объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-730

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-де ВРИЗА

Направлено на IX Международную конференцию
по нелинейным колебаниям /Киев, сентябрь 1981 г./

1981

В последние годы произошло существенное продвижение в изучении нелинейных систем с бесконечным числом степеней свободы. Прежде всего, стало ясно, что качественную сторону многих процессов, происходящих в этих системах, можно понять с помощью рассмотрения подходящим образом выбранных моделей с конечным числом степеней свободы. А с другой стороны, было обнаружено, что многие нелинейные системы с бесконечным числом степеней свободы могут быть детально исследованы с помощью точного решения соответствующих нелинейных уравнений.

Основные идеи излагаемого ниже подхода были заложены в пионерских работах/1,2/, посвященных исследованию используемого во многих областях уравнения Кортевега-де Вриза. За прошедшие десять с лишним лет со времени появления этих работ было найдено большое число уравнений, допускающих аналогичное рассмотрение. Сейчас эта область исследований превратилась в самостоятельное направление с существенными выходами во многие классические разделы математики, теоретической физики, гидродинамики, физики плазмы и твердого тела, биофизики и т.д.

Существует несколько точек зрения на природу этих уравнений и несколько подходов к изучению их свойств. Подход, который излагается ниже, базируется кроме упомянутых выше работ/1,2/ на замечательной работе/3/.

Выясним прежде всего, как получаются эти уравнения. С этой целью возьмем оператор X вида

$$X = \partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \partial^k - (\zeta \Lambda_0)^{k_0+1}, \quad k_0 \geq 0, \qquad /1/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x ; $u_k = u_k(x)$ - квадратные матрицы порядка r_0 ; Λ_0 - диагональная матрица с отличными от нуля диагональными элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_0} \in \mathbb{C}$, удовлетворяющими неравенству

$$\lambda_r^{k_0+1} \neq \lambda_{r'}^{k_0+1} \text{ при } r \neq r', \qquad /2/$$

а ζ- комплексный параметр.

Рассмотрим теперь уравнение

$$X\phi = 0 \qquad /3/$$

и выясним, каким должен быть оператор $A = \sum_k a_k \partial^k$, чтобы выражение $\psi = A\phi$ также удовлетворяло уравнению /3/. Нетрудно проверить, что для этого нужно, чтобы существовал оператор $\hat{A} = \sum_k \hat{a}_k \partial^k$, такой, что справедливо равенство

$$X \cdot A = \hat{A} \cdot X. \qquad /4/$$

Полагая $B = A - \hat{A}$, перепишем /4/ в следующем виде:

$$[A, X] = B \cdot X. \qquad /5/$$

Нетрудно видеть, что соотношение /5/ инвариантно относительно замены

$$A \to A + g \cdot X; \quad B \to B + [g, X]. \qquad /6/$$

Поэтому в дальнейшем мы сможем ограничиться рассмотрением случая, когда порядки операторов A и B не превосходят k_0. Делается это следующим образом. Пусть

$$W = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \dots & \phi_{k_0} \\ \phi_0' & \phi_1' & \dots & \phi_{k_0}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_0^{(k_0)} & \phi_1^{(k_0)} & \dots & \phi_{k_0}^{(k_0)} \end{vmatrix}$$

- матрица Вронского уравнения /3/. Положим

$$F = W C_0 W^{-1}, \quad \frac{\partial C_0}{\partial x} = 0. \qquad /7/$$

Пусть, далее, $F_{\mu,\nu}$ - матрица порядка r_0, образованная элементами матрицы F, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0 + 1, \dots, (\mu+1) r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0 + 1, \dots, (\nu+1) r_0$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots k_0$. Тогда согласно результатам работы[4] операторы

$$A = \sum_{k=0}^{k_0} F_{0,k}\, \partial^k,$$

$$\hat{A} = \sum_{k=0}^{k_0} \partial^{k_0 - k} \cdot F_{k,k_0} + \sum_{k=1}^{k_0} u_k \sum_{k'=0}^{k-1} \partial^{k-k'-1} \cdot F_{k',k_0} \qquad /8/$$

удовлетворяют соотношению /4/. Более того, любую пару операторов A, $\hat{A}$ порядка k_0, удовлетворяющих этому соотношению, можно представить в виде /8/ с помощью подходящим образом выбранной матрицы F вида /7/. Нетрудно убедиться, что матрица F вида /7/ в силу /1/ и /3/ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [U, F] = [\Gamma, F], \qquad /9/$$

где

$$U = \begin{vmatrix} & 0 & \\ u_0 & u_1 & \dots u_{k_0} \end{vmatrix}; \quad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & E_{k_0 r_0} \\ (\zeta\Lambda_0)^{k_0+1} & 0 \end{vmatrix}. \qquad /10/$$

Сделаем в /1/ замену:

$$u_k \to u_k + \epsilon v_k, \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \qquad /11/$$

где ϵ - малый параметр, и посмотрим, каким условиям должен удовлетворять оператор

$$\mathfrak{A} = \sum_k a_k \partial^k, \qquad /12/$$

чтобы при подстановке выражения

$$\psi = \phi - \epsilon\, \mathfrak{A}\, \phi \qquad /13/$$

в возмущенное уравнение /3/ оно с точностью до членов порядка ϵ^2 совпадало с невозмущенным уравнением. С учетом сказанного выше получаем, что для этого нужно, чтобы существовал оператор

$$\mathfrak{B} = \sum_k \beta_k \partial^k, \qquad /14/$$

такой, что справедливо равенство

$$Y + [\mathfrak{A}, X] = \mathfrak{B} \cdot X, \quad Y = \sum_{k=0}^{k_0} v_k \partial^k. \qquad /15/$$

В силу инвариантности соотношения /15/ относительно аналогичной /6/ замены:

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} + g \cdot X, \quad \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} + [g, X], \qquad /16/$$

общее решение этого соотношения может быть представлено с помощью равенств /8/, с той только разницей, что вместо матрицы F вида /7/ нужно взять матрицу $\mathfrak{F}$, определяемую следующим образом. Пусть

$$\mathfrak{F} = W C W^{-1}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = W^{-1} V W, \qquad /17/$$

где W- матрица Вронского уравнения /3/, а

$$V = \begin{vmatrix} & 0 & \\ v_0 & v_1 & \dots v_{k_0} \end{vmatrix}. \qquad /18/$$

Нетрудно проверить, что матрица $\mathfrak{F}$ вида /17/ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + [U, \mathfrak{F}] = [\Gamma, \mathfrak{F}] + V.$$

С помощью /17/ нетрудно убедиться, что при любом выборе матрицы V вида /18/ матрицу $\mathfrak{F}$ можно определить так, чтобы элементы матриц α_k и β_k, входящих соответственно в /12/ и /14/, были целыми функциями параметра $\eta = \zeta^{k_0+1}$ во всей комплексной плоскости.

Ситуация, однако, изменится коренным образом, если потребовать, чтобы элементы матриц α_k и β_k зависели от параметра η рациональным образом. Действительно, пусть

$$\mathfrak{A} = \sum_{m=0}^{n} A_m \eta^{n-m} + \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{\alpha_p^{(s)}}{(\eta-\eta_s)^{p_s-p+1}},$$

$$\mathfrak{B} = \sum_{m=0}^{n} B_m \eta^{n-m} + \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{\beta_p^{(s)}}{(\eta-\eta_s)^{p_s-p+1}},$$

где операторы A_m, B_m, $\alpha_p^{(s)}$ и $\beta_p^{(s)}$ не зависят от параметра η. Подставляя эти равенства в /15/, получаем, что операторы A_m и B_m при $m=0$ удовлетворяют условию

$$[A_0, \Lambda_0^{k_0+1}] = B_0 \cdot \Lambda_0^{k_0+1}, \qquad /19/$$

а при $m = 1, \ldots, n+1$ справедливо соотношение

$$[A_m, \Lambda_0^{k_0+1}] - B_m \cdot \Lambda_0^{k_0+1} = [A_{m-1}, X_0] - B_{m-1} \cdot X_0, \qquad /20/$$

где X_0 получается из X при $\eta = 0$. Далее, операторы $\alpha_p^{(s)}$ и $\beta_p^{(s)}$ при $p=0$ удовлетворяют уравнению

$$[\alpha_0^{(s)}, X_s] = \beta_0^{(s)} \cdot X_s, \qquad /21/$$

где X_s равно значению X при $\eta = \eta_s$, а при $p = 1, \ldots, p_s$ справедливо рекуррентное соотношение

$$[\alpha_p^{(s)}, X_s] - \beta_p^{(s)} \cdot X_s = [\alpha_{p-1}^{(s)}, \Lambda_0^{k_0+1}] - \beta_{p-1}^{(s)} \cdot \Lambda_0^{k_0+1}. \qquad /22/$$

И, наконец, для оператора Y должно выполняться условие

$$Y + [A_{n+1}, \Lambda_0^{k_0+1}] - B_{n-1} \cdot \Lambda_0^{k_0+1} = \qquad /23/$$

$$= \sum_{s=1}^{s_0} [\alpha_{p_s}^{(s)}, \Lambda_0^{k_0+1}] - \sum_{s=1}^{s_0} \beta_{p_s}^{(s)} \cdot \Lambda_0^{k_0+1}.$$

Чтобы удовлетворить равенствам /21/ и /22/, возьмем операторы A и $\hat{A}$, определенные согласно /7/ и /8/, и положим

$$A = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p^{(s)} (\eta-\eta_s)^p, \qquad \hat{A} = \sum_{p=0}^{\infty} \hat{\alpha}_p^{(s)} (\eta-\eta_s)^p.$$

Тогда с помощью /4/ нетрудно убедиться, что определенные так операторы $\alpha_p^{(s)}$ и $\beta_p^{(s)} = \alpha_p^{(s)} - \hat{\alpha}_p^{(s)}$ удовлетворяют равенствам /21/ и /22/. Произвол в определении этих операторов целиком устраняется путем задания матрицы $C_0 = C_0(\eta)$, входящей в определенные матрицы F вида /7/.

Как показано в работе /4/, уравнение /9/ имеет формальное решение вида

$$F \sim \sum_{m=-k_0}^{\infty} F_m \zeta^{-m},$$

причем в силу /2/ элементы матриц F_m являются полиномами от элементов матриц $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}$ и их производных по x. Кроме того, матрицы F_m при $-k_0 \le m \le 0$ удовлетворяют условию

$$[\Gamma_1, F_m] = 0, \qquad /24/$$

а при $m>0$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$[\Gamma_1, F_m] + [\Gamma_0, F_{m-k_0-1}] - [U, F_{m-k_0-1}] - \frac{\partial}{\partial x} F_{m-k_0-1} = 0, \qquad /25/$$

где Γ_0 равно значению при $\zeta=0$ определенной с помощью /10/ матрицы Γ, а $\Gamma_1 = (\Gamma - \Gamma_0)\zeta^{-(k_0+1)}$.

Пусть теперь $F_{m,\mu,\nu}$ - матрицы порядка r_0, образованные элементами матриц F_m, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0 + 1, \ldots, (\mu+1) r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0 + 1, \ldots, (\nu+1) r_0$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, k_0$. Положим

$$a_m = \sum_{k=0}^{k_0} F_{m,0,k} \, \partial^k, \qquad /26/$$

$$\hat{a}_m = \sum_{k=0}^{k_0} \partial^{k_0-k} \cdot F_{m,k,k_0} + \sum_{k=1}^{k_0} u_k \sum_{k'=0}^{k-1} \partial^{k-k'-1} \cdot F_{m,k',k_0}.$$

Заметим, что матрицы F_m могут быть выбраны так, что при $m+\mu-\nu<0$ справедливо равенство

$$F_{m,\mu,\nu} = 0, \qquad /27/$$

при $m+\mu-\nu = 0$ имеем

$$F_{m,\mu,\nu} = \frac{1}{k_0+1} \sum_{k=0}^{k_0} \Lambda_k^{\mu-\nu} C_k, \qquad /28/$$

где

$$C_k = \mathrm{diag}(c_{kr_0+1}, \ldots, c_{(k+1)r_0}), \quad \Lambda_k = \Lambda_0 \exp\left(i \frac{2\pi k}{k_0+1}\right),$$

а при $m+\mu-\nu>0$ элементы матриц $F_{m,\mu,\nu}$ являются квазиоднородными многочленами ранга $\rho=m+\mu-\nu$ от элементов матриц $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}$ и их производных по x*. Отсюда, в частности, следует, что если $m+\mu-\nu>0$, то $F_{m,\mu,\nu}\equiv 0$ при $u_0=u_1=\ldots=u_{k_0}\equiv 0$. С помощью /26/ и /27/ нетрудно убедиться, что при $-k_0\le m\le -1$ справедливо равенство

$$a_m=\hat{a}_m=0.$$

Далее, на основе /24/-/28/ получаем, что при $0\le m\le k_0$ справедливо равенство

$$\Lambda_0^{k_0+1}\cdot a_m=\hat{a}_m\cdot\Lambda_0^{k_0+1}, \qquad /29/$$

а при $m>k_0$ имеет место рекуррентное соотношение

$$\Lambda_0^{k_0+1}\cdot a_m-X_0\cdot a_{m-k_0-1}=\hat{a}_m\cdot\Lambda_0^{k_0+1}-\hat{a}_{m-k_0-1}\cdot X_0 . \qquad /30/$$

Элементы матриц F_m зависят линейно от диагональных элементов $c_1,\ldots,c_{(k_0+1)r_0}$ матриц C_0, $C_1,\ldots,C_{k_0}$, входящих в /28/, и обращаются в нуль при $c_1=\ldots=c_{(k_0+1)r_0}=0$. Возьмем теперь произвольный набор величин $c_{\mu,r}$ и положим

$$A_m=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}c_{\mu,r}\frac{\partial}{\partial c_r}a_{k+(k_0+1)(m-\mu)},$$
$$\hat{A}_m=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}c_{\mu,r}\frac{\partial}{\partial c_r}\hat{a}_{k+(k_0+1)(m-\mu)} . \qquad /31/$$

Как нетрудно проверить, определенные с помощью /31/ операторы A_m и $B_m=A_m-\hat{A}_m$ в силу /29/ и /30/ удовлетворяют /19/ и /20/. Далее, нетрудно убедиться[5], что любая совокупность операторов A_m и B_m, $m=0,1,\ldots,n+1$, удовлетворяющих /19/ и /20/, может быть получена указанным выше образом. Наконец, из равенства /28/ следует, что если $C_0=C_1=\ldots=C_{k_0}=cE$, где c - скалярная величина, то $F_{0,\mu,\mu}=cE$, $\mu=0,1,\ldots,k_0$, а $F_{m,\mu,\nu}=0$

* Полином Q от элементов матриц $u_0, u_1,\ldots,u_{k_0}$ и их производных по x называется квазиоднородным ранга $\rho>0$, если при подстановке в Q величины $\lambda^{k_0-k+s+1}$ вместо элементов матрицы $\frac{\partial^s u_k}{\partial x^s}$ каждый одночлен Q_α принимает вид $c_\alpha\lambda^\rho$, где c_α - отличная от нуля константа.

при $m+\mu-\nu=0$ и $\mu\ne\nu$. Отсюда легко следует, что определенные указанным выше способом матрицы F_m таковы, что $F_0=cE$, а $F_m=0$ при $m\ne 0$. Получаемый в этом случае согласно /26/ набор операторов a_m и $\hat{a}_m$ будет тривиальным, то есть $a_0=\hat{a}_0=cE$, а $a_m=\hat{a}_m=0$ при $m\ne 0$. Однако, если среди величин c_r, $r=1,\ldots,(k_0+1)r_0$, имеются различные, то получаемый таким образом набор операторов a_m и $\hat{a}_m$ будет нетривиальным, то есть любой из операторов a_m и $\hat{a}_m$ с помощью подходящего выбора матриц $u_0, u_1,\ldots,u_{k_0}$ может быть сделан отличным от нуля.

Предположим теперь, что матрицы u_k, входящие в определение оператора X вида /1/, зависят еще и от времени t, и положим в /11/

$$\epsilon=\Delta t, \quad v_k=\frac{\partial u_k}{\partial t}, \text{ то есть } Y=\frac{\partial X}{\partial t}. \qquad /32/$$

Тогда равенство /23/ превращается в нелинейное эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial X}{\partial t}+[A_{n+1},\Lambda_0^{k_0+1}]-B_{n+1}\cdot\Lambda_0^{k_0+1}=$$
$$=\sum_{s=1}^{s_0}[\alpha_{p_s}^{(s)},\Lambda_0^{k_0+1}]-\sum_{s=1}^{s_0}\beta_{p_s}^{(s)}\cdot\Lambda_0^{k_0+1}, \qquad /33/$$

а из условия /13/ следует, что $\psi=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathfrak{A}\phi$ удовлетворяет уравнению /3/, если этому уравнению удовлетворяет матрица ϕ,то есть оператор

$$T=\frac{\partial}{\partial t}+\mathfrak{A} \qquad /34/$$

переводит любое решение уравнения /3/ снова в решение этого же уравнения. С учетом /32/ равенство /15/ может быть записано в виде

$$\frac{\partial X}{\partial t}+[\mathfrak{A},X]=\mathfrak{B}\cdot X. \qquad /35/$$

Из этого соотношения следует, что матрицу Вронского W уравнения /3/ можно выбрать так, чтобы одновременно выполнялись равенства

$$X\phi_k=0, \quad T\phi_k=0, \quad k=0,1,\ldots,k_0 ,$$

то есть /35/ является условием совместности операторов X и T вида /1/ и /34/ соответственно.

Соотношение /35/ инвариантно относительно замены /16/. Отсюда, в частности, следует, что в силу /35/ операторы L и P вида

$$L=\Lambda_0^{-(k_0+1)}\cdot X_0,\quad P=\sum_{m=0}^{n} A_m\cdot L^{n-m}+\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{p=0}^{p_s}\alpha_p^{(s)}\cdot(L-\eta_s)^{p-p_s-1} \qquad /36/$$

удовлетворяют уравнению Гейзенберга:

$$\frac{\partial L}{\partial t}+[P,L]=0. \qquad /37/$$

Действительно, на основе равенств /35/ и /36/ имеем

$$\frac{\partial L}{\partial t}-(L-\eta)\cdot\mathfrak{A}=-\mathfrak{A}^*\cdot(L-\eta),$$

где

$$\mathfrak{A}^*=\Lambda_0^{-(k_0+1)}\cdot(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cdot\Lambda_0^{k_0+1}\quad.$$

Следовательно, полагая $\mathfrak{B}'=\mathfrak{A}-\mathfrak{A}^*$, получим, что

$$\frac{\partial L}{\partial t}+[\mathfrak{A},L]=\mathfrak{B}'\cdot(L-\eta).$$

Далее, с помощью равенства

$$\mathfrak{A}=P+g\cdot(L-\eta),$$

где

$$g=-\sum_{m=0}^{n-1}A_m\cdot\sum_{\mu=0}^{n-m-1}\eta^{\mu}L^{n-m-\mu-1}+$$

$$+\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{p=0}^{p_s}\alpha_p^{(s)}\cdot\sum_{q=0}^{p_s-p}(\eta-\eta_s)^{p+q-p_s-1}(L-\eta_s)^{-(q+1)},$$

получаем соотношение

$$\frac{\partial L}{\partial t}+[P,L]=Q\cdot(L-\eta), \qquad /38/$$

где $Q=\mathfrak{B}'-[g,L]$ и согласно сказанному выше оператор Q зависит рационально от параметра η. Поскольку левая часть равенства /38/ от η не зависит, то отсюда следует, что $Q=0$, то есть справедливо уравнение /37/.

С учетом равенства /34/ запишем уравнение /35/ в следующем виде:

$$[T,X]=\mathfrak{B}\cdot X. \qquad /39/$$

В силу сказанного выше равенство /39/ определяет нелинейную систему S. Предположим теперь, что у нас имеется еще оператор T' вида

$$T'=\frac{\partial}{\partial t'}+\mathfrak{A}', \qquad /40/$$

где

$$\mathfrak{A}'=\sum_{m=0}^{n'}A'_m\eta^{n'-m}+\sum_{s=1}^{s'_0}\sum_{p=0}^{p'_s}\frac{\alpha'_{p,s}}{(\eta-\eta'_s)^{p'_s-p+1}},$$

и оператор $\mathfrak{B}'$ вида

$$\mathfrak{B}'=\sum_{m=0}^{n'}B'_m\,\eta^{n'-m}+\sum_{s=1}^{s'_0}\sum_{p=0}^{p'_s}\frac{\beta'_{p,s}}{(\eta-\eta'_s)^{p'_s-p+1}},$$

с помощью которых мы определим систему S' посредством равенства

$$[T',X]=\mathfrak{B}'\cdot X. \qquad /41/$$

Выясним теперь, при каких условиях сдвиг по траекториям системы S' переводит произвольное решение системы S в решение этой же системы. Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема. Для того чтобы сдвиг по траекториям системы S' переводил любое решение системы S в решение этой же системы, необходимо и достаточно выполнение условий

$$[T,T']=\omega\cdot X+Q(\eta)E;\quad [\hat T,\hat T']=X\cdot\omega+Q(\eta)E, \qquad /42/$$

где операторы $\hat T$ и $\hat T'$ определены с помощью равенств

$$\hat T=T-\mathfrak{B},\quad \hat T'=T'-\mathfrak{B}', \qquad /43/$$

дифференциальный оператор ω имеет порядок k_0-1, если $k_0>0$, и $\omega=0$, если $k_0=0$, а рациональная функция $Q=Q(\eta)$ параметра η имеет не зависящие от x коэффициенты.

Чтобы убедиться в необходимости условий /42/, возьмем произвольные матрицы $u_k(x)$ и определим решение $u_k(x,t)$ системы S, обращающееся в $u_k(x)$ при $t=t_0$, $k=0,1,\ldots,k_0$. Далее, возьмем решение $u_k(x,t,t')$ системы S', обращающееся в $u_k(x,t)$ при $t'=t'_0$. На матрицах $u_k(x,t,t')$ равенство /41/ выполняется при любом t, достаточно близком к t_0. Следовательно, справедливо равенство

$$[T,[T',X]]=[T,\mathfrak{B}'\cdot X]. \qquad /44/$$

Предположим теперь, что сдвиг по траекториям системы S' переводит любое решение системы S в решение этой же системы. Это значит, что на матрицах $u_k(x,t,t')$ равенство /39/ выполняется при любых t', достаточно близких к t'_0. Следовательно, справедливо равенство

$$[T',[T,X]]=[T',\mathcal{B}\cdot X]. \qquad /45/$$

В силу равенства

$$[T,[T',X]]-[T',[T,X]]=[[T,T'],X] \qquad /46/$$

из /44/ и /45/ следует, что

$$[[T,T'],X]=[T,\mathcal{B}'\cdot X]-[T',\mathcal{B}\cdot X].$$

Отсюда согласно равенствам

$$\left.\begin{aligned}&[T,\mathcal{B}'\cdot X]=[T,\mathcal{B}']\cdot X+\mathcal{B}'\cdot[T,X],\\ &[T',\mathcal{B}\cdot X]=[T',\mathcal{B}]\cdot X+\mathcal{B}\cdot[T',X]\end{aligned}\right\} \qquad /47/$$

с учетом /39/ и /41/ получаем

$$[[T,T'],X]=([T,\mathcal{B}']-[T',\mathcal{B}]-[\mathcal{B},\mathcal{B}'])\cdot X. \qquad /48/$$

Наконец, в силу /43/ имеем

$$[T,\mathcal{B}']-[T',\mathcal{B}]-[\mathcal{B},\mathcal{B}']=[T,T']-[\hat{T},\hat{T}']. \qquad /49/$$

На основе этого равенства из /48/ следует, что

$$X\cdot[T,T']=[\hat{T},\hat{T}']\cdot X. \qquad /50/$$

Положим теперь

$$[T,T']=\omega\cdot X+\Delta,\quad [\hat{T},\hat{T}']=X\cdot\hat{\omega}+\hat{\Delta},$$

где операторы Δ и $\hat{\Delta}$ имеют порядок не выше k_0. Отсюда с помощью /50/ получаем, что

$$\omega=\hat{\omega},\quad X\cdot\Delta=\hat{\Delta}\cdot X. \qquad /51/$$

Из определения операторов Δ и $\hat{\Delta}$ следует, что существует полином $q=q(\eta)$, такой, что операторы $A=q\Delta$, $\hat{A}=q\hat{\Delta}$ зависят полиномиально от параметра η. Кроме того, согласно /51/ операторы A и $B=A-\hat{A}$ удовлетворяют соотношению /5/. Положим теперь

$$A=\sum_{m=0}^{m_0}A_m\eta^{m_0-m},\quad B=\sum_{m=0}^{m_0}B_m\eta^{m_0-m}.$$

На основе /5/ находим, что операторы A_0 и B_0 удовлетворяют /19/, при $m=1,\dots,m_0+1$ операторы A_m и B_m удовлетворяют /20/, и, наконец, справедливо равенство

$$[A_{m_0+1},\Lambda_0^{k_0+1}]=B_{m_0+1}\cdot\Lambda_0^{k_0+1}. \qquad /52/$$

Согласно сказанному выше найдутся постоянные $c_{\mu,r}$, такие, что справедливы равенства /31/. Следовательно, операторы

$$A_{m_0+1}=\sum_{m=0}^{m_0}\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}c_{m,r}\frac{\partial}{\partial c_r}a_{k+(k_0+1)(m_0-m+1)},$$

$$\hat{A}_{m_0+1}=\sum_{m=0}^{m_0}\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}c_{m,r}\frac{\partial}{\partial c_r}\hat{a}_{k+(k_0+1)(m_0-m+1)}$$

в силу /52/ удовлетворяют соотношению

$$\Lambda_0^{k_0+1}\cdot A_{m_0+1}=\hat{A}_{m_0+1}\cdot\Lambda_0^{k_0+1}. \qquad /53/$$

Если хотя бы при одном значении m среди величин $c_{m,r}$ найдутся разные, то равенство /53/ в таком случае превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Фазовое пространство этой системы конечномерно. Следовательно, при произвольном выборе матриц $u_k(x)$ удовлетворить равенство /53/ невозможно. Это значит, что при любом m все величины $c_{m,r}$ равны между собой, то есть при любом $r=1,\dots,(k_0+1)r_0$ справедливо равенство $c_{m,r}=p_m$. Таким образом, на основе /26/, /28/ и /31/ получаем, что

$$A_m=\hat{A}_m=p_mE.$$

Следовательно, имеем

$$A=\hat{A}=p(\eta)E,\ \text{где}\quad p=\sum_{m=0}^{m_0}p_m\eta^{m_0-m},$$

то есть

$$\Delta=\hat{\Delta}=Q(\eta)E,\ \text{где}\quad Q=p/q,$$

и необходимость условий /42/, таким образом, доказана.

При доказательстве достаточности условий /42/ мы ограничимся аналитическим случаем. Именно, предположим, что элементы матриц $u_k(x)$ - произвольные аналитические функции x. Пусть, далее, $u_k(x,t)$ - решение системы S, обращающееся в $u_k(x)$ при $t=t_0$. Пусть, наконец, $u_k(x,t,t')$ - решение системы S', обращающееся в $u_k(x,t)$ при $t'=t'_0$, $k=0,1,\dots,k_0$. На матрицах $u_k(x,t,t')$ равенство /41/ справедливо при всех t, достаточно близких к t_0. Следовательно, справедливо равенство /44/, откуда с учетом /47/ вытекает, что

$$[T,[T',X]]=[T,\mathcal{B}']\cdot X+\mathcal{B}'\cdot[T,X]. \qquad /54/$$

Положим теперь

$$F=[T,X]-\mathcal{B}\cdot X. \qquad /55/$$

Тогда в силу /47/ имеем

$$[T',F]=[T',[T,X]]-[T',\mathcal{B}]\cdot X - \mathcal{B}\cdot[T',X]. \qquad /56/$$

Согласно /55/ из /54/ следует, что

$$[T,[T',X]]=[T,\mathcal{B}']\cdot X+\mathcal{B}'\cdot\mathcal{B}\cdot X+\mathcal{B}'\cdot F,$$

а с помощью /41/ и /56/ получаем

$$[T',[T,X]]=[T',\mathcal{B}]\cdot X+\mathcal{B}\cdot\mathcal{B}'\cdot X+[T',F].$$

Из этих равенств на основе /46/ и /49/ вытекает, что

$$[[T,T'],X]=([T,T']-[\hat{T},\hat{T}'])\cdot X-[T',F]+\mathcal{B}'\cdot F,$$

то есть

$$[T',F]-\mathcal{B}'\cdot F=X\cdot[T,T']-[\hat{T},\hat{T}']\cdot X.$$

В силу условий /42/ отсюда следует

$$[T',F]=\mathcal{B}'\cdot F. \qquad /57/$$

Полагая

$$F=A+f\cdot X, \qquad /58/$$

где оператор A имеет порядок не выше k_0, с помощью /57/ получаем

$$[T',A]+[T',f]\cdot X=\mathcal{B}'\cdot A+[\mathcal{B}',f]\cdot X. \qquad /59/$$

Предположим теперь, что матрица Вронского W уравнения /3/ выбрана так, что одновременно выполняются равенства

$$X\phi_k=0, \quad T'\phi_k=0, \quad k=0,1,\dots,k_0 . \qquad /60/$$

Это возможно на основе уравнения /41/. С учетом /43/ и /60/ из /59/ следует, что

$$\hat{T}'A\phi_k=0, \quad k=0,1,\dots,k_0 . \qquad /61/$$

Пусть теперь

$$A=\sum_{k=0}^{k_0} a_k\partial^k, \quad a=(a_0,a_1,\dots,a_{k_0}), \qquad /62/$$

$$\psi_k=A\phi_k, \quad \psi=(\psi_0,\psi_1,\dots,\psi_{k_0}).$$

Тогда из определения матрицы Вронского следует

$$\psi=a\,W, \qquad /63/$$

а из равенств /61/ и /62/ получаем, что

$$\hat{T}'\psi_k=0, \quad k=0,1,\dots,k_0 . \qquad /64/$$

Согласно /55/ имеем $F=0$ при $t'=t'_0$. Значит, в силу /58/ следует

$$A=f=0 \quad \text{при} \quad t'=t'_0. \qquad /65/$$

Отсюда с учетом /62/ и /63/ получаем

$$\psi_k=0 \quad \text{при} \quad t'=t'_0. \qquad /66/$$

Следовательно, в силу теоремы Хольмгрена /см., напр.,[6], гл.4/ справедливо равенство $\psi_k=0$ при всех t', достаточно близких к t'_0. На основе равенств /62/ и /63/ отсюда следует, что $A=0$ при всех t', достаточно близких к t'_0. С учетом этого факта из /59/ вытекает, что

$$[\hat{T}',f]=0. \qquad /67/$$

Положим теперь

$$f=\sum_{k=0}^{k_0} f_k\partial^k, \quad f^*=\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\partial^k\cdot\tilde{f}_k, \qquad /68/$$

где знак "~" над матрицей f_k означает транспонирование. Из /67/ следует, что

$$[(\hat{T}')^*,f^*]=0, \qquad /69/$$

где оператор $(\hat{T}')^*$ определяется следующим образом. Пусть

$$\hat{T}'=\frac{\partial}{\partial t'}+\sum_{k=0}^{k_0}\tau_k\partial^k.$$

Тогда

$$(\hat{T}')^*=\frac{\partial}{\partial t'}-\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\partial^k\cdot\tilde{\tau}_k.$$

Далее, из уравнения /41/ следует, что

$$[(\hat{T}')^*,X^*]=(\mathcal{B}')^*\cdot X^*, \qquad /70/$$

где $(\mathcal{B}')^*$ получается из $\mathcal{B}'$ таким же образом, как f^* получается из f, а X^* имеет вид

$$X^*=(-1)^{k_0+1}\partial^{k_0+1}+\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\partial^k\cdot\tilde{u}_k-(\zeta\Lambda_0)^{k_0+1}.$$

Из /70/ следует, что матрицу Вронского W^* уравнения $X^*\psi=0$ можно выбрать так, что одновременно выполняются условия

$$X^*\psi_k = 0, \quad (\hat T')^*\psi_k = 0, \quad k=0,1,\dots,k_0 .$$

Следовательно, в силу /69/ справедливо равенство

$$(\hat T')^* f^* \psi_k = 0, \quad k=0,1,\dots,k_0 . \qquad /71/$$

Пусть теперь

$$f^* = \sum_{k=0}^{k_0} \hat f_k \partial^k , \quad \hat f = (\hat f_0, \hat f_1, \dots, \hat f_{k_0}), \qquad /72/$$

$$\theta_k = f^* \psi_k , \quad \theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k_0}).$$

Тогда справедливо равенство

$$\theta = \hat f W^* . \qquad /73/$$

Далее, согласно /71/ и /72/ имеем

$$(\hat T')^* \theta_k = 0, \quad k = 0,1,\dots,k_0 .$$

На основе /65/, /68/ и /72/ получаем

$$\hat f = 0 \quad \text{при} \quad t' = t_0' .$$

С учетом /73/ отсюда находим, что

$$\theta_k = 0 \quad \text{при} \quad t' = t_0' .$$

Следовательно, в силу упомянутой выше теоремы Хольмгрена вытекает, что $\theta_k = 0$ при всех t', достаточно близких к t_0'. Из этого равенства с помощью /68/, /72/ и /73/ получаем, что $f = 0$ при всех t', достаточно близких к t_0'. Таким образом, согласно /55/ и /58/ достаточность условий /42/ доказана.

Для того чтобы воспользоваться приведенной выше теоремой, необходимо вычислить коммутаторы $[T,T']$ и $[\hat T, \hat T']$. Непосредственные вычисления показывают, что для любой пары уравнений вида /39/ и /41/ найдется оператор ω, такой, что операторы

$$\Lambda = [T,T'] - \omega \cdot X, \quad \hat\Lambda = [\hat T, \hat T'] - X \cdot \omega$$

зависят рационально от параметра η и стремятся к нулю при $\eta \to \infty$. Отсюда, в частности, вытекает, что в том случае, когда операторы T, T' /значит, и операторы $\hat T$, $\hat T'$ / зависят полиномиально от параметра η, условия /42/ всегда выполняются и, следовательно, сдвиг по траекториям одного уравнения переводит решения другого в решения этого же уравнения. В общем случае условия /42/ определяют связь между матрицей C_0, входящей в равенство /7/, и аналогичной матрицей C_0', играющей сходную роль в определении операторов T' и $\hat T'$. Таким образом, при выполнении условий /42/ уравнение /41/ определяет однопараметрическую

группу симметрий уравнения /39/ и, наоборот, уравнение /39/ определяет однопараметрическую группу симметрий уравнения /41/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C.S. et al. Phys.Rev.Lett., 1967, vol.19, No.19, p.1095-1097.
2. Лакс П.Д. Математика, 1969, т.13, №5, с.128-159.
3. Ablowitz M.J. et al. Stud.Appl.Math., 1974, v.LIII, p.249-315.
4. Мельников В.К. Функциональный анализ, 1981, т.15, вып.1, с.43-60.
5. Мельников В.К. ОИЯИ, Р5-12060, Дубна, 1978.
6. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. "Мир", М., 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 ноября 1981 года.