскому лагранжиану, максимальной калибровочной симметрией которого оказывается ортогональная группа $SO(3)$. В разделе 6 обсуждаются особенности этой симметрии,причины, почему ее нельзя использовать в качестве цветовой симметрии кварков,а также указывается на интересную, с нашей точки зрения, возможность ее использования в качестве точной подгруппы нарушенной цветовой симметрии $SU(3)_c$. В заключении подводятся краткие итоги данного рассмотрения.

Некоторые из приведенных в данной работе результатов в краткой форме указывались в [17], а также в ряде работ других авторов [18-22]. Автор счел возможным дать здесь более последовательное и систематическое изложение. Далее, в дополнении дано краткое изложение изданной в малодоступной форме работы[17], поскольку в ней содержится общее рассмотрение связи парастатистики со случаем вырождения по внутренней координате.

2. ПАРАПОЛЯ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Мы будем исходить из а н з а т ц а Грина[10,15-17], в основе которого лежит представление параполей в виде прямой суммы операторов обычных ферми- или бозе-полей, подчиняющихся, однако, аномальным[23] взаимным коммутационным соотношениям и называемых "г р и н о в с к и м и к о м п о н е н т а м и".

Для частиц со спином 1/2, волновые функции которых подчиняются уравнению Дирака, параферми-поле представляется в виде

$$\psi(x) = \sum_{A=1}^{p} \psi_A(x) , \qquad /1/$$

$$[\bar{\psi}_A(x),\ \psi_B(y)]_{2\delta_{AB}-1} = -i\delta_{AB} S(y-x) ,$$
$$[\psi_A(x),\ \psi_B(y)]_{2\delta_{AB}-1} = [\bar{\psi}_A(x),\ \bar{\psi}_B(y)]_{2\delta_{AB}-1} = 0, \qquad /2/$$

где p - некоторое целое число ≥ 1, скобки означают антикоммутатор или коммутатор при $A=B$ и $A \neq B$ соответственно, $\bar{\psi}_A(x)$ и $\psi_A(x)$ - дираковски-сопряженные спиноры и $S(x)$ -сингулярная функция для дираковского поля.

Для векторных частиц парабозе-поле имеет вид / μ - лоренцев индекс/

$$\mathcal{B}^{\mu}(x) = \sum_{A=1}^{p'} \mathcal{B}^{\mu}_A(x) , \qquad /3/$$

$$[\mathcal{B}^{\mu}_A(x),\ \mathcal{B}^{\nu}_B(y)]_{1-2\delta_{AB}} = -i\delta_{AB}\, \delta^{\mu\nu}\, D(x-y) . \qquad /4/$$

Легко видеть, что целые числа p и p′ в /1/ и /3/ определяют максимально возможные числа частиц в симметричном состоянии для параферми-статистики

$$\sum_{\mathcal{P}} \mathcal{P}\, \{\psi(x_1) \ldots \psi(x_N)\} = 0 \qquad \text{при } N>p \qquad /5/$$

и в антисимметричном состоянии для парабозе-статистики

$$\sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\eta(\mathcal{P})}\, \mathcal{P}\, \{\mathcal{B}(x_1) \ldots \mathcal{B}(x_N)\} = 0 \qquad \text{при } N>p', \qquad /6/$$

где $\mathcal{P}$- перестановки аргументов частиц $(x_1, \ldots, x_N)$, а $\eta(\mathcal{P})$ - четность перестановки $\mathcal{P}$. По этой причине эти числа называют рангом /или порядком/ парастатистик. Очевидно, $p = p' = 1$ отвечают обычным ферми- и бозе-статистикам.

Сами параполя /1/ и /3/ удовлетворяют трилинейным соотношениям Грина[10], которые здесь, однако, не приводятся, поскольку они в дальнейшем непосредственно не понадобятся. Подчеркнем только, что однозначность представления параполей в виде гриновских сумм /1/ и /3/ строго доказана лишь для свободных полей[16]. Доказательство основано на предположении о существовании единственного вакуума и положительной определенности нормы векторов состояний в соответствующем фоковском пространстве. Остается открытым вопрос об однозначности такого представления в общем случае взаимодействующих параполей[24].

Отметим также, что анзатц Грина представляет собою чисто математический прием, удобный при установлении соответствия между теорией параполя и теорией обычных полей с внутренней симметрией. Так, пространство Фока параполей значительно ўже пространства состояний гриновских полей. Как указали Гринберг и Мессиа[16], в первом пространстве, например, имеется лишь одно состояние $\psi^{+}(x)|0\rangle$, тогда как во втором их число равно p: $\psi_1^{+}(x)|0\rangle, \ldots, \psi_p^{+}(x)|0\rangle$. Именно это обстоятельство послужило для этих авторов причиной отказа от интерпретации парастатистики в терминах состояний, вырожденных по внутренней координате. Такая интерпретация, однако, возможна при наличии точного вырождения, поскольку в этом случае в качестве представителя всего набора вырожденных ничем не отличающихся друг от друга состояний можно выбрать лишь одно состояние - их сумму. Оперирование только такими суммами налагает в дальнейшем строгие ограничения на допустимые локальные симметрии внутренней координаты.

В работе[16] было показано также, что дополнительных ограничений в теории не возникает, если между парабозе- и парафермиполями одного порядка $(p=p')$ принять соотношения парабозонного типа:

$$[\psi_A(x), \mathcal{B}^{\mu}_B(y)]_{1-2\delta_{AB}} = [\bar{\psi}_A(x), \mathcal{B}^{\mu}_B(y)]_{1-2\delta_{AB}} = 0. \qquad /7/$$

3. ЮКАВСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРАПОЛЕЙ

Теперь построим локальное взаимодействие юкавского типа "ток x поле":

$$\mathcal{H}_{вз.}(x) = j_{\mu}(x)\,\mathcal{B}^{\mu}(x). \qquad /8/$$

Под локальностью понимается

$$[\mathcal{H}_{вз.}(x), \mathcal{H}_{вз.}(y)]_{-} = 0 \qquad \text{при} \quad x \sim y \qquad /9/$$

/~ означает разделение точек пространственноподобным интервалом/.

В теории свободного дираковского параполя имеется два независимых сохраняющихся тока /21/:

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)]_- = \sum_{A=1}^{p} \bar{\psi}_A(x) \gamma_\mu \psi_A(x), \quad p \geq 1 \qquad /10/$$

и

$$j'_\mu(x) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)]_+ = \frac{1}{2} \sum_{A \neq B=1}^{p} \bar{\psi}_A(x) \gamma_\mu \psi_B(x), \; p \geq 2. \qquad /11/$$

Здесь и всюду в дальнейшем для токов и аналогичных величин подразумевается нормальное произведение в смысле вычитания вакуумных средних, например,

$$j_\mu(x) \to j_\mu(x) - \langle j_\mu(x) \rangle_0 = \sum_{A=1}^{p} :\bar{\psi}_A(x) \gamma_\mu \psi_A(x): \qquad /12/$$

и т.д.

Используя /2/, легко убедиться в том, что коммутаторный ток /10/ локален всегда, тогда как антикоммутаторный ток /11/ имеет такие свойства:
локален для $p = 2$:

$$j'_\mu = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 + \text{э.с.}) ; \qquad /13/$$

парабозе - локален для $p = 3$:

$$j'_\mu = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 + \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_3 + \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_3 + \text{э.с.}) ; \qquad /14/$$

не имеет определенной локальности для $p \geq 4$:

$$j'_\mu = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 + \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_3 + \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_4 + \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_3 + \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_4 + \bar{\psi}_3 \gamma_\mu \psi_4 + \text{э.с.}). \qquad /15/$$

Очевидно, требование локальности взаимодействия /8/ означает, что в случае $p = 2$ токи /10/ и /13/ могут контактировать лишь с обычными бозе-полями, скажем, $\mathfrak{A}_\mu(x)$ и $\mathfrak{B}_\mu(x)$; в случае $p = 3$ ток /10/ контактирует с / электромагнитным/ бозе-полем $\mathfrak{A}_\mu(x)$, а ток /14/ - с /" глюонным"/ парабозе-полем $\mathfrak{B}_\mu(x)$; в случаях $p \geq 4$ локальным будет только взаимодействие тока /10/ с бозе- полем $\mathfrak{A}_\mu(x)$. Таким образом, только в случае $p = 3$ можно построить нетривиальное /построенное не из обычных полей/ локальное юкавское взаимодействие /9,16/

$$\mathcal{H}_{\text{вз.}}(x) = [j'_\mu(x), \mathfrak{B}^\mu(x)]_+ = \sum_{A \neq B \neq C \neq A=1}^{3} \bar{\psi}_A(x) \gamma_\mu \psi_B(x) \mathfrak{B}^\mu_C(x) . \qquad /16/$$

4. ГЛОБАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Для установления симметрии взаимодействия /16/ совершим переход от гриновских компонент к обычным полям с нормальными коммутационными соотношениями /все фермионы - антикоммутируют, все бозоны - коммутируют, фермионы и бозоны - коммутируют/. Для этого определим оператор Клейна [25], обладающий такими коммутационными соотношениями с гриновскими компонентами:

$$[\mathcal{K}, \psi_1]_- = 0, \quad [\mathcal{K}, \psi_2]_+ = [\mathcal{K}, \psi_3]_+ = 0,$$

$$[\mathcal{K}, \mathcal{B}_1]_- = 0, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{B}_2]_+ = [\mathcal{K}, \mathcal{B}_3]_+ = 0. \qquad /17/$$

Для свободных полей его можно представить в явном виде:

$$\mathcal{K} = \exp\{i\pi(N_2 + N_3)\}, \qquad /18/$$

где N_2 и N_3 - операторы чисел частиц с индексами 2 и 3, включающие как ψ-, так и $\mathcal{B}$-поля. Возможность введения такого оператора для параполей в общем случае была доказана в работе [17] как частный случай общей теоремы Араки [23] /см. дополнение/. Для нас важны только его свойства /17/, а также свойства

$$\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}, \quad \mathcal{K}^2 = 1. \qquad /19/$$

Теперь вместо гриновских компонент можно ввести поля

$$\Psi_1 = \psi_1 \mathcal{K}, \quad \Psi_2 = -i\psi_2 \mathcal{K}, \quad \Psi_3 = \psi_3, \qquad /20а/$$

$$B_1 = \mathcal{B}_1 \mathcal{K}, \quad B_2 = -i\mathcal{B}_2 \mathcal{K}, \quad B_3 = \mathcal{B}_3. \qquad /20б/$$

Легко проверить, что для этих полей соотношения /2/, /4/ и /7/ заменяются на нормальные для ферми- и бозе-полей. Далее, взаимодействие /16/ принимает вид

$$\mathcal{H}_{вз.}(x) = -i \sum_{A,B,C=1}^{3} \epsilon_{ABC} \bar{\Psi}_A(x) \gamma_\mu \Psi_B(x) B_C(x), \qquad /21/$$

где ϵ_{ABC} - антисимметричный тензор ($\epsilon_{123} = -\epsilon_{132} = \epsilon_{231} = \dots = 1$).

Очевидно, правая часть /21/ инвариантна относительно вещественных преобразований ортогональной группы SO(3), но не инвариантна относительно общих комплексных преобразований группы SU(3). Таким образом, глобальной симметрией взаимодействия /21/ является группа SO(3) [17].

5. ЯНГ-МИЛСОВСКИЙ ЛАГРАНЖИАН В ТЕОРИИ ПАРАПОЛЕЙ

Итак, в теории параполя можно рассчитывать лишь на построение нелинейного лагранжиана, который будет эквивалентен янг-милсовскому лагранжиану калибровочной группы SO(3), а не SU(3).

Это, действительно, можно сделать, введя нелинейное парабозонное поле

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mathcal{B}_\nu(x) - \partial_\nu \mathcal{B}_\mu(x) + \frac{ig}{2}[\mathcal{B}_\mu(x), \mathcal{B}_\nu(x)]_- , \qquad /22/$$

которое можно переписать через гриновские компоненты

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \sum_{A=1}^{3} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{A}(x) , \qquad /23/$$

где

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{A} = \partial_\mu \mathcal{B}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{B}_\mu^A + ig \sum_{A\neq B\neq C\neq A}^{3} \mathcal{B}_\mu^B \mathcal{B}_\nu^C . \qquad /24/$$

Теперь " копия" янг-милсовского лагранжиана в терминах параполей будет иметь вид

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{8}[\mathcal{F}_{\mu\nu}(x), \mathcal{F}^{\mu\nu}(x)]_+ - \qquad /25/$$

$$-\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), (i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x)]_- + g[j'_\mu(x), \mathcal{B}^\mu(x)]_+ =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{3} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{A} \mathcal{F}^{\mu\nu A} - \sum_{A=1}^{3} \bar{\psi}^A (i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi^A + \qquad /26/$$

$$+ g \sum_{A\neq B\neq C\neq A=1}^{3} (\bar{\psi}^A \gamma_\mu \psi^B)\mathcal{B}^{\mu C} .$$

Производя над гриновскими компонентами преобразование Клейна /20/, приходим к янг-милсовскому лагранжиану калибровочной симметрии SO(3):

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}^{2}(x) - \vec{\bar{\Psi}}(x)\cdot(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\vec{\Psi}(x) - \qquad /27/$$

$$- ig\vec{B}^\mu(x)\cdot[\vec{\bar{\Psi}}(x)\times\gamma_\mu \vec{\Psi}(x)] ,$$

где $\vec{\Psi}$ и $\vec{B}$ являются векторами группы SO(3):

$$\vec{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3), \quad \vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \qquad /28/$$

и

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu + g[\vec{B}_\mu \times \vec{B}_\nu] . \qquad /29/$$

Краткое указание на возможность формулировки в рамках теории параполя нелинейного лагранжиана, эквивалентного янг-милсовскому лагранжиану SO(3), содержится в обзоре /22/ и работе /21/.

6. ОСОБЕННОСТИ КАЛИБРОВОЧНОЙ СИММЕТРИИ SO(3)

Если бы цветовой симметрией оказалась группа SO(3), то глюонов было бы всего три и они, как и кварки, образовали бы векторное представление этой группы.

Рассмотрим условие асимптотической свободы в такой теории [26,27]:

$$b = \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2 - \frac{4}{3}n_f T\right) > 0, \qquad /30/$$

где C_2 - квадратичный оператор Казимира присоединенного представления глюонов, T - значение следа квадрата генераторов фундаментального представления кварков и n_f - число сортов, или " ароматов" кварков. В данном случае роль структурных постоянных играют компоненты тензора ϵ_{ABC} и мы имеем

$$C_2\,\delta_{AB} = \sum_{C,D} \epsilon_{ACD}\,\epsilon_{BCD} = 2\delta_{AB}. \qquad /31/$$

Для генераторов поворота в трехмерном пространстве имеем

$$Sp(T_A T_B) = T\delta_{AB} = 2\delta_{AB}. \qquad /32/$$

Таким образом, условие /30/ принимает вид

$$n_f < 11/4, \qquad \text{или} \qquad n_f \le 2. \qquad /33/$$

Число сортов кварков не должно превосходить двух!

Можно было бы примирить это условие с экспериментальным обнаружением по меньшей мере уже пяти сортов кварков / u, d, s, c, b /, если распределить их, как это сейчас принято, по поколениям, содержащим по два кварка (u, d), (c, s), (b, t), а с каждым поколением считать связанной лишь свою тройку глюонов. Но в этом случае исчезает универсальность глюонов и вследствие этого отсутствует связь между кварками из разных поколений.

Скорее можно ожидать, что $SO(3)$ является точной подгруппой цветовой симметрии $SU(3)_c$, которая сама по себе могла бы быть нарушенной, но восстанавливающейся в асимптотике на малых расстояниях. В этом случае глюоны универсальны для всех поколений, а условие /33/, как известно, существенно ослабевает /$n_f \le 16$/. Однако для формулировки теории с цветовой $SU(3)$-симметрией рамки стандартной теории параполя оказываются слишком узкими и становится необходимым ее принципиальное расширение.

Другая особенность $SO(3)$ калибровочной симметрии связана с ее вещественностью. Ее синглетами являются:

мезоны

$$q\bar{q} = \sum_{A=1}^{3} q_A \bar{q}_A, \qquad /34/$$

дикварки

$$qq = \sum_{A=1}^{3} q_A q_A, \qquad /35/$$

барионы

$$qqq = \sum_{A,B,C=1}^{3} \epsilon_{ABC}\, q_A q_B q_C, \qquad /36/$$

аналоги барионов /анабарионы/, в которых один из кварков заменен на антикварк

$$qq\bar{q} = \sum_{A,B,C=1}^{3} \epsilon_{ABC}\, q_A q_B \bar{q}_C\,, \qquad /37/$$

кварк-глюонные состояния /глюкварки/

$$qg = \sum_{A=1}^{3} q_A g_A\,. \qquad /38/$$

Инфракрасная нестабильность не запрещала бы существование дробно-зарядных объектов/35/,/37/, /38/ в свободном состоянии. Более того, как следует из вида лагранжиана /27/, взаимодействия между кварками, кварками и антикварками были бы одинаковыми и потому мезоны и дикварки или барионы и анабарионы должны были бы иметь близкие массы. До настоящего времени таких состояний не обнаружено. Однако если наблюдение/28/ дробных остаточных зарядов $(\pm 1/3)e$ в опытах милликеновского типа подтвердится, то оно могло бы найти здесь свое объяснение. При этом саму цветовую $SU(3)$ -симметрию следовало бы считать нарушенной, но для исходных цветовых объектов, не синглетов $SO(3)$, - кварков и глюонов - условия инфракрасного заточения сохранились бы из-за точности подгруппы $SO(3)$ *.

Наконец, отметим, что на языке паракварков /1/ и параглюонов /3/ состояниям /34-38/ отвечают комбинации

$$\frac{1}{2}[Q,\bar{Q}]_-\,, \quad \frac{1}{2}[Q,Q]_-\,,$$
$$\frac{1}{4}[[Q,Q]_+,Q]_+\,, \quad \frac{1}{4}[[Q,Q]_+,\bar{Q}]_+\,, \qquad /39/$$
$$\frac{1}{2}[Q,G]_+\,,$$

где Q - паракварк, G - параглюон. /Сорта Q ,или их квантово-механические состояния, стоящие в коммутаторе, должны быть, естественно, различными/ Указанные комбинации,как целое,ведут себя подобно бозонам и фермионам. Поэтому утверждение авторов/7/ о том, что ограничение состояний синглетами $SU(3)_c$ эквивалентно парафермистатистике ранга три, но с тем условием, чтобы барионы были фермионами, а мезоны - бозонами, - некорректно, поскольку среди фермионов и бозонов /39/ имеются еще дикварки, анабарионы и глюкварки, являющиеся $SO(3)$-,но не $SU(3)$ -синглетами.

---

*Как стало известно автору после завершения данной работы, аналогичная возможность объяснения опытов по наблюдению дробных зарядов была предложена в работе/31/,однако вне связи $SO(3)$-симметрии с парастатистикой.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного рассмотрения следует два основных вывода:

1. Парастатистика выделяет $SO(3)$ из всех остальных калибровочных симметрий. Такая симметрия должна быть строгой.

2. Паракварки Гринберга [9] не эквивалентны цветным кваркам, обладающим $SU(3)$ цветовой симметрией.

Можно ожидать, что $SU(3)_c$ нарушается так, что ее подгруппа $SO(3)$ остается ненарушенной и лишь она может быть сформулирована в рамках стандартной теории парабозе- и параферми-полей третьего порядка. Однако для помещения самой $SU(3)_c$ в теорию параполей требуется принципиальное расширение этой теории [29,30], фактически заключающееся в переходе от ограниченного пространства Фока параполя в большое пространство анзатца Грина.

Автор выражает глубокую благодарность А.М.Балдину, С.Б.Герасимову, В.А.Матвееву, В.К.Митрюшкину, А.Н.Тавхелидзе, Д.В.Ширкову за неоднократные обсуждения и полезные замечания, относящиеся к затронутым здесь вопросам.

ДОПОЛНЕНИЕ: Теорема о связи параполей с вырожденной совокупностью обычных полей [17]

В этом дополнении мы опишем общую схему взаимодействующих параполей в формализме уайтмановских функций.

Пусть мы имеем множество различных полей

$\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$,

некоторые из которых могут быть обычными ферми- или бозе-полями, но среди них есть и параполя, удовлетворяющие одновременным трилинейным гриновским соотношениям [10]. Поля могут быть различной природы /скалярные, спинорные, векторные и т.п./, и, кроме того, для сокращения записи мы не будем различать поля и сопряженные им поля $\phi_i^+(x)$.

Основное предположение будет заключаться в возможности представления любого параполя гриновским анзатцем [10,16], так что уайтмановские функции /средние по вакууму от различных произведений полей/ можно представить в виде сумм уайтмановских функций от гриновских компонент этих полей

$$\langle \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) \rangle_0 = \sum_{\substack{A_1 = 1,\dots,p_1 \\ A_n = 1,\dots,p_n}} \langle \phi_1^{A_1}(x_1) \dots \phi_n^{A_n}(x_n) \rangle_0 , \qquad /Д.1/$$

где $p_1, \dots, p_n$ - порядки параполей. Как было уже отмечено, строгое доказательство /Д.1/ имеется лишь для случая свободных полей [10]. В общем случае /Д.1/ не доказано и является лишь правдоподобным предположением.

Все поля подразделяются на четыре типа согласно своим взаимным коммутационным соотношениям: бозонного, фермионного, парабозонного и парафермионного типов. Два последних типа относятся, естественно, к параполям одного порядка. Параполя разных порядков обладают взаимными коммутационными соотношениями обычного фермионного или бозонного типа /16/. Нормальный случай характеризуется тем, что все бозе-поля коммутируют со всеми полями, ферми-поля коммутируют со всеми бозеподобными /бозе- и парабозе-/ полями и антикоммутируют со всеми фермиподобными /ферми- и параферми-/ полями, парабозе-поля имеют парабозе-соотношения с парабозе- и параферми-полями данного порядка и коммутируют со всеми остальными полями, параферми-поля имеют параферми-соотношения с параферми-полями и парабозе-соотношения с парабозе-полями данного порядка коммутируют со всеми бозеподобными и антикоммутируют со всеми фермиподобными полями других порядков. Оказывается, что этот случай налагает минимальные ограничения на отличные от нуля функции Уайтмана, тогда как другие, аномальные случаи налагают на эти функции дополнительные ограничения.

Наконец,от уайтмановских функций /Д.1/ требуется выполнение обычных в аксиоматической формулировке условий лоренц-инвариантности и спектральности. Тогда имеют место кластерные свойства и можно воспользоваться теоремой Араки /23/: если произведения из операторов полей C_I и C_{II} таковы, что C_I и $L(\lambda a, 1)\, C_{II}\, L(\lambda a, 1)^{-1}$ антикоммутируют для лоренцева переноса вдоль пространственно-подобного вектора a при достаточно большом λ, то

$$\langle C_I \rangle_0 \langle C_{II} \rangle_0 = 0. \qquad /Д.2/$$

Ограничения, налагаемые этой теоремой на отличные от нуля уайтмановские функции от гриновских компонент,оказываются совершенно аналогичны требованиям, которым должен удовлетворять гамильтониан взаимодействия параполей вследствие условия локальности /16/.

В нормальном случае возникает всего два ограничения, необходимых и достаточных для того,чтобы уайтмановская функция от гриновских компонент была отлична от нуля: 1/ число фермионоподобных полей в ней должно быть четным /это свойство может быть получено также из лоренц-инвариантности/; 2/ числа компонент параполей данного порядка должны иметь одинаковую четность /т.е. быть либо все четными, либо все нечетными/. Для вывода первого условия нужно рассмотреть перестановку двух одинаковых произведений полей, но взятых в пространственно-удаленных областях. Наличие в них нечетного числа фермионоподобных полей приведет к их антикоммутированию и согласно /Д.2/ равенству нулю соответствующей им уайтмановской функции /т.к. она одинакова для них обоих/. Для вывода второго условия нужно рассмотреть такую же перестановку двух произведений полей, получающихся одно из другого заменой каких-либо двух гриновских компонент/скажем, $A \rightleftarrows B$/ в параполях одного порядка. Опять, если четности чисел этих компонент различны, то указанные произведения будут антикоммутировать и согласно /Д.2/ одна из двух соответствующих им функций Уайтмана будет обращаться в нуль. Но поскольку в теорию параполя все компоненты входят симметричным образом, то и другая функция Уайтмана должна обращаться в нуль /в противном случае она будет различать A- и B-компоненты/. В этом месте следует подчеркнуть, что наши выводы существенно зависят от исходного предположения /Д.1/. Например, для скалярного парабозе-поля $\phi(x)$ с компонентами $\phi^A(x)$ мы получаем $<\phi^A(x)>_0 = 0$ и, следовательно, $<\phi(x)>_0 = 0$, тогда как в самой теории параполя это равенство непосредственно не возникает. Для свободных полей эти условия, конечно, совпадают.

Теперь, используя второе правило, можно разделить все пространство векторов, получаемых действием на единственный вакуум всевозможными операторами

$$\phi_1^{A_1}(x_1) \dots \phi_n^{A_n}(x_n)\,|0>, \qquad /Д.3/$$

на два ортогональных подпространства, содержащих четное и нечетное число полей, относящихся к паре гриновских компонент A и B. Далее можно определить лоренц-инвариантный оператор $\hat{q}(A,B)$, принимающий значение +1 на первом и -1 на втором подпространствах. Очевидно, этот оператор антикоммутирует с компонентами $\phi_i^A(x)$ и $\phi_j^B(x)$, но коммутирует со всеми другими компонентами, поскольку их присутствие не изменяет четности полей A и B. Кроме того,

$$\hat{q}^2(A,B) = 1, \quad \hat{q}^+(A,B) = \hat{q}(A,B)\,. \qquad /Д.4/$$

Если теперь определить новые поля:

$$\Phi^A(x) = \hat{q}(A,B)\,\phi^A(x),\ \Phi^B(x) = \phi^B(x),\ \Phi^C(x) = \hat{q}(A,B)\,\phi^C(x) \qquad /Д.5/$$

и т.д., то для полей Φ^A и Φ^B взаимные перестановочные соотношения станут нормальными как между ними, так и между ними и остальными полями. Как мы видим, построенный оператор $\hat{q}(A,B)$ и преобразование Клейна /Д.5/ как раз обладают теми свойствами, какие мы предполагали для оператора K /см. /17/, /19/, /20/; A=2, B=3, C=1/. Дальше можно уже не заботиться о ставших обычными компонентах A и B и разбивать на пары оставшиеся поля. Так, для четвертого порядка

$$\Phi^A(x) = \hat{q}(A,B)\,\phi^A(x), \quad \Phi^B(x) = \phi^B(x),$$

$$\Phi^C(x) = \hat{q}(D,C)\,q(A,B)\,\phi^C(x), \quad \Phi^D(x) = \hat{q}(A,B)\,\phi^D(x)\,. \qquad /Д.6/$$

Таким же способом можно привести к обычным полям любую совокупность гриновских полей.

Однако вышеуказанное второе правило очень сильно ограничивает класс уайтмановских функций для параполей, а тем самым и возможные симметрии для получающихся из них обычных полей. Легко видеть, что мы будем иметь лишь две структуры для ненулевых уайтмановских функций:

$$\sum_{A=1}^{p} \langle \ldots \phi_i^A(x)\, \phi_j^A(y) \ldots \rangle_0 = \sum_{A=1}^{p} \langle \ldots \Phi_i^A(x)\, \Phi_j^A(y) \ldots \rangle_0, \qquad /Д.7/$$

$$\sum_{A_1 \neq \ldots \neq A_p = 1}^{p} \langle \ldots \phi_1^{A_1}(x_1) \ldots \phi_p^{A_p}(x_p) \ldots \rangle_0 =$$

$$= \sum_{A_1, \ldots, A_p = 1}^{p} \langle \ldots \epsilon_{A_1 \ldots A_p}\, \Phi^{A_1}(x_1) \ldots \Phi^{A_p}(x_p) \ldots \rangle_0, \qquad /Д.8/$$

где $\epsilon_{A_1 \ldots A_p}$ - полностью антисимметричный тензор $/\epsilon_{1 \ldots p} = 1/$ и указанные соотношения могут также иметь противоположный общий знак. Правые части /Д.7/ и /Д.8/ обладают, вообще говоря, лишь $SO(p)$ -симметрией, и только в том случае, если в /Д.7/ одна из функций является эрмитово-сопряженной, а в /Д.8/ все функции одинакового вида, то мы получим $SU(p)$ -симметрию. Как мы видели, для третьего порядка в выражение типа /Д.8/ входит как само спинорное поле $\psi(x)$, так и ему сопряженное $\bar{\psi}(x)$, и именно поэтому янг-милсовский лагранжиан обладает лишь $SO(3)$ - симметрией.

Таким образом, мы приходим к <u>теореме</u>: при выполнении условий /Д.1/, лоренц-инвариантности и спектральных условий любая теория параполей эквивалентна теории p-кратно вырожденных совокупностей обычных полей, подчиняющихся в общем случае $SO(p)$ -симметрии и при ограниченном выборе допустимых функций Уайтмана $SU(p)$ – симметрии /17/. Аналогичное заключение было получено впоследствии Онуки и Камефучи /20/, рассмотревших частный случай лишь одного параполя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н. ОИЯИ, Д -1968, Дубна, 1965; Tavkhelidze A. In: High Energy Physics and Elementary Particles, Trieste, 1965. Vienna, IAEA, 1965, p. 763.
2. Han M.-Y., Nambu Y. Phys.Rev., 1965, 139B, p. 1006.
3. Freund P.G.O. Phys.Lett., 1965, 15, p. 352.
4. Miyamoto Y. Prog.Theor.Phys.Suppl., 1965, Extra Number, p. 187.

5. Nambu Y. In: Preludes in Theor.Physics, Amsterdam, North-Holland, 1966, p. 133.
6. Nambu Y., Han M.-Y. Phys.Rev., 1974, D10, p. 674.
7. Fritzch H., Gell-Mann M., Leutwyler H. Phys.Lett., 1973, 47B, p. 365.
8. Weinberg S. Phys.Rev.Lett., 1973, 31, p. 494.
9. Greenberg O.W. Phys.Rev.Lett., 1964, 13, p. 598.
10. Green H.S. Phys.Rev., 1953, 90, p. 270.
11. Волков Д.В. ЖЭТФ, 1959, 36, с. 1560; ЖЭТФ, 1960, 38, с. 518.
12. Chernikov N.A. Acta Physica Polonica, 1962, 21, p. 51.
13. Kamefuchi S., Takahashi Y.A. Nucl.Phys., 1962, 36, p.177.
14. Scharfstein H. Nuovo Cim., 1963, 30, p. 740.
15. Аматуни А.Ц. ЖЭТФ, 1964, 47, с. 925.
16. Greenberg O.W., Messiah A.M.L. Phys.Rev., 1965, 138B, p. 1155.
17. Govorkov A.B. JINR, E2-3003, Dubna, 1966.
18. Greenberg O.W., Zwanziger D. Phys.Rev., 1966, 150, p.1177.
19. Drühl K., Haag R., Roberts J.E. Comm. Math.Phys., 1970, 18, p. 204.
20. Ohnuki Y., Kamefuchi S. Prog.Theor.Phys., 1973, 50, p.258.
21. Freund P.G.O. Phys.Rev., 1976, 13, p. 2322.
22. Greenberg O.W., Nelson C.A. Phys.Reports, 1977, 32C, p.69.
23. Araki H.J. J.Math.Phys., 1961, 2, p. 267.
24. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. "Наука", М., 1969, с. 368.
25. Klein O. Journal de Physique et le Radium, 1938, 9, p. 1.
26. Marciano W., Pagels H. Phys.Reports, 1978, 36C, p. 137.
27. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей, "Наука", М., 1978.
28. LaRue G.S., Fairbank W.M., Hebard A.F. Phys.Rev.Lett., 1981, 46, p. 967.
29. Говорков А.Б. ЖЭТФ, 1968, 54, с. 1785; Govorkov A.B. Int. J.Theor.Phys., 1973, 7, p. 49.
30. Bracken A.J., Green H.S. J.Math.Phys., 1973, 14, p. 1784.
31. Slansky R., Goldman T., Shaw G.L. Phys.Rev.Lett., 1981, 47, p. 887.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 ноября 1981 года.