сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-81-724

Дао Вонг Дык, Нгуен Тхи Хонг

СУПЕРГРУППА SU(m|n) И ЕЕ СУПЕРПОЛЕВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появились попытки рассмотреть модель объединения сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий в рамках калибровочной теории, основанной на супергруппе $SU(m|n)$ [1-7]. Такая формулировка имеет много привлекательных следствий - она позволяет естественным образом получить разумное голое значение угла Вайнберга, она также приводит к спектру частиц, в котором хиггсовские мезоны являются разными компонентами калибровочных полей вместе с обычными векторными мезонами.

Цель настоящей работы - изучить свойства представлений супергруппы $SU(m|n)$. В разделе 2 мы рассматриваем некоторые общие свойства градуированной алгебры $SU(m|n)$, особенно свойства обобщенных матриц Гелл-Манна, реализующих базисное матричное представление этой алгебры. Раздел 3 посвящается спинорным и тензорным представлениям. Здесь выводятся правила построения скалярного и векторного представлений из произведения двух представлений, найдены собственные значения оператора Казимира второго порядка для некоторых простых представлений. В разделе 4 мы рассматриваем суперполевые представления, реализующиеся в пространстве функций от антикоммутирующего mn -компонентного параметра.

2. ОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЦЫ ГЕЛЛ-МАННА. f- и d-ТЕНЗОРЫ

Градуированная алгебра $SU(m|n)$ состоит из генераторов T_A^B, $A,B = 1,2,\ldots,m+n$, удовлетворяющих следующим соотношениям коммутации [7]:

$$[T_A^B, T_C^D]_{-(AB,CD)} = \delta_A^D T_C^B - (AB,CD)\,\delta_C^B T_A^D , \qquad /2.1/$$

где использованы обозначения

$$(AB\ldots, CD\ldots) \equiv (-1)^{((A)+(B)+\ldots)((C)+(D)+\ldots)}$$

$$(A), (B), \ldots = \begin{cases} 0 \text{ для четных индексов } i = 1,2,\ldots,m \\ 1 \text{ для нечетных индексов } m+\alpha,\ \alpha = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad /2.2/$$

Так как
$$\sum_{A=1}^{m+n} T^A_A = 0, \qquad /2.3/$$
то число независимых операторов равно $(m+n)^2 - 1$.

Будет более удобным использовать вместо T^B_A операторы:

$$F_a \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} (\lambda^{(m)}_a)^j_i \, T^i_j ,$$

$$G_p \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (\lambda^{(n)}_p)^{\beta} \, T^{m+\alpha}_{m+\beta},$$

$$H \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} T^i_i = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} T^{m+\alpha}_{m+\alpha}, \qquad /2.4/$$

$$S^\alpha_i \equiv \frac{1}{2} T^{m+\alpha}_i ,$$

$$R^i_\alpha \equiv \frac{1}{2} T^i_{m+\alpha} .$$

Здесь $\lambda^{(m)}_a$ и $\lambda^{(n)}_p$ - обычные матрицы Гелл-Манна для групп $SU(m)$ и $SU(n)$, $a = 1,2,\ldots,m^2-1$; $p = 1,2,\ldots,n^2-1$. Теперь /2.1/ выглядит так:

$$[F_a, F_b] = if_{abc} F_c , \qquad a,b,c = 1,2,\ldots,m^2-1,$$

$$[G_p, G_q] = if_{pqr} G_r , \qquad p,q,r = 1,2,\ldots,n^2-1,$$

$$[F_a, G_p] = 0, \quad [H, F_a] = 0, \quad [H, G_p] = 0, \qquad /2.5/$$

$$[F_a, S^\alpha_i] = -\frac{1}{2} (\lambda^{(m)}_a)^j_i S^\alpha_j ,$$

$$[F_a, R^i_\alpha] = \frac{1}{2} R^k_\alpha (\lambda^{(m)}_a)^i_k ,$$

$$[G_p, S^\alpha_i] = \frac{1}{2} S^\beta_i (\lambda^{(n)}_p)^\alpha_\beta ,$$

$$[G_p, R^i_\alpha] = -\frac{1}{2} (\lambda^{(n)}_p)^\beta_\alpha R^i_\beta ,$$

$$[H, S^\alpha_i] = -\frac{1}{2} S^\alpha_i , \qquad [H, R^i_\alpha] = \frac{1}{2} R^i_\alpha ,$$

$$\{S_i^\alpha, S_j^\beta\} = 0, \qquad \{R_\alpha^i, R_\beta^j\} = 0,$$

$$\{S_i^\alpha, R_\beta^j\} = \frac{1}{4}\delta_\beta^\alpha(\lambda_a^{(m)})_i^j F_a + \frac{1}{4}\delta_i^j(\lambda_p^{(n)})_\beta^\alpha G_p -$$

$$- \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha \delta_i^j \frac{m-n}{mn} H,$$

где f_{abc} и f_{pqr} - структурные константы групп SU(m) и SU(n).

Легко найти $(m+n)^2-1$ матрицы $\frac{\beta_I}{2}$ ранга $m+n$, удовлетворяющие таким же коммутационным соотношениям, что и F_a, G_p, H, S_i^α, R_α^i и, следовательно, реализующие базисное представление алгебры.

Имеем:

$$\beta_{a(m)} \equiv M_a = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_a^{(m)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\beta_{p(n)} \equiv N_p = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_p^{(n)} \end{array}\right)$$

$$\beta_h \equiv \rho = \frac{1}{n-m} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} n & & \\ & \ddots & \\ & & n \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} m & & \\ & \ddots & \\ & & m \end{matrix} \end{array}\right) \qquad /2.6/$$

$$\beta_{\binom{\alpha}{i}} \equiv \zeta_i^\alpha, \qquad (\zeta_i^\alpha)_A^\beta = \delta_A^{m+\alpha}\delta_i^B,$$

$$\beta_{\binom{i}{\alpha}} \equiv \eta_\alpha^i, \qquad (\eta_\alpha^i)_A^B = \delta_A^i\, \delta_{m+\alpha}^B.$$

Будем называть β_I обобщенными матрицами Гелл-Манна.

Обозначим генератор, соответствующий матрице β_I, через $\mathcal{F}_I$, т.е.:

$$\mathcal{F}_{a(m)} \equiv F_a\,,\qquad \mathcal{F}_{p(n)} \equiv G_p\,,\qquad \mathcal{F}_h \equiv H\,,$$

$$\mathcal{F}_{\binom{\alpha}{i}} \equiv S^{\alpha}_{i}\,,\qquad \mathcal{F}_{\binom{i}{\alpha}} \equiv R^{i}_{\alpha}\,.$$

Тогда:

$$[\mathcal{F}_I\,, \mathcal{F}_J]_{-I,J} = i f_{IJK}\ \mathcal{F}_K\,,$$

$$[\frac{\beta_I}{2}, \frac{\beta_J}{2}]_{-(I,J)} = i f_{IJK}\ \frac{\beta_K}{2}\,, \qquad /2.7/$$

где (I, J) имеет такой же смысл, что и /2.2/ с $(I) = 0$ для $I = a^{(m)}, p^{(n)}, h$ и $(I) = 1$ для $I = \binom{\alpha}{i}, \binom{i}{\alpha}$, f_{IJK} - структурные константы, обладающие свойством симметрии

$$f_{IJK} = -(I, J)\, f_{JIK}\,. \qquad /2.8/$$

Их ненулевые значения есть

$$f_{a^{(m)} b^{(m)} c^{(m)}} = f_{abc}\,, \qquad f_{p^{(n)} q^{(n)} r^{(n)}} = f_{pqr}\,,$$

$$f_{a^{(m)}\binom{\alpha}{i}\binom{\alpha}{j}} = \frac{i}{2}(\lambda^{(m)}_{a})^{j}_{i}\,, \qquad f_{a^{(m)}\binom{i}{\alpha}\binom{j}{\alpha}} = -\frac{i}{2}(\lambda^{(m)}_{a})^{i}_{j}\,,$$

$$f_{p^{(n)}\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j}} = -\frac{i}{2}(\lambda^{(n)}_{p})^{\alpha}_{\beta}\,, \qquad f_{p^{(n)}\binom{i}{\alpha}\binom{i}{\beta}} = \frac{i}{2}(\lambda^{(n)}_{p})^{\beta}_{\alpha}\,, \qquad /2.9/$$

$$f_{\binom{\alpha}{i}\binom{j}{\alpha}a^{(m)}} = -\frac{i}{4}(\lambda^{(m)}_{a})^{j}_{i}\,, \qquad f_{\binom{\alpha}{i}\binom{i}{\beta}p^{(n)}} = -\frac{i}{4}(\lambda^{(n)}_{p})^{\alpha}_{\beta}\,.$$

$$f_{\binom{\alpha}{i}\binom{i}{\alpha}h} = \frac{i}{2}\,\frac{m-n}{mn}\,,$$

$$f_{\binom{\alpha}{i}h\binom{\alpha}{i}} = -\frac{i}{2}\,, \qquad f_{\binom{i}{\alpha}h\binom{i}{\alpha}} = \frac{i}{2}\,.$$

В терминах β_I и $\mathcal{F}_I$ уравнения /2.4/ могут быть переписаны в компактном виде:

$$\mathcal{F}_I = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\beta_I\ T \equiv \frac{1}{2}\sum_{A,B}(\beta_I)^{B}_{A}\,T^{A}_{B}\,. \qquad /2.10/$$

Отметим некоторые простые свойства обобщенных матриц Гелл-Манна:

а/ они являются градуированно-бесследными:

$$\mathrm{STr}\,\beta_I = \sum_A [A](\beta_I)_A^A = 0, \quad [A] \equiv (-1)^{(A)}, \qquad /2.11/$$

б/ они удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\mathrm{STr}\,\beta_I\beta_J = \eta(I)\,\delta_{I\tilde{J}}\,, \qquad /2.12а/$$

$$\mathrm{Tr}\,\beta_I\,\beta_J = \sigma(I)\,\delta_{I\tilde{J}}\,, \qquad /2.12б/$$

где $\tilde{J} \equiv J$ для четных индексов,

$$\binom{i}{\alpha} \equiv \binom{\alpha}{i}, \qquad \binom{\alpha}{i} \equiv \binom{i}{\alpha}.$$

$$\eta(a^{(m)}) = 2, \quad \eta(p^{(n)}) = -2, \quad \eta\binom{\alpha}{i} = -\eta\binom{i}{\alpha} = -1, \; \eta(h) = \frac{mn}{n-m},$$

$$\sigma(I) = \begin{cases} |\eta(I), & I \neq h \\ \dfrac{mn(m+n)}{(m-n)^2}, & I = h\,. \end{cases} \qquad /2.13/$$

Как следствие /2.12/ и /2.13/, мы имеем:

$$\eta(I) = [I]\,\eta(\tilde{I}) = \mathrm{STr}\,\beta_I\,\beta_{\tilde{I}} = [I]\,\mathrm{STr}\,\beta_{\tilde{I}}\beta_I\,,$$

$$\sigma(I) = \mathrm{Tr}\,\beta_I\,\beta_{\tilde{I}}\,. \qquad /2.14/$$

Из /2.6/ и /2.13/ видно, что

$$\beta_J^+ = \beta_{\tilde{J}}\,, \qquad /2.15/$$

в/ они удовлетворяют тождеству полноты:

$$\sum_I \frac{1}{\eta(I)}(\beta_{\tilde{I}})_A^B(\beta_I)_C^D = [B]\delta_A^D\delta_C^B + \frac{1}{n-m}\delta_A^B\delta_C^D\,, \qquad /2.16/$$

г/ они подчиняются правилу умножения:

$$\beta_I\beta_J = (if_{IJK} + d_{IJK})\beta_K + \frac{\eta(I)}{m-n}\delta_{I\tilde{J}}\,, \qquad /2.17/$$

где d_{IJK} - константы, появляющиеся в соотношениях коммутации

$$[\beta_I, \beta_J]_{+(I,J)} = 2d_{IJK}\,\beta_K + \frac{2\eta(I)}{m-n}\delta_{I\tilde{J}} . \qquad /2.18/$$

Их ненулевые значения есть

$$d_{a^{(m)}b^{(m)}c^{(m)}} = d_{abc}, \qquad d_{p^{(n)}q^{(n)}r^{(n)}} = d_{pqr},$$

$$d_{a^{(m)}\binom{\alpha}{i}\binom{\alpha}{j}} = \frac{1}{2}(\lambda^{(m)}_a)^j_i, \qquad d_{a^{(m)}\binom{i}{\alpha}\binom{j}{\alpha}} = \frac{1}{2}(\lambda^{(m)}_a)^i_j,$$

$$d_{a^{(m)}ha^{(m)}} = \frac{n}{n-m}, \qquad d_{p^{(n)}hp^{(n)}} = \frac{m}{n-m},$$

$$/2.19/$$

$$d_{\binom{\alpha}{i}h\binom{\alpha}{i}} = \frac{1}{2}\,\frac{n+m}{n-m}, \qquad d_{\binom{i}{\alpha}h\binom{i}{\alpha}} = \frac{1}{2}\,\frac{n+m}{n-m},$$

$$d_{hhh} = \frac{n+m}{n-m},$$

$$d_{p^{(n)}\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{i}} = \frac{1}{2}(\lambda^{(n)}_p)^{\alpha}_{\beta}, \qquad d_{p^{(n)}\binom{i}{\alpha}\binom{i}{\beta}} = \frac{1}{2}(\lambda^{(n)}_p)^{\beta}_{\alpha},$$

$$d_{\binom{\alpha}{i}\binom{j}{\alpha}a^{(m)}} = -\frac{1}{4}(\lambda^{(m)}_a)^j_i, \qquad d_{\binom{\alpha}{i}\binom{i}{\beta}p^{(n)}} = \frac{1}{4}(\lambda^{(n)}_p)^{\alpha}_{\beta},$$

$$d_{\binom{\alpha}{i}\binom{i}{\alpha}h} = -\frac{1}{2}\,\frac{m+n}{mn},$$

где d_{abc} и d_{pqr} – обычные d-тензоры для SU(m) и SU(n). При этом

$$d_{IJK} = (I,J)\,d_{JIK} . \qquad /2.20/$$

Полезно отметить здесь некоторые простые тождества для f_{IJK} и d_{IJK}:

$$f_{IJK} = -(I,J)\frac{\eta(J)}{\eta(K)}f_{I\tilde{K}\tilde{J}} = -(J,K)\frac{\eta(I)}{\eta(K)}f_{\tilde{K}J\tilde{I}}, \qquad /2.21/$$

$$d_{IJK} = (I,J)\frac{\eta(J)}{\eta(K)}d_{I\tilde{K}\tilde{J}} = (J,K)\frac{\eta(I)}{\eta(K)}d_{\tilde{K}J\tilde{I}}, \qquad /2.22/$$

$$(I,K)\, f_{ILM} f_{JKL} + (J,I)\, f_{JLM} f_{KIL} + (K,J)\, f_{KLM} f_{IJL} = 0, \qquad /2.23/$$

$$(I,K)\, f_{ILM}\, d_{JKL} + (J,I)\, f_{JLM}\, d_{KIL} + (K,J)\, f_{KLM}\, d_{IJL} = 0. \qquad /2.24/$$

Тождества /2.21/ и /2.22/ можно проверить прямо из явных выражений /2.9/ и /2.19/ для f и d, тождества /2.23/ и /2.24/есть следствия тождества для любых трех градуированных операторов M_A, M_B, M_C :

$$(A,C)\,[M_A, [M_B, M_C]_{\pm(B,C)}]_{-(A,BC)} + (B,A)\,[M_B, [M_C, M_A]_{\pm(C,A)}]_{-(B,CA)} +$$
$$/2.25/$$
$$+ (C,B)\,[M_C, [M_A, M_B]_{\pm(A,B)}]_{-(C,BA)} = 0$$

при применении к матрицам β_I, β_J, β_K.

3. СПИНОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Спинорное представление группы $SU(m|n)$ состоит из $m+n$ операторов ψ_A, преобразующихся по правилу

$$[\mathcal{F}_I, \psi_A]_{-(I,A)} = -\frac{1}{2}(I,A)\,(\beta_I\, \psi)_A. \qquad /3.1/$$

Сопряженное к нему представление $\bar{\psi}^A$ определяется по формуле:

$$[\mathcal{F}_I, \bar{\psi}^A]_{-(I,A)} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\beta_I)^A. \qquad /3.2/$$

Формулы /3.1/ и /3.2/ могут быть легко обобщены для спиноров произвольного ранга $\psi_{A_1\ldots A_r}$, $\bar{\psi}^{A_1\ldots A_r}$ и смешанных спиноров $\Phi^{B_1\ldots B_s}_{A_1\ldots A_r}$. Имеем:

$$/3.3/$$
$$[\mathcal{F}_I, \psi_{A_1\ldots A_r}]_{-(I,A_1\ldots A_r)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}(I, A_1\ldots A_k)\,(\beta_I)_{A_k}^{\ B}\,\psi_{A_1\ldots B\ldots A_r}.$$

$$[\mathcal{F}_I, \bar{\psi}^{A_1\ldots A_r}]_{-(I,A_1\ldots A_r)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}(I, A_1\ldots A_{k-1})\,(\beta_I)_B^{\ A_k}\,\bar{\psi}^{A_1\ldots B\ldots A_r}$$
$$/3.4/$$

$$[\mathcal{F}_I, \Phi^{B_1\ldots B_s}_{A_1\ldots A_r}]_{-(I,A_1\ldots A_r B_1\ldots B_s)} =$$
$$/3.5/$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}(I, B_1\ldots B_{k-1})\,(\beta_I)_C^{\ B_k}\,\Phi^{B_1\ldots C\ldots B_s}_{A_1\ldots A_r} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}(I, A_1\ldots A_k B_1\ldots B_s)\,(\beta_I)_{A_k}^{\ C}\,\Phi^{B_1\ldots B_s}_{A_1\ldots C\ldots A_r}.$$

"Векторное" представление состоит из $(m+n)^2-1$ операторов ϕ_I, преобразующихся по такому же правилу, что и $\mathcal{F}_I$, а именно:

$$[\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_J]_{-(I,J)} = i f_{IJK}\,\phi_K. \qquad /3.6/$$

В некоторых случаях оказывается более удобным использовать вместо ϕ_I бесследный смешанный спинор ϕ_A^B, определяемый как:

$$\phi_A^{\ B} = \sum_I \frac{\sqrt{2}}{\eta(\tilde{I})}\,[A](\beta_{\tilde{I}})_A^{\ B}\,\phi_I = \sum_I \frac{\sqrt{2}}{\eta(I)}[B](\beta_{\tilde{I}})_A^{\ B}\,\phi_I. \qquad /3.7/$$

Обратная к /3.7/ формула есть:

$$\phi_I = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Tr}\,\beta_I\,\phi. \qquad /3.8/$$

Обобщение формулы /3.6/ на тензор любого ранга есть

$$[\mathcal{F}_I, \phi_{J_1 J_2 \ldots J_p}]_{-(I,J_1 J_2\ldots J_p)} = i\sum_{\ell=1}^{p}(I,J_1\ldots J_{\ell-1})\,f_{IJ_\ell K}\,\phi_{J_1\ldots K\ldots J_p}. \qquad /3.9/$$

Из /3.1/-/3.4/ следует, что если ψ_A и χ_A - спиноры, то

$$\omega = \bar{\psi}^A\chi_A \qquad /3.10а/$$

инвариант, и

$$\phi_I = \bar{\psi}^A(\beta_I)_A^{\ B}\chi_B \qquad /3.11а/$$

- вектор, преобразующийся по формуле /3.6/. Аналогично, если ψ_{AB} и χ_{AB} - спиноры второго ранга, то

$$\bar{\psi}^{AB}\chi_{BA}, \qquad (A,B)\,\bar{\psi}^{AB}\chi_{AB} \qquad /3.10б/$$

- инвариант, и

$$\bar{\psi}^{AB}(\beta_I)_A^{\ C}\chi_{BC}, \qquad (A,B)\,\bar{\psi}^{BA}(\beta_I)_A^{\ C}\chi_{BC},$$

$$(B,C)\,\bar{\psi}^{AB}(\beta_I)_A^{\ C}\chi_{CB}, \qquad (AC,B)\,\bar{\psi}^{BA}(\beta_I)_A^{\ C}\chi_{CB} \qquad /3.11б/$$

- вектор.

Эти правила можно легко обобщить для спиноров более высокого ранга.

Из /3.6/, с помощью тождеств /2.21/-/2.24/, можно доказать, что если ϕ_I и Φ_I - векторы, то

$$\rho = \sum_I \frac{2}{\eta(I)}\Phi_{\tilde{I}}\phi_I \qquad /3.12/$$

- инвариант, и

$$\psi_K^{(F)} \equiv \sum_{I,J} (I,J) \frac{2\eta(\tilde{K})}{\eta(I)\eta(J)} f_{IJ\tilde{K}} \Phi_{\tilde{I}} \phi_{\tilde{J}} , \qquad /3.13/$$

$$\psi_K^{(D)} \equiv \sum_{I,J} (I,J) \frac{2\eta(\tilde{K})}{\eta(I)\eta(J)} d_{IJ\tilde{K}} \Phi_{\tilde{I}} \phi_{\tilde{J}} \qquad /3.14/$$

- векторы.

Выражение /3.12/ может быть переписано через матрицы Φ_A^B и ϕ_A^B, определяемые уравнением /3.7/, следующим образом:

$$\rho \equiv \sum_I \frac{2}{\eta(I)} \Phi_{\tilde{I}} \phi_I = \mathrm{STr}\,\Phi\phi = \mathrm{STr}\,\phi\Phi . \qquad /3.15/$$

Аналогично, с помощью /2.7/, /2.16/, /2.18/, /2.21/ и /2.22/ выражения /3.13/ и /3.14/ могут быть переписаны так:

$$\psi_K^{(F)} = \frac{i}{2} \mathrm{STr}(\Phi\beta_K\phi - \phi\beta_K\Phi), \qquad /3.16/$$

$$\psi_K^{(D)} = \frac{1}{2} \mathrm{STr}(\Phi\beta_K\phi + \phi\beta_K\Phi). \qquad /3.17/$$

Согласно /3.12/, оператор Казимира второго порядка имеет вид:

$$C \equiv \sum_I \frac{2}{\eta(I)} \mathcal{F}_{\tilde{I}} \mathcal{F}_I =$$

$$= \sum_{a=1}^{m} F_a^2 - \sum_{p=1}^{n} C_p^2 + 2S_i^{\alpha} R_{\alpha}^{i} - 2R_{\alpha}^{i} S_i^{\alpha} - \frac{2(m-n)}{mn} H^2 . \qquad /3.18/$$

Из законов преобразования /3.1/-/3.6/, с учетом свойств матриц β_I /2.11/-/2.19/, мы можем найти собственные значения C для каждого неприводимого представления. Так, имеем

$$C = \frac{(m-n)^2 - 1}{2(m-n)}$$

для спинорного представления ψ_A ,

$$C = m - n$$

для векторного представления Φ_I,

$$C = \frac{r(r+m-n)(m-n-1)}{2(m-n)},$$

для полностью градуированно-симметричных спиноров ранга r

$$\psi^{(+)}_{C_1 C_2 \ldots C_r} = (C_1, C_2)\,\psi^{(+)}_{C_2 C_1 \ldots C_r} = \ldots$$

и т.д.

4. СУПЕРПОЛЕВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Рассмотрим пространство функций от антикоммутирующего mn - компонентного параметра θ^i_α, $\alpha = 1,2,\ldots,m$; $i = 1,2,\ldots,n$. В этом пространстве генераторы алгебры $SU(m|n)$ могут быть реализованы следующим образом:

$$\begin{aligned}
F_a &= \frac{1}{2}(\lambda^{(m)}_a)^j_i\, \theta^i_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^j_\alpha}, \\
G_p &= -\frac{1}{2}(\lambda^{(n)}_p)^\beta_\alpha\, \theta^i_\beta \frac{\partial}{\partial\theta^i_\alpha}, \\
H &= \frac{1}{2}\theta^i_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^i_\alpha}, \\
S^\alpha_i &= -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^i_\alpha}, \\
R^i_\alpha &= -\frac{i}{2}\theta^i_\beta \theta^j_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^j_\beta}.
\end{aligned} \qquad /4.1/$$

Из /4.1/ отметим, что точка $\theta = 0$ остается неизменной при F_a, G_p, H и R^i_α преобразованиях. Следовательно, эти преобразования образуют малую группу в группе $SU(m|n)$. По любому заданному представлению этой малой группы мы можем определить полное действие генераторов группы $SU(m|n)$ на полевые операторы. Это проводится по методу теории индуцированных представлений следующим образом /8-10/.

Пусть

$$\begin{aligned}
[F_a, \Phi_{\mathfrak{a}}(0)]_- &= -(f^{(\Phi)}_a \Phi(0))_{\mathfrak{a}}, \\
[G_p, \Phi_{\mathfrak{a}}(0)]_- &= -(g^{(\Phi)}_p \Phi(0))_{\mathfrak{a}}, \\
[H, \Phi_{\mathfrak{a}}(0)]_- &= -(h^{(\Phi)} \Phi(0))_{\mathfrak{a}}, \\
[R^i_\alpha, \Phi_{\mathfrak{a}}(0)]_{-[\mathfrak{a}]} &= -(r^{(\Phi)i}_\alpha \Phi(0))_{\mathfrak{a}},
\end{aligned} \qquad /4.2/$$

где f_a, g_p, h, r^i_α - некоторые матрицы, удовлетворяющие аналогичным коммутационным соотношениям, что и генераторы F_a, G_p, H, R^i_α. Нам нужно найти правило коммутации $[\mathcal{F}_I, \Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)]_{-(I,\mathfrak{A})}$. Выберем бызис в пространстве индексов $\mathfrak{A}$ так, чтобы операторы не действовали на индексы, т.е.

$$[S^\alpha_i, \Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)]_{-[\mathfrak{A}]} = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^i_\alpha}\Phi_{\mathfrak{A}}(\theta), \qquad /4.3/$$

и, следовательно,

$$\Phi_{\mathfrak{A}}(\theta^k_\gamma + \frac{1}{2}\eta^k_\gamma) = e^{-i\eta^i_\alpha S^\alpha_i}\,\Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)\,e^{i\eta^i_\alpha S^\alpha_i} \quad . \qquad /4.4/$$

При помощи /4.4/ мы можем написать:

$$[\mathcal{F}_I, \Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)]_{-(I,\mathfrak{A})} = e^{-2i\theta^i_\alpha S^\alpha_i}\,[\mathcal{F}'_I, \Phi_{\mathfrak{A}}(0)]_{-(I,\mathfrak{A})}\,e^{2i\theta^i_\alpha S^\alpha_i}, \qquad /4.5/$$

где

$$\mathcal{F}'_I \equiv e^{2i\theta^i_\alpha S^\alpha_i}\,\mathcal{F}_I\,e^{-2i\theta^i_\alpha S^\alpha_i} \quad . \qquad /4.6/$$

Используя коммутационные соотношения /2.5/, находим:

$$\begin{aligned}
F'_a &\equiv F_a + i\theta^i_\alpha(\lambda^{(m)}_a)^j_i S^\alpha_j, \\
G'_p &= G_p + iS^\alpha_i(\lambda^{(n)}_p)^\beta_\alpha\theta^i_\beta, \\
H' &= H + i\theta^i_\alpha S^\alpha_i, \\
R^{i\prime}_\alpha &= R^i_\alpha + \frac{1}{2}[\theta^j_\alpha(\lambda^{(m)}_a)^i_j F_a + \theta^i_\beta(\lambda^{(n)}_p)^\beta_\alpha G_p - 2\theta^i_\alpha\frac{m-n}{mn}H] - \\
&\quad - \theta^j_\alpha\theta^i_\beta S^\beta_j.
\end{aligned} \qquad /4.7/$$

Подставляя /4.7/ в /4.5/ и принимая во внимание /4.2/, получаем:

$$\begin{aligned}
[F_a, \Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)]_- &= -i\{(f^{(\Phi)}_a\Phi(\theta))_{\mathfrak{A}} + \frac{1}{2}(\lambda^{(m)}_a)^j_i\theta^i_\alpha\frac{\partial\Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)}{\partial\theta^j_\alpha}\}, \\
[G_p, \Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)] &= -i\{(g^{(\Phi)}_n\Phi(\theta))_{\mathfrak{A}} - \frac{1}{2}(\lambda^{(n)}_p)^\beta_\alpha\theta^i_\beta\frac{\partial\Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)}{\partial\theta^i_\alpha}\},
\end{aligned} \qquad /4.8/$$

$$[H,\ \Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)]_{-} = -\{(h^{(\Phi)}\Phi(\theta))_{\mathfrak{A}} + \frac{1}{2}\theta_{\alpha}^{i}\frac{\partial\Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)}{\partial\theta_{\alpha}^{i}}\},$$

$$[R_{\alpha}^{i}, \Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)]_{-[\mathfrak{A}]} = -\{(r_{\alpha}^{(\Phi)i}\ \Phi(\theta))_{\mathfrak{A}} + i\,\theta_{\alpha}^{j}\,(\frac{\lambda_{a}^{(m)}}{2})_{j}^{i}\,(f_{a}^{(\Phi)}\Phi(\theta))_{\mathfrak{A}} + \qquad /4.8/$$

$$+ i\theta_{\beta}^{i}(\frac{\lambda_{p}^{(n)}}{2})_{\alpha}^{\beta}(g_{p}^{(\Phi)}\Phi(\theta))_{\mathfrak{A}} - i\theta_{\alpha}^{i}\frac{m-n}{mn}(h^{(\Phi)}\Phi(\theta))_{\mathfrak{A}} +$$

$$+ \frac{i}{2}\theta_{\alpha}^{j}\theta_{\beta}^{i}\ \frac{\partial\Phi_{\mathfrak{A}}(\theta)}{\partial\theta_{\beta}^{j}}.$$

Рассмотрим самый простой случай, когда

$$f_{a} = 0,\quad g_{p} = 0,\quad r_{\alpha}^{i} = 0$$

и h - некоторое число. Тогда формула /4.8/ становится

$$[F_{a},\ \Phi(\theta)] = -\frac{1}{2}(\lambda_{a}^{(m)})_{i}^{j}\ \theta_{\alpha}^{i}\ \frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta_{\alpha}^{j}},$$

$$[G_{p},\ \Phi(\theta)] = \frac{1}{2}(\lambda_{p}^{(n)})_{\alpha}^{\beta}\ \theta_{\beta}^{i}\ \frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta_{\alpha}^{i}},$$

$$/4.9/$$

$$[H,\ \Phi(\theta)] = -h^{(\Phi)}\Phi(\theta) - \frac{1}{2}\theta_{\alpha}^{i}\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta_{\alpha}^{i}},$$

$$[R_{\alpha}^{i},\ \Phi(\theta)] = i\frac{m-n}{mn}h\theta_{\alpha}^{i}\ \Phi(\theta) - \frac{i}{2}\theta_{\alpha}^{j}\theta_{\beta}^{i}\ \frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta_{\beta}^{j}}.$$

Суперполе $\Phi(\theta)$ может быть разложено в полиномиальный ряд порядка 2^{mn}:

$$\Phi(\theta) = \phi + \theta_{\alpha}^{i}\phi_{i}^{\alpha} + \theta_{\alpha_1}^{i_1}\theta_{\alpha_2}^{i_2}\phi_{i_1 i_2}^{\alpha_1\alpha_2} + \ldots + \theta_{\alpha_1}^{i_1}\ldots\theta_{\alpha_{mn}}^{i_{mn}}\phi_{i_1\ldots i_{mn}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{mn}} \qquad /4.10/$$

Тензоры $\phi_{i_1 i_2\ldots i_k}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ полностью антисимметричны по индексам $\frac{\alpha_\ell}{i_\ell}$. Их инфинитезимальное преобразование можно легко найти из /4.3/ и /4.9/:

$$\delta^{(s)}\phi_{i_1 i_2\ldots i_k}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \frac{k+1}{2}\eta_{\alpha}^{i}\ \phi_{i_1\ldots i_k i}^{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha}, \qquad /4.11/$$

$$\delta^{(R)}\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{i_1i_2\ldots i_k}=(-1)^k\left\{\frac{m-n}{mn}h\cdot[\sigma_{i_1}^{\alpha_1}\phi^{\alpha_2\ldots\alpha_k}_{i_2\ldots i_k}]-\frac{k-1}{2}[\sigma_{i_2}^{\alpha_1}\cdot\phi^{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k}_{i_1i_3\ldots i_k}]\right\}, \qquad /4.12/$$

$$\delta^{(H)}\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{i_1i_2\ldots i_k}=i\epsilon\left(h+\frac{k}{2}\right)\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{i_1i_2\ldots i_k}\quad, \qquad /4.13/$$

$$\delta^{(F)}\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{i_1i_2\ldots i_k}=i\omega_a\sum_{\ell=1}^{k}(\lambda_a^{(m)})^j_{i_\ell}\cdot\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_\ell\ldots\alpha_k}_{i_1\ldots i\ldots i_k}, \qquad /4.14/$$

$$\delta^{(G)}\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{i_1i_2\ldots i_k}=-\frac{i\omega_p}{2}\sum_{\ell=1}^{k}(\lambda_p^{(n)})^{\alpha_\ell}_{\beta}\phi^{\alpha_1\ldots\beta\ldots\alpha_k}_{i_1\ldots i_\ell\ldots i_k}\;, \qquad /4.15/$$

где η, σ, ϵ, ω - инфинитезимальные параметры, символ [ ] в правой части /4.12/ означает антисимметризацию по всем парам индексов $\binom{\alpha_\ell}{i_\ell}$.

Уравнения /4.11/, /4.14/, /4.15/ показывают, в частности, что высшая полевая компонента $\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{mn}}_{i_1i_2\ldots i_{mn}}$ инвариантна по отношению к S, F и G преобразованиям. Чтобы видеть, при каком условии она R-инвариантна, мы пишем /см. /4.10//:

$$\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{mn}}_{i_1i_2\ldots i_{mn}}=\frac{1}{(mn)!}\frac{\partial^{(mn)}}{\partial\theta^{i_{mn}}_{\alpha_{mn}}\ldots\partial\theta^{i_2}_{\alpha_2}\,\partial\theta^{i_1}_{\alpha_1}}\Phi(\theta)$$

и, следовательно /с помощью последнего уравнения в /4.9//:

$$\delta^{(R)}\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{mn}}_{i_1i_2\ldots i_{mn}}=$$

$$=\frac{1}{(mn)!}\cdot\frac{m-n}{mn}\cdot\left(h+\frac{mn}{2}\right)\cdot\frac{\partial^{(mn)}}{\partial\theta^{i_{mn}}_{\alpha_{mn}}\ldots\partial\theta^{i_2}_{\alpha_2}\,\partial\theta^{i_1}_{\alpha_1}}(\bar\eta^{\alpha}_{i}\theta^{i}_{\alpha}\Phi(\theta))\;.$$

Отсюда видно, что $\phi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{mn}}_{i_1i_2\ldots i_{mn}}$ R- инвариантна, если $h=-\frac{mn}{2}$. Очевидно, что при этом значении h эта компонента также H - инвариантна.

Наконец, отметим, что если $\Phi_1(\theta)$ и $\Phi_2(\theta)$ являются суперполями с h_1 и h_2, тогда их произведение $\psi(\theta) = \Phi_1(\theta)\Phi_2(\theta)$ также является суперполем с $h = h_1 + h_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ne'eman Y. Phys.Lett., 1979, 81B, p. 190.
2. Fairlie D.B. J.Phys., 1979, C5, p. 155.
3. Squires E.J. Phys.Lett., 1979, 82B, p. 395.
4. Bedding S. et al. Phys.Lett., 1979, 83B, p. 59.
5. Dondi P.H., Jarvis P.D. Phys.Lett., 1979, 84B, p. 75.
6. Taylor J.G. Phys.Rev.Lett., 1979, 43, p. 824.
7. Dondi P.H., Jarvis P.D. Z.Physik, 1980, C4, p. 201.
8. Mackey G.W. Bull.Am.Math.Soc., 1963, 69, p. 628.
9. Mack G., Salam A. Ann of Phys. (N.Y.), 1969, 53, p. 174.
10. Dao Vong Duc, Ann.Inst.Henri Poincare, 1977, 27, p. 425.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 ноября 1981 года.