сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-742

П.П.Физиев

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ФАЗОВЫХ ПУТЕЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА КЛАССИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ

1981

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Конечномерные аппроксимации /КА/ являются основным методом вычисления континуальных интегралов в конфигурационном пространстве M_q^n или в фазовом пространстве M_{pq}^{2n} механической системы с $n<\infty$ степенями свободы. Его суть - аппроксимация путей общего вида ломанными, состоящими из отрезков заданного типа/1-10/. Результат вычисления зависит от КА, что отражает неоднозначность задачи квантования/3-5/. Мы изучим свойства допустимых КА путей $(p(t),q(t)) \in M_{pq}^{2n}$ с точки зрения вычисления интеграла классического действия:

$$A = A_0 + A_{\mathcal{H}} = \int_{t'}^{t''} p\,dq - \int_{t'}^{t''} \mathcal{H}[\,p(t), q(t), t\,] \qquad /1/$$

/здесь опускаем индексы степеней свободы/.

КА вводят, рассматривая последовательности $\{\sigma_N\}$ разбиений интервала $[t',t'']$:

$$\sigma_N \;:\; t' = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t'', \quad N = 1,2,\ldots, \qquad /2/$$

которые будем называть измельчающими, если

$$\max_{i=1,\ldots,N} (\Delta t_i) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) = t'' - t'. \qquad /3/$$

Свойства таких $\{\sigma_N\}$ изучались подробно в/10/. Соответствующий предел /Римана/ обозначим как $R-\lim\limits_{N\to\infty}$. Введем левый $\rho^-(t)$ и правый $\rho^+(t)$ параметры регулярности $\{\sigma_N\}$ в точке $t \in [t',t'']$:

$$\rho^{\pm}(t) = \lim_{\substack{t_i \to t+0 \\ t_{i-1} \to t-0}} \rho_i^{\pm}(t), \qquad /4/$$

$$\rho_i^{+}(t) = (t_i - t)/(t_i - t_{i-1}), \quad \rho^{-}(t) = (t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}), \qquad /5/$$

где $t_i \to t+0$, $t_{i-1} \to t-0$ означает, что $R-\lim\limits_{N\to\infty} t_{i,i-1} = t$, причем $t_i \geq t$, $t_{i-1} \leq t$ - ближайшие к t точки из /2/. Очевидно, что

$\rho^{+}(t)+\rho^{-}(t)=1.$ /6/

Для заданного $(p(t),q(t))\in M^{2n}_{pq}$ рассмотрим выражения

$$A^{N}=A^{N}_{0}+A^{N}_{\mathcal{H}}=\int_{t'}^{t''}p_N\,dq_N-\int_{t'}^{t''}\mathcal{H}(p_N,q_N,t)dt=$$
$$=\Sigma_{i=1}^{N}\int_{t'}^{t''}[p^i\,dq^i-\mathcal{H}(p^i,q^i,t)dt],\qquad /7/$$

являющиеся обобщением сумм Дарбу-Римана-Стильтьеса-Лебега/11-16/.
Здесь функции

$p_N(t)=p(t)+y_N(t),\quad q_N(t)=q(t)'+x_N(t)$ /8а/

заданы на $[t',t'']$ через определенные в интервале $[t_{i-1},t_i]$ отрезки:

$p^i(t)=p(t)+y^i(t),\quad q^i(t)=q(t)+x^i(t),$ /8б/

где для $t\in(t_{i-1},t_i)$

$$\left.\begin{aligned}x^i(t)&=x[p(t),q(t),t;p_{i-1},q_{i-1},t_{i-1};p_i,q_i,t_i]\\ y^i(t)&=y[p(t),q(t),t;p_{i-1},q_{i-1},t_{i-1};p_i,q_i,t_i]\end{aligned}\right\},\qquad /9а/$$

$x^i(t_i)=x^{i+1}(t_i)=x_i;\quad y^i(t_i)=y^{i+1}(t_i)=y_i;$ /9б/

$q_i=q(t_i)$, $p_i=p(t_i)$, а x_i,y_i - произвольные значения.

Определение 1. $(p_N(t),q_N(t))$ задают КА, которая эквивалентна пути $(p(t),q(t))$, если для любой измельчающей $\{\sigma_N\}$ и для любого гамильтониана $\mathcal{H}(p,q,t)$

$$R-\lim_{N\to\infty}A^N=A.\qquad /10/$$

Определение 2. Функции $x_N(t),y_N(t)$ /или $x^i(t),y^i(t)$ / задают эквивалентные КА для путей в M^{2n}_{pq}, если $(p_N(t),q_N(t))$ задают эквивалентную КА для любого пути $(p(t),q(t))$.

Наша задача - определить классы допустимых $\mathcal{H}(p,q,t)$ и $(p(t),q(t))\in M^{2n}_{pq}$ и получить необходимые и достаточные условия, чтобы $x^i(t),y^i(t)$ удовлетворяли второму определению. Ее следует отличать от задачи стандартной теории аппроксимаций - для заданной подынтегральной функции, при конечном N, найти КА, оптимальную с точки зрения вычислительной точности/17,18/.

2. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ДОПУСТИМЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ И ПУТИ

Как M^n_q и M^{2n}_{pq}, так и пространства состояний M^{2n+1}_{pqt} будем считать дифференцируемыми многообразиями с присоединенными /если имеются/ бесконечными точками. $\mathcal{H}(p,q,t)$ есть локально однозначная функция на M^{2n+1}_{pqt}, которая может иметь следующие важные для нас особенности: 1/ точки, где $|\mathcal{H}|=\infty$, составляющие множество $\mathrm{Sing}(M^{2n+1}_{pqt})_\infty$; 2/ точки из сечения M^{2n+1}_{pqt} с гиперплоскостями $t=\mathrm{const}$ /которое обозначим как $M^{2n}_{pq}(t)$], где а/ $\mathcal{H}$ имеет конечные разрывы - $\mathrm{Sing}(M^{2n}_{pq}(t))_{cont}$; б/ $\mathcal{H}$ - недифференцируемая функция $(p,q)-\mathrm{Sing}(M^{2n}_{pq}(t))_{diff}$. Объединение этих множеств - $\mathrm{Sing}(M^{2n+1}_{pqt})$ будем считать многообразием, размерность которого меньше, чем $2n+1$, полагая,что все его компоненты размерности $2n+1$ заранее вырезаны и не входят в состав M^{2n+1}_{pqt}. Это многообразие состоит из связанных компонент S_α с $\dim S_\alpha < 2n+1$, которые будем считать отделимыми. Кроме того, предположим, что на сечении $\mathrm{Reg}(M^{2n+1}_{pqt}) = M^{2n+1}_{pqt} / \mathrm{Sing}(M^{2n+1}_{pqt})$ с гиперплоскостями $t=\mathrm{const}$ $\mathcal{H}$ - абсолютно непрерывная функция (p,q) /12-14/, что позволит восстанавливать ее однозначно по уравнениям Гамильтона с помощью интегрирования по Лебегу.

В рассмотрение нужно включить и канонически инвариантное обобщение "моментных сил". Необходимость рассматривать пути с плохими дифференциальными свойствами мешает пользоваться "моментными гамильтонианами" типа $h(p,q,t)\delta(t-\tau)$ и заставляет применять для этого добавки к $A_{\mathcal{H}}$ вида

$$A_h = -(L-S)\int_{t'}^{t''} h(p,q,t)\,d\mu(t), \qquad /11/$$

где $(L-S)\int$ - общий интеграл Лебега-Стильтьеса /Радона/ /12-15,19-21/, а $\mu(t)$ - мера, которая может быть представлена как $\mu=\mu_{ac}+\mu_d+\mu_s$. Существование гамильтониана для достаточно гладких путей заставляет положить сингулярную компоненту $\mu_s=0$. Абсолютно непрерывная компонента μ_{ac} описывает $\mathcal{H}=h\dot{\mu}_{ac}$ /для нее $(L-S)\int$ сводится к интегралу Лебега $(L)\int$ /12,13/ /. Точки, где сосредоточена дискретная мера μ_d, включим в $\mathrm{Sing}(M^{2n+1}_{pqt})_\infty$. Примем, что они вместе с особенностями $h(p,q,t)$ удовлетворяют требованиям к сингулярностям $\mathcal{H}(p,q,t)$. Для гладких путей при $\mu=\mu_d$ из /11/ получаем $\mathcal{H} = \sum_\alpha h_\alpha(p,q,t)\,\delta(t-\tau_\alpha)$.

При $\mu_d \neq 0$ (L–S)$\int$ не подходит для описания действия, так как не обладает свойством $\int_{t'}^{t''} = \int_{t'}^{t} + \int_{t}^{t''}$ для всех $t\in[t',t'']$, на котором основано уравнение Смолуховского-Колмогорова-Чепмена для квантовой амплитуды и принцип интерференции в квантовой механике[1]. Вместо него следует применять в /11/ модификацию Сакса[21]:

$$(L\text{–}S\text{–}S)\int_{t'}^{t''} h\,d\mu = (L\text{–}S)\int_{t'}^{t''} h\,d\mu - h(t'')\Delta^+\mu(t'') - h(t')\Delta^-\mu(t'),$$

где $\Delta^+\mu(t)=\mu(t+0)-\mu(t)$; $\Delta^-\mu(t)=\mu(t)-\mu(t-0)$. Мы не будем интересоваться поведением $\mu(t)$ вне $[t',t'']$, что позволит считать $\Delta^+\mu(t'')=0$ и $\Delta^-\mu(t')=0$. Тогда (L–S–S)$\int$ совпадает с (L–S)$\int$ на $[t',t'']$.

Интеграл $A_0=\int_{t'}^{t''} p\,dq$ будем понимать тоже в смысле Лебега-Стильтьеса-Сакса. Тогда на множество допустимых путей $(p(t),q(t))$ следует наложить требования:

а/ они должны быть измеримыми функциями t, что обеспечит существование $A\mathcal{H}$ для ограниченных $\mathcal{H}$[14];

б/ запретить путям проходить через $\mathrm{Sing}(M^{2n+1}_{pqt})_\infty$. Соответствующий несобственный интеграл для $A_\mathcal{H}$ нельзя аппроксимировать суммами Дарбу-Римана для произвольных путей[11]. Отделимость $S_\alpha \in \mathrm{Sing}(M^{2n+1}_{pqt})$ наряду с условием $\dim S_\alpha < 2n+1$ позволяет вырезать такие особенности[11]. Выполнения соотношения /10/ будем требовать до устремления объема вырезанных областей к нулю. Вырезание отражает топологическую структуру M^{2n+1}_{pqt} и не меняет смысла несобственных интегралов при их вычислении методом КА;

в/ ограничить время пребывания системы в $\mathrm{Sing}(M^{2n}_{pq}(t))_{cont}$: если T - множество моментов $t\in[t',t'']$, в которых $(p(t),q(t))\in \mathrm{Sing}(M^{2n}_{pq}(t))_{cont}$, будем считать допустимыми только пути, для которых мера $m(T)$

удовлетворяет следующему равенству:

$$m(T) = (L-S)\int_T d\mu = 0; \qquad /12/$$

г/ чтобы A_0 и $A_{\mathcal{H}}$ существовали одновременно, меры $dq(t)$ и dt должны иметь общие измеримые функции, то есть быть эквивалентными[20]. Следовательно, $q(t) \in AC_0$ – класс абсолютно непрерывных функций [12–14,20,21]. Тогда почти всюду /п.в./ на $[t',t'']$ существуют производные $\dot q(t) \in L^1$ [12–14] и $A_0 = (L)\int_{t'}^{t''} p\dot q\, dt$.

Требование $p\dot q \in L^1$ приводит к $p \in L^m, \dot q \in L^k$, где $\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = 1$ [14]. Если $\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$, переход к лагранжевой механике дает $p = \dot q$, откуда $m=k=2$, то есть $p, \dot q \in L^2$ [10]. Однако в гамильтоновой механике $p = \dot q$ есть уравнение движения, которое не дает такой информации о путях, по которым проводится суммирование в континуальном интеграле на M^{2n}_{pq}. Представляется естественным не накладывать новых ограничений на $q(t)$, и тогда $k=1$ приводит к $p(t) \in L^\infty$. Тем же условиям должны удовлетворять $p_N(t)$ и $q_N(t)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем свойства функций $x_N(t)$, $y_N(t)$ и $x^i(t)$, $y^i(t)$, удовлетворяющие определению 2. Доказательства излагаются в приложениях П1-П8.

Из вышеприведенных рассуждений и из /8а/ следует, что

$$x_N(t) \in AC_0, \quad y_N(t) \in L^\infty. \qquad /13/$$

В результате произвола $\mathcal{H}$ /10/ приводит к двум условиям:

$$R - \lim_{N\to\infty} A^N_{\mathcal{H}} = A_{\mathcal{H}}, \qquad /14/$$

$$R - \lim_{N\to\infty} A^N_0 = A_0. \qquad /15/$$

<u>Утверждение 1</u>. Чтобы выполнить /14/ для любых измельчающих $\{\sigma_N\}$ и любых $\mathcal{H}$ и $(p(t),q(t)) \in M^{2n}_{pq}$ из указанных в разделе 2, необходимо и достаточно /см. П.1/, чтобы для любого $t \in [t',t'']$

$$R - \lim_{N\to\infty} x_N(t) = 0, \qquad R - \lim_{N\to\infty} y_N(t) = 0. \qquad /16/$$

Утверждение 2. Чтобы выполнить /15/ для любых измельчающих $\{\sigma_N\}$ и любых $(p(t),q(t))\in M^{2n}_{pq}$ /с учетом /16//необходима и достаточна /см.П.2/ сходимость в смысле слабого предела /22,23/

$$R-\lim_{N\to\infty}\dot{x}_N(t)\overset{W}{=}0, \qquad /17/$$

что сводится к требованиям:

$$\{x_N(t)\}\in AC_0 \quad \text{равностепенно по } N^{/12/} \qquad /18/$$

и почти всюду на $[t',t'']$ существует $R-\lim\limits_{N\to\infty}\dot{x}_N(t)=\dot{x}_\infty(t)\in L^1$.

$$R-\lim_{N\to\infty}\dot{x}_N(t)\overset{\text{п.в.}}{=}0. \qquad /19/$$

Утверждение 3. Чтобы $x^i(t)$, $y^i(t)$ удовлетворяли определению 2, необходимо и достаточно, чтобы

(i) $x^i(t)\in AC_0$, $y^i(t)\in L^\infty$ - следствие /13/ /см. П.3/;

(ii) для любого $t\in[t',t'']$ из /16/ следовало, что

$$\lim_{\substack{t_i\to t+0\\ t_{i-1}\to t-0}} x^i(t)=0, \qquad \lim_{\substack{t_i\to t+0\\ t_{i-1}\to t-0}} y^i(t)=0;$$

(iii) $x^i(t_{i-1})=x^i(t_i)=0$ – следствие /13/ и /16/ /см. П.4/;

(iv) существовала функция $M(t)\in L^1$, такая, что

$$\lim_{\substack{t_i\to t+0\\ t_{i-1}\to t-0}}\left[\frac{1}{\Delta t_i}(L)\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\dot{x}^i(t)|\,dt\right]\overset{\text{п.в.}}{=}M(t) \quad \text{– следствие /18/ /см.П.5/;}$$

(v) $\lim\limits_{\substack{t_i\to t+0\\ t_{i-1}\to t-0}}\dot{x}(t)\overset{\text{п.в.}}{=}0$ – следствие /19/.

Легко убедиться в независимости этих условий /П.6/. Из них можно получить, что

1/ x^i являются абсолютно непрерывными функциями q и при фиксированных остальных аргументах функция /9а/ $x[.,q(t),...]$ ограничена. Для этого достаточно, чтобы $x[.,q,...]$ удовлетворяла условию Липшица /12/;

2/ x^i не могут зависеть от $p(t)$, так как это противоречило бы (i), что подтверждает выбор $p\in L^\infty$ типа функции Дирихле /12–14/

3/ предел (iv) существует почти всюду при всех $p \in L^{\infty}$, если $M(t)$ не зависит от $p(t+0) = \lim\limits_{t_i \to t+0} p_i$ и $p(t-0) = \lim\limits_{t_{i-1} \to t-0} p_{i-1}$. Это ограничивает вид зависимости x^i от p_i и p_{i-1};

4/ из $q_N(t)$, $q(t) \in AC_0$ видим /см. П.7/, что (iv) эквивалентно требованию существования $M'(t) \in L^1$, для которой

$$(iv)' \quad \lim_{\substack{t_i \to t+0 \\ t_{i-1} \to t-0}} \left[\frac{1}{\Delta t_i} (L) \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{q}^i(t)|\, dt\right] \overset{\text{п.в.}}{=} M'(t).$$

Полученные результаты инвариантны относительно точечных преобразований M^n_q, но нарушают общую каноническую инвариантность. Поскольку нет естественного действия группы канонических преобразований в квантовой механике /8/, то нет необходимости требовать и канонически инвариантного выполнения /10/ для КА в интеграле по путям; однако можно доказать /П.8/

Утверждение 4. Необходимые и достаточные условия, чтобы $x^i(t)$, $y^i(t)$ удовлетворяли определению 2 при канонически инвариантном выполнении /10/, есть:

(j) $x^i(t),\ y^i(t) \in AC_0$,

(jj) $\lim\limits_{\substack{t_i \to t+0 \\ t_{i-1} \to t-0}} x^i(t) = \lim\limits_{\substack{t_i \to t+0 \\ t_{i-1} \to t-0}} y^i(t) = 0$ для любого $t \in [t', t'']$.

(jjj) $x^i(t_{i-1}) = x^i(t_i) = y^i(t_{i-1}) = x^i(t_i) = 0$.

Рассмотрим некоторые примеры:

1. Конечномерная аппроксимация интеграла /1/ полигональными путями /1-10/ /которая приводит к квантованию Борна-Йордана /4/ /:

$$q^i(t) = q_i \rho_i^-(t) + q_{i-1} \rho_i^+(t), \qquad /20/$$

$$p^i(t) = p_i^*, \qquad /21/$$

где $p_i^* = p(t_i^*)$, $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. Если $q(t) \in AC_0$ и $p(t) \in C_0$, условия (i)–(v) удовлетворены. Если $p(t) \in L^{\infty}$ разрывна, следует отбросить связь $p_i^* = p(t_i^*)$ и считать $p_N(t)$ ступенчатой функцией со значениями p_i^*, которая при $N \to \infty$ стремится поточечно к $p(t)$.

2. Применяемые КА [3,4,6], при которых, как и в /21/, $p^i(t)=p_i^*$, а

$$q^i(t)=\begin{cases} q_{i-1}: & t_{i-1}\le t<\frac{1}{2}(t_i+t_{i-1}) \\ q_i: & \frac{1}{2}(t_i+t_{i-1})\le t\le t_i \end{cases}$$ /приводит к симметричному квантованию [4,6] /, /22/

$$q^i(t)=\begin{cases} q_{i-1}: & t_{i-1}\le t<t_i \\ q_i: & t=t_i \end{cases}$$ /приводит к $\hat{q}-\hat{p}$ квантованию [3,4]/, /23/

$$q^i(t)=\begin{cases} q_{i-1}: & t=t_{i-1} \\ q_i: & t_{i-1}<t\le t_i \end{cases}$$ /приводит к $\hat{p}-\hat{q}$ квантованию [3,4]/, /24/

$$q^i(t)=\begin{cases} q_{i-1}: & t=t_{i-1} \\ \frac{1}{2}(q_i+q_{i-1}): & t_{i-1}<t<t_i \\ q_i: & t=t_i \end{cases}$$ /приводит к вейлевскому квантованию [3-5] / /25/

не удовлетворяют (i) и (v). Напрашивается вывод: вместо /22/-/25/ искать другие КА, чтобы получить квантовые результаты, соблюдая (i)-(v).

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Для моментного гамильтониана с мерой $\mu_d(t)$, сосредоточенной в $\tau\in[t',t'']$, /14/ дает $R-\lim\limits_{N\to\infty} h[p_N(\tau), q_N(\tau), \tau]=h(p(\tau), q(\tau), \tau]$ для любой допустимой $h(p,q,t)$. Отсюда следует /16/. Для ограниченных $\mathcal{H}$ возможен предельный переход под интегралом $A^N_{\mathcal{H}}$ [12,14], и /16/ с учетом /12/ приводит к /14/. С помощью "вырезания особенностей" случай неограниченных $\mathcal{H}$ сводится к предыдущему.

2. С учетом $q(t)$, $q_N(t)$, $x_N(t)\in AC_0$ /15/ можно записать [12-14] как

$$(L)\int_{t'}^{t''} p\dot{x}_N dt+(L)\int_{t'}^{t''} y_N\dot{x}_N dt+(L)\int_{t'}^{t''} y_N dq \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \qquad /A/$$

А. $x_N(t)$ и $y_N(t)$ можно задавать независимо. В частности, если искать КА, эквивалентную $(p(t),q(t))$ при $y_N\equiv 0$, /А/ сводится к

$$(L)\int_{t'}^{t''} p\dot{x}_N dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \qquad /Б/$$

для любых $p \in L^{\infty}$ и $q \in AC_0$. x_N не зависит от $p(t)$, а только от p_i. Так как в /Б/ можно заменить $p(t)$ на эквивалентную $\bar{p}(t) \in L^{\infty}$ /12-14/, принимающую любые значения в t_i, мы можем считать x_N и p полностью независимыми. Тогда /Б/ приводит к /17/ /22,23/ и к /18/, /19/ /12/.

Б. Из $y_N \in L^{\infty}$ следует, что $0 \le \mathrm{vriasupp}\,|y_N| = C_N < \infty$ /14/, а из /16/ – что $C_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Тогда существует $0 \le C < \infty$, такая, что для всех N $C_N \le C$. Отсюда по теореме Лебега с учетом /16/

$$R - \lim_{N\to\infty} (L) \int_{t'}^{t''} y_N dq = (L)\int_{t'}^{t''} R - \lim_{N\to\infty} y_N dq = 0 . \qquad /В/$$

В. Как следствие /18/ получаем, что $R - \lim_{N\to\infty} V_{t'}^{t''}[x\ (t)] < \infty$, где $V_{t'}^{t''}[f(t)]$ – вариация $f(t)$ на $[t', t'']$ /12–14/. Действительно, пусть $\epsilon > 0$. Из /18/ следует /12/ существование $\delta_\epsilon > 0$, такое, что для любого $T \subset [t', t'']$ из $m(T) < \delta_\epsilon$ вытекает $V_T[x_N(t)] < \epsilon$. Пусть $K_\epsilon - 1$ равно целой части $(t''-t')/\delta_\epsilon$. Разделим $[t', t'']$ на K_ϵ равных частей длиной $\Delta t_i = (t''-t')/K_\epsilon < (t''-t')/(K_\epsilon - 1) \le \delta_\epsilon$. Тогда для любого N $V_{t_{i-1}}^{t_i}[x_N(t)] < \epsilon$, откуда $V_{t'}^{t''}[x\ (t)] = \Sigma_{i=1}^{K_\epsilon} V_{t_{i-1}}^{t_i}[x_N(t)] < \epsilon K_\epsilon < \infty$, что приводит к необходимому результату. Так как $C_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, с его помощью получаем из

$$0 \le |(L)\int_{t'}^{t''} y_N \dot{x}_N dt| \le (L)\int_{t'}^{t''} |y_N|\,|\dot{x}_N|\, dt \le C_N V_{t'}^{t''}[x_N(t)]$$

$$R - \lim_{N\to\infty} [(L)\int_{t'}^{t''} y_N \dot{x}_N dt] = 0 . \qquad /Г/$$

Ясно, что /Б/, /В/ и /Г/ приводят к выполнению /А/.

3. Пусть σ_N $(N < \infty)$ – разбиение $[t', t'']$, а $x_N(t)$ задана отрезками $x^i(t)$: $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Для того чтобы $x_N(t) \in AC_0$, необходимо и достаточно, чтобы: а/ $x^i(t) \in AC_0$; б/ $x^i(t_i) = x^{i+1}(t_i)$, $i = 1,2,\ldots,N$.

Необходимость этих условий вытекает из определения абсолютной непрерывности /12-14/. Для доказательства достаточности заметим, что из а следует существование почти всегда на $[t_{i-1}, t_i]$ $\dot{x}^i(t) \in L^1$, причем для $t \in [t_{i-1}, t_i]$ /12-14/

$$x^i(t) = (L) \int_{t_{i-1}}^{t} \dot{x}^i(\tau)\, d\tau + a_i \; .$$

Определим на $[t', t'']$ $\dot{\underline{x}}^i(t) \in L^1$ следующим образом: $\dot{\underline{x}}^i(t) = \dot{x}^i(t)$ для $t \in [t_{i-1}, t_i]$; $\dot{\underline{x}}^i(t) = 0$ для $t \in [t', t'']/[t_{i-1}, t_i]$. Тогда /12-14/ $\dot{\underline{x}}_N(t) = \Sigma_{i=1}^{N} \dot{\underline{x}}^i(t) \in L^1$, откуда $\underline{x}_N(t) = (L) \int_{t'}^{t} \dot{\underline{x}}_N(\tau)\, d\tau \in AC$. Пользуясь б, легко видеть, что $a_i = a_0 + \Sigma_{k=1}^{i-1} (L) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}^{k-1}\, dt$ и что $x_N(t) = \underline{x}_N(t) + \mathrm{const} \in AC_0$. Условие а приводит к (i).

4. Условие (iii) есть частный случай условия б из утверждения П.3. С учетом (ii) они эквивалентны. Действительно, в конечном счете $x^i(t)$ из /9а/ есть /составная/ функция t, t_{i-1} t_i: $x^i(t) = \chi(t, t_{i-1}, t_i)$. Тогда из $x^i(t_i) = x^{i+1}(t_i)$ следует, что при любых $t_{i-1} \le t \le t_i$ $\chi(t_i, t_{i-1}, t_i) = \chi(t_i, t_i, t_{i+1}) = \chi(t_i)$, то есть эти функции не зависят от t_{i-1} и t_{i+1} соответственно. Тогда согласно (ii) $\chi(t_i) = \chi(t_i, t_i, t_i + 0) = 0 = \chi(t_i, t_i - 0, t_i)$, откуда следует (iii).

5. А. Условие /18/ означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$, такое, что для любого $T \subset [t', t'']$ из $m(T) < \delta_\epsilon$ вытекает

$$V_T[x_N(t)] < \epsilon \qquad /Д/$$

для любого N.

Это эквивалентно требованию при тех же условиях на $\epsilon, \delta_\epsilon$ и T:

$$R - \lim_{N \to \infty} V_T[x_N(t)] < \epsilon . \qquad /Е/$$

Действительно, /Е/ следует из /Д/ очевидным образом. Однако, если выполнено условие /Е/ и $\epsilon > 0$, существуют N_0 и $\bar{\delta}_\epsilon > 0$, такие, что если $N > N_0$ и $m(T) < \bar{\delta}_\epsilon$ для $T \subset [t', t'']$, то $V_T[x_N(t)] < \epsilon$. Так как $x_1(t), \dots, x_{N_0}(t) \in AC_0$, существуют $\delta_\epsilon^a > 0$ $(a = 1, \dots, N_0)$, такие, что $m(T) < \delta_\epsilon^a$ приводит к $V_T[x\,(t)] < \epsilon$. Если $\delta_\epsilon = \min\{\delta_\epsilon^1, \dots, \delta_\epsilon^{N_0}, \bar{\delta}_\epsilon\}$, то для $T \subset [t', t'']$ $m(T) < \delta_\epsilon$ приведет к $V_T[x_N(t)] < \epsilon$ для всех N.

Б. Если $\dot{x}_N(t)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, $|\dot{x}_N(t)|$ обладают тем же свойством [12]. Тогда

$$R-\lim_{N\to\infty}(L)\int_{t'}^{t''}|\dot{x}_N(t)|dt=(L)\int_{t'}^{t''}|\dot{x}_\infty(t)|\,dt,$$

причем последний интеграл существует, так как согласно /18/ $\dot{x}_\infty(t)$ существует почти всегда; $|\dot{x}_\infty|\geq 0$; в П.2 мы показали, что

$$R-\lim_{N\to\infty}V_{t'}^{t''}[x_N(t)]=R-\lim_{N\to\infty}(L)\int_{t'}^{t''}|\dot{x}_N(t)|\,dt<\infty.$$

С другой стороны, $R-\lim\limits_{N\to\infty}V_{t'}^{t''}[x_N(t)]=R-\lim\limits_{N\to\infty}\Sigma_{i=1}^{N}V_{t_{i-1}}^{t_i}[x^i(t)]$, где $V_{t_{i-1}}^{t_i}[x^i(t)]=(L)\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\dot{x}^i|\,dt=V[t_{i-1},t_i]$ можно рассматривать как неаддитивную функцию интервала [23,24]. Мы показывали, что она интегрируема и имеет конечный интеграл [23,24]:

$$\int_{t'}^{t''}V[t',t'']=R-\lim_{N\to\infty}\Sigma_{i=1}^{N}V[t_{i-1},t_i].$$

В. $\int_{t_0}^{t}V[t_0,t]=R-\lim\limits_{N\to\infty}V_{t_0}^{t}[x_N(t)]$ [23].

Тогда из /Е/ вытекает, что для любого $\epsilon>0$ существует $\delta_\epsilon>0$, для которого $t-t_0<\delta_\epsilon$ приводит к $\int_{t_0}^{t}V[t_0,t]<\epsilon$. Повторяя дословно доказательство абсолютной непрерывности неопределенного интеграла Лебега [12-14], видим, что $\int_{t_0}^{t}V[t_0,t]\in AC_0$. Следовательно [12-14], существует $M(t)\in L^1$, такая, что

$$\int_{t'}^{t}V[t',t]=(L)\int_{t'}^{t}M(\tau)\,d\tau. \qquad /Ж/$$

С другой стороны, из интегрируемости функции интервала вытекает ее дифференцируемость почти всюду, причем имеет место (iv) [23,24].

И наоборот, пусть выполнено (iv). Оно приводит к /Ж/, так как оба интеграла в нем существуют одновременно [24]. Из /Ж/ видно, что $\int_{t'}^{t}V[t',t]\in AC_0$, что приводит к /Е/, а оно эквивалентно /Д/.

6. Независимость (i), (ii) и (iii) как между собой, так и от (iv) и (v) очевидна. Чтобы убедиться в полной независимости (i)-(v), рассмотрим два примера:

а/ $x^i(t)=(t_i-t_{i-1})^\alpha\,(t_i-t)^\beta(t-t_{i-1})^\gamma=(\Delta t_i)^{\alpha+\beta+\gamma}\,[\rho_i^+(t)]^\beta[\rho_i^-(t)]^\gamma.$

В данном случае из (i) следует $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$; из (ii) - $\alpha+\beta+\gamma>0$; из (iii) - $\beta>0$, $\gamma>0$; из (iv) - $\alpha+\beta+\gamma\geq 1$; из (v) - $\alpha+\beta+\gamma>1$. Видно, что (v) не следует из (iv);

б/ пусть $a_i = \Delta t_i^{\alpha}$, $r_i = \Delta t_i /(t''-t')$ и

$$x^i(t) = \begin{cases} a_i \{r_i^2 - [\rho_i^-(t) - r_i]^2\} & \text{для} \quad t_{i-1} \leq t \leq t_{i-1} + r_i \Delta t_i \,, \\ a_i r_i^2 & \text{для} \quad t_{i-1} + r_i \Delta t_i \leq t \leq t_i - r_i \Delta t_i \,, \\ a_i \{r_i^2 - [\rho_i^+(t) + r_i]^2\} & \text{для} \quad t_i - r_i \Delta t_i \leq t \leq t_i \,. \end{cases}$$

Тогда (i) , (iii) и (v) выполнены тождественно; из (ii) вытекает, что $\alpha>0$; из (iv) - $\alpha \geq -1$. Видно, что (iv) не следует из (v).

7. Для проверки (iv), когда $x^i(t)$ заданы в виде /бесконечной/ суммы функций, можно использовать следующее утверждение:

Пусть $\{x_N^\alpha(t)\}$: $\alpha = 1,\ldots,\infty$; $N=1,\ldots,\infty$ - множество функций на $[t',t'']$, которые являются равностепенно абсолютно непрерывными по двойному индексу (α,N) /12/, и пусть C_α для $\alpha=1,\ldots,\infty$ - числа, задающие абсолютно сходящийся ряд: $C = \Sigma_{\alpha=1}^{\infty}|C_\alpha|<\infty$. Тогда равностепенно абсолютно непрерывны и функции

$$x_N(t) = \Sigma_{\alpha=1}^{\infty} C_\alpha\, x_N^\alpha(t) \,.$$

В самом деле, пусть $\epsilon>0$, а $\epsilon' = \epsilon/C > 0$. Так как $\{x_N^\alpha(t)\}$ равностепенно абсолютно непрерывны, существует $\delta_{\epsilon'}>0$, такое, что для любого $T\subset[t',t'']$ из $m(T)<\delta_{\epsilon'}$ следует $V_T[x_N^\alpha(t)]<\epsilon'$ для всех (α,N). Пользуясь свойствами $V_T[f(t)]$ /12-14/, тогда получаем

$$V_T[x_N(t)] \leq \Sigma_{\alpha=1}^{\infty}|C_\alpha| V_T[x_N^\alpha(t)] < \Sigma_{\alpha=1}^{\infty}|C_\alpha|\,\epsilon' = \epsilon$$

для всех N, что доказывает утверждение.

Следствие: пусть $x_N(t) = q_N(t) - q(t)$ и $q_N(t), q(t) \in AC_0$. Тогда необходимым и достаточным условием равностепенной абсолютной непрерывности $\{x_N(t)\}$ является равностепенная абсолютная непрерывность $\{q_N\}$.

Применяя рассуждения из П.5 для $q_N(t)$, приходим к выводу, что (iv) эквивалентно (iv)', которое легче проверять в случае КА /21/-/25/.

8. Общие канонические преобразования порождаются функцией $W(p,q,t)$/25/, которая должна быть абсолютно непрерывной на M^{2n+1}_{pqt}. Из требования канонически инвариантного выполнения /10/ следует, что:

а/ как $q(t) \in AC_0$, так и $p(t) \in AC_0$, что уточняет /13/;

б/ утверждение 1 из раздела 3 не меняет своего вида, так как при каноническом преобразовании к А добавляется ΔW, для которой из $p(t), q(t), W(p,q,t) \in AC_0$, требуя $V_{t'}^{t''}[W(p(t),q(t),t)] < \infty$, получаем, что /12/

$$\Delta W = (L)\int_{t'}^{t''} dW = W[p(t''), q(t''), t''] - W[p(t'), q(t'), t'].$$

Отсюда видно, что /16/ приводит к $R-\lim_{N\to\infty}\Delta W^N = \Delta W$, что обеспечит канонически инвариантное выполнение /10/. Из а и из /16/ получаем (j), (jj) и (jjj), следуя схеме доказательств (i), (ii) и (iii);

в/ утверждение 2 из раздела 3 меняется полностью: для выполнения /15/ при любых $q(t), p(t) \in AC_0$ условия (j)-(jjj) оказываются достаточными. В самом деле, в/б/ из П.2 теперь можно интегрировать по частям /12-14/, а из /16/ следует существование константы $0 \le K < \infty$, такой, что $|x_N(t)| \le K$ для всех t, N. Отсюда по теореме Лебега /12-14/ и из /16/ вытекает

$$R-\lim_{N\to\infty}[(L)\int_{t'}^{t''} p\,dx_N] = R-\lim_{N\to\infty}(px_N|_{t'}^{t''}) - (L)\int_{t'}^{t''} R-\lim_{N\to\infty} x_N dp = 0.$$

Так как $AC_0 \subset L^1$, доказательства /В/ и /Г/ из П.2 не меняются для $p \in AC_0$, и в результате /А/ оказывается выполненным без новых условий для $x^i(t), y^i(t)$.

Автор глубоко благодарен Б.М.Барбашову за постоянное внимание к работе и многочисленные советы, Г.В.Ефимову, А.Д.Донкову, И.В.Полубаринову, В.К.Мельникову за полезные обсуждения, а также В.В.Нестеренко и П.Экснеру, которые обратили внимание на необходимость определения эквивалентности КА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. "Мир", М., 1968.
2. Feynman R. Phys.Rev., 1951, 84, p.108.
3. Березин Ф.А. ТМФ, 1971, 6, с.194; УФН, 1981, 132, с.497.
4. Алимов А.Л. ТМФ, 1972, 11, с.182.
5. Mizrahi M.M. J.Math.Phys., 1975, 16, p.2201.
6. Popov V.N. Preprint CERN, TH2424, Geneva, 1977.
7. Marinov M.S. Phys.Rep., 1980, 60, p.1.
8. Faddeev L.D. In: Methodes en Theories des Champs. (Eds. R.Balian and J.Zinn-Justin). North-Holland, Amsterdam, 1976.
9. Truman A. In: Feynman Path Integrals. Lect. Not.Phys., Springer, 1979, p.106.
10. Exner P., Kolerov G. JINR, E2-80-636, Dubna, 1980; JINR, E2-81-110, E2-81-111, E2-81-186, Dubna, 1981.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. "Наука", М., 1970, т.1; "Наука", М., 1970, т.2.
12. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. ГИТТЛ, М., 1957.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. "Наука", М., 1981.
14. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. "Наука", М., 1973.
15. Гохман Э.Х. Интеграл Стильтьеса и его приложения. ГИФМЛ, М., 1958.
16. Гливенко В.И. Интеграл Стильтьеса. ОНТИ, М., 1936.
17. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы высшей математики. "Высшая школа", Минск, 1972, т.1.
18. Никольский С.М. Квадратурные формулы. ГИФМЛ, М., 1958.
19. Камке Е. Интеграл Лебега-Стильтьеса. ГИФМЛ, М., 1959.
20. Бурбаки Н. Интегрирование. "Наука", М., 1977, т.VI.
21. Сакс С. Теория интеграла. ИЛ, М., 1949.
22. Иосида К. Функциональный анализ. "Мир", М., 1967.
23. Рисс Ф., Секефальви-Надь Е. Лекции по функциональному анализу. "Мир", М., 1979.
24. Burkill J.C. Proc.Lond.Math.Soc., 1924, 22, p.275.
25. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 ноября 1981 года.