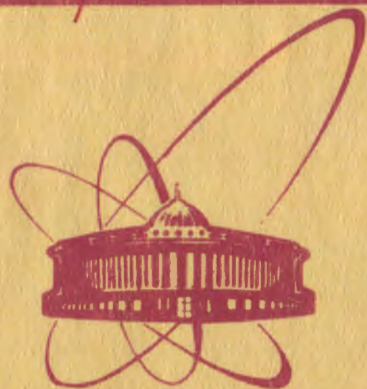


1166/82

9/III - 82



объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-81-707

Г.В.Ефимов, М.А.Иванов

ЭНЕРГИЯ ВАКУУМА В МОДЕЛИ ЮКАВЫ Y_d
В ПРЕДЕЛЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Направлено в журнал
"Communications in Mathematical Physics"

1981

1. Введение

Теория Якави γ_d описывает взаимодействие скалярного $\varphi(x)$ и фермионного $\Psi(x)$ полей в d -мерном пространстве-времени \mathbb{R}^d . Плотность лагранжиана взаимодействия записывается в виде

$$\mathcal{L}_I(x) = g \bar{\Psi}(x) \Gamma \Psi(x) \varphi(x), \quad (1.1)$$

где Γ — некоторая матрица Дирака. Эта теория представляет собой одну из основных полевых моделей, на которой проверяются различные методы квантовой теории поля. Практически невозможно дать сколько-нибудь полный перечень работ, посвященных изучению различных аспектов модели Якави. Поэтому мы коснемся только тех исследований, которые относятся к вопросу, затронутому в данной работе. Именно, мы будем изучать поведение в пределе сильной связи плотности энергии вакуума:

$$E(g) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle, \quad (1.2)$$

где $S_V(g)$ — матрица рассеяния в конечном объеме $V \subset \mathbb{R}^d$.

Прежде всего следует отметить, что плотность энергии вакуума (1.2), представляющая в теории возмущений сумму так называемых вакуумных диаграмм, существует только в конечных и суперперенормируемых теориях. Конечными теориями являются нелокальные взаимодействия, в которых эффективный пропагатор фермиона $\tilde{S}(p)$ убывает в евклидовой области ($p^2 \rightarrow -\infty$) достаточно быстро:

$$\tilde{S}(p) = O\left(\frac{1}{|p^{2\delta}|}\right), \quad (1.3)$$

где $2\delta > d$, что обеспечивает сходимость всех диаграмм Фейнмана в ряду теории возмущений.

В этом случае, используя компактную запись n -го члена ряда теории возмущений, впервые полученную в [1], легко показать [2,3,4], что в конечном объеме матричные элементы S -матрицы являются целыми аналитическими функциями по константе связи g . Кроме того, имеются указания [5,6], что плотность энергии вакуума (1.2) и другие матричные элементы S -матрицы аналитичны в точке $g=0$, в отличие от бозонных взаимодействий типа $g\varphi^{2n}$.

Что касается поведения функции $E(g)$ в (1.2) при $g \rightarrow \infty$, то такие оценки были проведены в работе [7], где непосредственно производилась оценка сверху и снизу n -го члена ряда теории возмущений. Оценки были получены для случая, когда пропагатор фермиона не

содержит γ -матриц и убывает в пределе больших импульсов согласно (I.3).

Локальная суперперенормируемая модель Киваи Y_2 изучалась в рамках конструктивного подхода многими авторами (см., например, обзор /8/). Что касается поведения плотности энергии вакуума $E(g)$, то были получены лишь грубые оценки снизу /9, 10/.

В данной работе мы получим поведение плотности энергии вакуума $E(g)$ в пределе $g \rightarrow \infty$ на основе представления S_V -матрицы для модели Киваи Y_d в форме функционального интеграла по грассмановой алгебре. Развитые методы позволяют получить ограниче-

$$E^-(g) \leq E(g) \leq E^+(g). \quad (I.4)$$

Рассмотрены следующие случаи. При нелокальном взаимодействии исследованы теории с пропагаторами фермиона:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(i\hat{k}) &= \frac{1}{M} \exp\left\{i \frac{\hat{k}}{M} - \frac{k^2}{M^2}\right\}, \\ \tilde{S}(i\hat{k}) &= \frac{1}{M-i\hat{k}} \left(\frac{M^2}{M^2+k^2}\right)^{\theta-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (I.5)$$

где первый пропагатор соответствует так называемому виртонному полю (см. /11/). В случае пропагаторов (I.5) можно получить только оценку снизу $E^-(g)$.

Для пропагаторов, не зависящих от матриц Дирака:

$$\tilde{S}(k^2) = \frac{1}{M} \exp\left\{-\frac{k^2}{M^2}\right\}, \quad \tilde{S}(k^2) = \frac{1}{M} \left(\frac{M^2}{M^2+k^2}\right)^\theta, \quad (I.6)$$

оказалось возможным получить оценки сверху $E^+(g)$ и снизу $E^-(g)$.

Исследовалась также локальная суперперенормируемая модель Y_2 . Рассматривались два вида пропагаторов ферми-поля:

$$\tilde{S}(i\hat{k}) = \frac{1}{M-i\hat{k}}, \quad \tilde{S}(k^2) = \frac{1}{\sqrt{M^2+k^2}}. \quad (I.7)$$

В первом случае получена только оценка снизу $E^-(g)$, а во втором - оценки снизу и сверху.

В настоящей работе изложены расчеты лишь для псевдоскалярной связи, когда $\Gamma = i\gamma_5$ в лагранжиане взаимодействия (I.1). Нами были проделаны аналогичные расчеты для скалярной $\Gamma = I$ и векторной

Таблица

	Пропагатор Ферми-поля в пространстве Евклида	$E^-(g) \leq E(g) \leq E^+(g)$	
		$E^-(g)_{g \rightarrow \infty}$	$E^+(g)_{g \rightarrow \infty}$
Нелокальные теории $d=2k \quad (k>1)$	$\frac{1}{M-i\hat{k}} \left(\frac{M^2}{M^2+K^2} \right)^{\frac{d-1}{2}}$	$-K_- g^{\frac{2d}{4d-d}}$	—
	$\exp\left\{-i\frac{\hat{k}}{M} - \frac{K^2}{M^2}\right\}$	$-\frac{dM^d (\ln g^2)^{\frac{d}{2}+1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}+2)}$	—
	$\frac{1}{M} \cdot \left(\frac{M^2}{M^2+K^2} \right)^d$	$-K_- g^{\frac{2d}{4d-d}}$	$-K_+ g^{\frac{2d}{4d-d}}$
	$\exp\left\{-\frac{K^2}{M^2}\right\}$	$-\frac{dM^d (\ln g^2)^{\frac{d}{2}+1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}+2)}$	$-\frac{dM^d (\ln g^2)^{\frac{d}{2}+1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}+2)}$
Локальные теории $d=2$	$\frac{1}{M-i\hat{k}}$	$-\frac{(g \ln g)^2}{8\pi^2}$	—
	$\frac{1}{\sqrt{M^2+K^2}}$	$-\frac{(g \ln g)^2}{8\pi^2}$	$-\frac{(g \ln g)^2}{8\pi^2}$

$\Gamma = i\gamma_\mu$ связей. Оказалось, что характер поведения энергии вакуума в пределе $g \rightarrow \infty$ для всех трех видов взаимодействия совпадает. Полученные результаты приведены в таблице.

Кроме того, рассмотрена амплитуда бозон-бозонного неупругого процесса $2 \rightarrow N$ в случае пропагатора фермиона $S(k) = \frac{1}{M} \exp\{-\frac{k^2}{M^2}\}$ в пределе $g \rightarrow \infty$. Оказалось, что в этом пределе "выживает" только графики - деревья.

2. Описание модели Y_d

Мы будем рассматривать модель Явы Y_d , которая описывает псевдоскалярное взаимодействие фермионного поля $\Psi(x)$ с бозонным полем $\varphi(x)$ в d -мерном пространстве-времени \mathbb{R}^d . Плотность лагранжиана взаимодействия записывается в виде

$$\mathcal{L}_I(x) = ig \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \Psi(x) \varphi(x). \quad (2.1)$$

В работе будет исследоваться S -матрица, записанная в форме функционального интеграла в евклидовой метрике. Процедуре перехода из пространства Минковского в пространство Евклида для ферми-полей посвящено много исследований [12, 13].

Мы не будем останавливаться здесь на этой проблеме, а сразу займемся описанием нашей модели в пространстве Евклида \mathbb{R}^d , причем будем считать d четным. Евклидовы γ -матрицы и спиноры Ψ , $\bar{\Psi}$ определим таким образом, чтобы обеспечить, во-первых, ковариантность теории относительно евклидовых вращений и, во-вторых, полное совпадение S -матриц в ряду теории возмущений в предлагаемом и стандартном подходах.

В евклидовом \mathbb{R}^d пространстве существуют d антикоммутирующих эрмитовых матриц γ_μ ($\mu=1, \dots, d$) размерности $d \times d$ (d четное):

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu &= 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu=1, \dots, d), \\ \gamma_\mu^+ &= \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Введем также матрицу

$$\gamma_5 = i^{\frac{d(d-1)}{2}} \gamma_1 \dots \gamma_d. \quad (2.3)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_5^+ = \gamma_5, \quad \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_\mu.$$

Например, в пространстве \mathbb{R}^2 в качестве γ_μ - и γ_5 - матриц можно выбрать

$$\gamma_1 = \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_3, \quad \gamma_5 = i\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2, \quad (2.4)$$

где σ_j -матрицы Паули. В пространстве \mathbb{R}^4

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j=1,2,3), \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Поля ψ и $\bar{\psi}$ в евклидовой метрике являются независимыми и антикоммутируют друг с другом.

Причинная функция Грина ферми-поля записывается как

$$S(x_1-x_2) = \int \left(\frac{d^d k}{(2\pi)^d}\right) \tilde{S}(i\hat{k}) e^{-ik(x_1-x_2)}. \quad (2.6)$$

Здесь $\hat{k} = \gamma_\mu k_\mu$. Интегрирование в (2.6) ведется по евклидовому пространству \mathbb{R}^d . Пропэгатор (2.6) удовлетворяет условиям

$$S^+(x) = S(x), \quad \gamma_5 S(x) \gamma_5 = S(-x). \quad (2.7)$$

Введем обозначение

$$\tilde{G}(k^2) = |\tilde{S}(i\hat{k})| = \sqrt{\tilde{S}(i\hat{k})\tilde{S}(-i\hat{k})}. \quad (2.8)$$

Будем предполагать (для всех рассматриваемых случаев это выполняется), что

$$\tilde{S}(i\hat{k}) = [\tilde{\sigma}(i\hat{k})]^2. \quad (2.9)$$

Тогда справедливо соотношение

$$S(x_1-x_2) = \int dy \sigma(x_1-y)\sigma(y-x_2),$$

где

$$\sigma(x_1-x_2) = \int \left(\frac{d^d k}{(2\pi)^d}\right) \tilde{\sigma}(i\hat{k}) e^{-ik(x_1-x_2)}.$$

Функция $\sigma(x)$ также удовлетворяет соотношениям (2.7).

Будем далее рассматривать два вида пропагаторов ферми-поля. Во-первых, пропагаторы, зависящие от \hat{k} . В этом случае будем изучать пропагаторы вида

$$\tilde{S}(i\hat{k}) = \frac{1}{M - i\hat{k}} \cdot \left(\frac{M^2}{M^2 + k^2} \right)^{\beta - \frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

где β - некоторый параметр. Для этого пропагатора

$$\tilde{G}(k^2) = |\tilde{S}(i\hat{k})| = \frac{1}{M} \left(\frac{M^2}{M^2 + k^2} \right)^\beta.$$

Условие сходимости всех фейнмановских диаграмм

$$G(0) = \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \tilde{G}(k^2) < \infty$$

накладывает ограничение на параметр β :

$$\alpha = \frac{d}{2\beta} < 1. \quad (2.11)$$

В случае $\beta = \frac{1}{2}$ пропагатор (2.10) является обычной функцией Грина свободного поля Дирака:

$$\tilde{S}(i\hat{k}) = \frac{1}{M - i\hat{k}}.$$

Кроме пропагатора (2.10) будем рассматривать пропагаторы

$$\tilde{S}(i\hat{k}) = \frac{1}{M} \exp \left\{ -i \frac{k}{M} - \frac{k^2}{M^2} \right\}, \quad (2.12)$$

где μ и M - некоторые параметры. Эта причинная функция является пропагатором так называемого виртонного поля ^{II} и используется в нелокальной модели кварков. Для этого пропагатора

$$\tilde{G}(k^2) = |\tilde{S}(i\hat{k})| = \frac{1}{M} \exp \left\{ -\frac{k^2}{M^2} \right\}.$$

Для теорий с пропагаторами (2.10) и (2.12) будет получена оценка плотности энергии вакуума снизу.

Во-вторых, будем рассматривать такие ферми-поля, пропагатор которых не зависит от \hat{k} , а зависит только от k^2 . Пропагаторы в таких теориях будем обозначать через $\tilde{G}(k^2)$. Например,

$$\widetilde{F}(k^2) = \frac{1}{M} \left(\frac{M^2}{M^2 + k^2} \right)^{\theta}, \quad (2.13)$$

$$\widetilde{G}(k^2) = \frac{1}{M} \exp \left\{ -\frac{k^2}{M^2} \right\}. \quad (2.14)$$

Нам не известны реальные ферми-поля, имеющие пропагаторы такого вида. Однако для теорий с пропагаторами (2.13) и (2.14) можно получить хорошие оценки для энергии вакуума сверху и снизу. Как будет показано ниже, в пределе $g \rightarrow \infty$ оценки для энергии вакуума снизу для пропагаторов (2.10) и (2.12) и, соответственно, для пропагаторов (2.13) и (2.14) совпадают. Поскольку оценки определяются поведением пропагаторов при $k^2 \rightarrow \infty$, то можно надеяться, что верхняя оценка для пропагатора (2.10) совпадает с верхней оценкой для пропагатора (2.13) и, аналогично, верхняя оценка для пропагатора (2.12) совпадает с верхней оценкой для пропагатора (2.14). Поэтому изучение моделей с такими пропагаторами представляет определенный математический интерес.

Теперь рассмотрим бозонное поле, которое входит в лагранжиан взаимодействия (2.1). Бозонное поле считается обычным локальным полем. Пропагатор бозонного поля

$$D(x_1 - x_2) = \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \widetilde{D}(k^2) e^{-ik(x_1 - x_2)}, \quad \widetilde{D}(k^2) = \frac{1}{m^2 + k^2}. \quad (2.15)$$

Как и в случае фермионного поля (2.9), для бозонного поля можно ввести функцию

$$\Delta(x) = \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \widetilde{\Delta}(k^2) e^{-ikx}, \quad \widetilde{\Delta}(k^2) = \sqrt{\widetilde{D}(k^2)} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + k^2}},$$

так что

$$D(x_1 - x_2) = \int dy \Delta(x_1 - y) \Delta(y - x_2). \quad (2.16)$$

3. Определение функционального интеграла

Матрица рассеяния, или S -матрица, зависящая от бозонного поля $\varphi_{in}(x)$ и фермионных полей $\psi_{in}(x)$, $\bar{\psi}_{in}(x)$, записывается в форме функционального интеграла следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & S[\varphi_{in}, \psi_{in}, \bar{\psi}_{in}] = \\
 & = \frac{1}{C} \int \delta\varphi \delta\psi \delta\bar{\psi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \varphi(x_1) D^{-1}(x_1-x_2) \varphi(x_2) - \right. \\
 & \left. - \iint dx_1 dx_2 \bar{\psi}(x_1) S^{-1}(x_1-x_2) \psi(x_2) + ig \int dx (\bar{\psi}(x) + \bar{\psi}_{in}(x)) \gamma_5 (\psi(x) + \psi_{in}(x)) (\varphi(x) + \varphi_{in}(x)) \right\}. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Здесь функции $D^{-1}(x)$ и $S^{-1}(x)$ определены соотношениями

$$\begin{aligned}
 \int dy D(x_1-y) D^{-1}(y-x_2) &= \delta(x_1-x_2), \\
 \int dy S(x_1-y) S^{-1}(y-x_2) &= \delta(x_1-x_2). \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Нормировочная константа в (3.1) выбирается таким образом, что

$$S[\varphi_{in}, \psi_{in}, \bar{\psi}_{in}] \Big|_{g=0} = 1.$$

Функциональное интегрирование проводится по бозонному полю $\varphi(x)$ и независимым фермионным полям $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. Функциональный интеграл в (3.1) пока не определен математически. Определим его. Сначала проведем некоторые формальные преобразования. В (3.1) произведем замену переменных:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \int dx' \Delta(x-x') \varphi'(x'), \\
 \psi(x) &= \int dx' \sigma(x-x') \psi'(x'), \\
 \bar{\psi}(x) &= \int dx' \bar{\psi}'(x') \sigma(x'-x), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где функции $\Delta(x)$ и $\sigma(x)$ определены равенствами (2.9) и (2.16). В результате этой замены S -матрица (3.1) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
 & S[\varphi_{in}, \psi_{in}, \bar{\psi}_{in}] = \\
 & = \frac{1}{C} \int \delta\varphi \delta\psi \delta\bar{\psi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx \varphi^2(x) - \int dx \bar{\psi}(x) \psi(x) \right\} \times \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ i g \int dx \left(\bar{\Psi}(x) + \bar{\Psi}_m(x) \right) \gamma_5 \left(\Psi(x) + \Psi_m(x) \right) \left(\Phi(x) + \varphi_m(x) \right) \right\},$$

где поля $\Psi(x)$, $\bar{\Psi}(x)$ и $\Phi(x)$ связаны соотношениями (3.3) с полями $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $\varphi(x)$, по которым проводится интегрирование.

Чтобы устранить расходимости, связанные с трансляционной инвариантностью теории, поместим рассматриваемую систему в конечный объем V . Таким образом, интегрирование по X в (3.4) будем проводить по ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^d$.

Будем предполагать, что в области V существует ортонормированный базис $\{g_n(x), n=0, 1, \dots\}$, такой, что

$$\begin{aligned} \int_V dx g_n(x) g_{n'}(x) &= \delta_{nn'}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) g_n(x') &= \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для удобства будем считать функции $g_n(x)$ вещественными. Предполагаем, что любая функция $f(x) \in L_2(V)$ может быть разложена по этому базису:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n(x), \quad f_n = \int_V dx g_n(x) f(x), \\ \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 &= \int_V dx |f(x)|^2 < \infty. \end{aligned}$$

После этих предварительных замечаний приступим к определению функционального интеграла. Сначала определим функциональный интеграл по бозе-полю (см. /14/). В функциональном интеграле (3.4) положим

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) u_n. \quad (3.6)$$

Тогда

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(x) u_n, \quad (3.7)$$

где

$$\Delta_n(x) = \int_V dx' \Delta(x-x') g_n(x').$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(x) \Delta_n(x') = \int dy \Delta(x-y) \Delta(y-x') = D(x-x'). \quad (3.8)$$

Введем функции

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N g_n(x) u_n, \quad \Phi_N(x) = \sum_{n=0}^N \Delta_n(x) u_n \quad (3.9)$$

и определим меру

$$d^N \mathcal{G}_\varphi = \prod_{n=0}^N \frac{du_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u_n^2}, \quad (3.10)$$

так что

$$\int d^N \mathcal{G}_\varphi = \prod_{n=0}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u_n^2} = 1.$$

Обратимся теперь к фермионным переменным. Функциональное интегрирование в (3.4) по ферми-полям будем рассматривать на языке интегралов по грасмановой алгебре [15]. Определим переменные (a_ν, \bar{a}_ν) как образующие грасмановой алгебры. Здесь индекс $\nu = (n, \alpha)$, где $\alpha = 1, \dots; d$ - спинорный индекс. Образующие (a_ν, \bar{a}_ν) удовлетворяют соотношениям

$$\{a_\nu, a_{\nu'}\}_+ = \{\bar{a}_\nu, \bar{a}_{\nu'}\}_+ = \{a_\nu, \bar{a}_{\nu'}\}_+ = 0. \quad (3.11)$$

Введем символы $(da_\nu, d\bar{a}_\nu)$. Будем считать, что они также являются элементами грасмановой алгебры, т.е. удовлетворяют соотношениям (3.11). Кроме того, они антикоммутируют со всеми элементами алгебры (a_ν, \bar{a}_ν) . Однократные интегралы по грасмановой алгебре

$$\int da_\nu = \int d\bar{a}_\nu = 0, \quad (3.12)$$

$$\int da_\nu a_{\nu'} = - \int d\bar{a}_\nu \bar{a}_{\nu'} = \delta_{\nu\nu'} = \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'}.$$

Кратные интегралы понимаются как повторные.

Положим в (3.4), опуская для простоты спинорные индексы,

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) a_n, \quad \bar{\psi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n g_n(x). \quad (3.13)$$

Тогда согласно (3.3) получим

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x) a_n, \quad \bar{\Psi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{\sigma}_n(x), \quad (3.14)$$

где

$$\sigma_n(x) = \int_V dx' \sigma(x-x') g_n(x'),$$

$$\bar{\sigma}_n(x) = \int_V dx' g_n(x') \sigma(x'-x).$$

Справедливы соотношения

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x) \bar{\sigma}_n(x') = S(x-x'), \quad (3.15)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x) \sigma_n(x') = G(x-x').$$

Введем величины

$$\Psi_N(x) = \sum_{n=0}^N \sigma_n(x) a_n, \quad \bar{\Psi}_N(x) = \sum_{n=0}^N \bar{a}_n \bar{\sigma}_n(x) \quad (3.16)$$

и определим грасманову меру

$$d^N \sigma_{\psi} = \prod_{n=0}^N \prod_{\alpha=1}^d da_{n\alpha} d\bar{a}_{n\alpha} e^{-\bar{a}_{n\alpha} a_{n\alpha}}, \quad (3.17)$$

так что

$$\int d^N \sigma_{\psi} = 1.$$

Теперь мы в состоянии определить функциональный интеграл в (3.4). По определению, будем считать, что

$$\begin{aligned}
 S_V[\Psi_{in}, \bar{\Psi}_{in}, \Phi_{in}] &= \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\bar{\sigma}_\varphi^N \int d\sigma_\varphi^N \exp\left\{ig \int_V dx (\bar{\Psi}_N(x) + \bar{\Psi}_{in}(x)) \gamma_5 (\Psi_N(x) + \Psi_{in}(x)) (\Phi_N(x) + \Phi_{in}(x))\right\}.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Таким образом, функциональный интеграл в конечном объеме понимается как предел многократного интеграла. Из (3.18) видно, что при формальном переходе $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ полученное выражение полностью совпадает с (3.4). В дальнейшем для простоты будем опускать знак предельного перехода по N .

Ряд теории возмущений для матричных элементов S -матрицы, полученный из (3.18), полностью совпадает с обычным рядом теории возмущений, поскольку

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \int d\bar{\sigma}_\varphi \phi(x) \phi(x') = \lim_{V \rightarrow \infty} \sum_n \Delta_n(x) \Delta_n(x') = D(x-x'),$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \int d\bar{\sigma}_\varphi \psi(x) \bar{\psi}(x') = \lim_{V \rightarrow \infty} \sum_n \sigma_n(x) \bar{\sigma}_n(x') = S(x-x').$$

4. Плотность энергии вакуума

В данной работе нас будет интересовать главным образом плотность энергии вакуума. Она определяется соотношением

$$E(g) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle, \tag{4.1}$$

где

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle$$

является средним по вакууму от матрицы рассеяния. Согласно определениям предыдущего раздела $\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle$ можно записать в форме функционального интеграла:

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle = \int d\bar{\sigma}_\varphi \int d\sigma_\varphi \exp\left\{ig \int_V dx \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \Psi(x) \Phi(x)\right\}. \tag{4.2}$$

Наша задача состоит в том, чтобы исследовать функцию $E(g)$ в (4.1) для псевдоскалярного взаимодействия (2.1) вне рамок теории возмущений.

Выражение (4.2) перепишем в удобных для дальнейшего обозначениях:

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle = \int d\bar{\alpha} \int d\alpha \int d\bar{a} \exp\{ -(\bar{a}a) + ig(\bar{a}Ha) \},$$

$$\delta a \delta \bar{a} = \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{\alpha_n=1}^1 da_{n\alpha_n} d\bar{a}_{n\alpha_n}, \quad (4.3)$$

$$(\bar{a}a) = \sum_{n,\alpha} (\bar{a}_{n\alpha} a_{n\alpha}), \quad (\bar{a}Ha) = \sum_{n\alpha} \sum_{n'\alpha'} (\bar{a}_{n\alpha} H_{n\alpha, n'\alpha'} a_{n'\alpha'}).$$

Матрица H равна

$$H = \int_V dx \bar{\sigma}(x) \gamma_5 \sigma(x) \phi(x), \quad (4.4)$$

а ее матричные элементы имеют следующий вид:

$$H_{n\alpha, n'\alpha'} = \int_V dx (\bar{\sigma}_n(x) \gamma_5 \phi(x) \sigma_{n'}(x))_{\alpha\alpha'}. \quad (4.5)$$

Произведем в интеграле (4.3) тождественные преобразования, смысл которых будет ясен из дальнейшего (см. /14/):

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle = \int d\bar{\alpha} \int d\alpha \int d\bar{a} \exp\{ -(\bar{a}(1+q)a) + (\bar{a}qa) + ig(\bar{a}Ha) \}, \quad (4.6)$$

где q - диагональная матрица с матричными элементами

$$(q)_{n\alpha, n'\alpha'} = q_n \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (4.7)$$

Числа q_n положительны и удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n < \infty. \quad (4.8)$$

Произведем в (4.6) замену переменных интегрирования $a_{n\alpha} \rightarrow \frac{a_{n\alpha}}{\sqrt{1+q_n}}$,

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle = \prod_{n=0}^{\infty} (1+q_n)^d \int d\bar{\alpha} \int d\alpha \exp\{ (\bar{a} \frac{q}{1+q} a) + ig(\bar{a} H_q a) \}. \quad (4.9)$$

Здесь

$$H_q = \frac{1}{\sqrt{1+q}} H \frac{1}{\sqrt{1+q}} = \int dx \bar{\sigma}_q(x) \gamma_5 \phi(x) \sigma_q(x),$$

$$\sigma_q(x) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{1+q}}, \quad (4.10)$$

т.е.

$$(H_q)_{n\alpha, n'\alpha'} = \int dx \left(\frac{\bar{\sigma}_n(x)}{\sqrt{1+q_n}} \gamma_5 \phi(x) \frac{\sigma_{n'}(x)}{\sqrt{1+q_{n'}}} \right)_{\alpha\alpha'}$$

Функциональный интеграл по грассмановым переменным легко берется, и мы получаем

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle = \prod_{n=0}^{\infty} (1+q_n)^d \int d\sigma_q \det(I - J_q - ig H_q), \quad (4.11)$$

где $J_q = \frac{q}{1+q}$ - диагональная матрица.

Задача состоит в том, чтобы оценить детерминант в (4.11). Следует отметить, что матрица H_q неэрмитова для теорий, у которых пропагатор $\hat{S}(i\hat{k})$ зависит от $\hat{k} = \gamma_\mu k_\mu$ (см. (2.10) и (2.12)). Для таких теорий будет получена только оценка снизу для плотности энергии вакуума. Для теорий, у которых пропагатор ферми-поля зависит только от k^2 (см. (2.13) и (2.14)), матрица H_q эрмитова. В этом случае можно получить для плотности энергии вакуума (4.1) оценки сверху и снизу.

5. Неравенства для детерминантов и идея оценок

Будем использовать следующие неравенства для детерминантов, которые позволяют нам получить оценки сверху и снизу для плотности энергии вакуума.

Неравенство N^+ . Пусть $A = B + iC$ - некоторая квадратная комплексная матрица, $B = B^+$, $C = C^+$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$|\det(I+A)| \leq \exp\left\{ \frac{1}{2} \text{Sp}(A+A^+) + \frac{1}{2} \text{Sp} A A^+ \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \text{Sp} B + \frac{1}{2} \text{Sp}(B^2 + C^2) \right\}. \quad (5.1)$$

Доказательство. Пусть $\{\Lambda_j\}$ - характеристические числа неотрицательно определенной матрицы $(I+A)(I+A)^+$. Тогда

$$|\det(I+A)| = [\det(I+A)(I+A)^+]^{\frac{1}{2}} = \left[\prod_j \Lambda_j \right]^{\frac{1}{2}}.$$

В силу очевидного неравенства

$$u \leq e^{u-1},$$

справедливого для всех $u \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} |\det(I+A)| &\leq \prod_j e^{\frac{1}{2}(\Lambda_j-1)} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_j (\Lambda_j-1)\right\} = \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\text{Sp}[(I+A)(I+A)^+ - I]\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\text{Sp}(A+A^+) + \frac{1}{2}\text{Sp}AA^+\right\}. \end{aligned}$$

Неравенство N^- . Пусть J - диагональная положительно определенная матрица, все собственные значения $\{J_j\}$ которой положительны и строго меньше единицы:

$$0 < J_j \leq J_0 < 1, \quad (\forall j).$$

Пусть, далее, матрица C эрмитова. Тогда справедливо неравенство

$$|\det(I-J+iC)| \geq \exp\left\{\frac{1}{2}\text{Sp} B - \frac{\tau(J_0)}{4}\text{Sp} B^2\right\}. \quad (5.2)$$

Здесь

$$B = J(J-2) + i[J, C] + C^2, \quad (5.3)$$

$$\tau(J_0) = \frac{2}{[1-(1-J_0)^2]} \left\{ \ln \frac{1}{(1-J_0)^2} - [1-(1-J_0)^2] \right\}. \quad (5.4)$$

При $J_0 \rightarrow 1$

$$\tau(J_0) = 4 \ln \frac{1}{1-J_0} + O(1). \quad (5.5)$$

Доказательство. Пусть $\{\lambda_j\}$ - характеристические числа матрицы $A = I - J + iC$, а $\{\Lambda_j\}$ - характеристические числа неот-

рицательно определенной матрицы $AA^+ = (I - J + iC)(I - J - iC)$.
Согласно [16] имеем

$$\operatorname{Re} \lambda_j \geq 1 - J_0 \quad (5.6)$$

и

$$\Lambda_{\min} = \min_j \Lambda_j = \min_{(z,z)=1} (z, AA^+ z).$$

Существует такая унитарная матрица U ($UU^+ = I$), что

$$U^+ A U = T,$$

где T - верхняя треугольная матрица:

$$T = \mathcal{D} + \tau,$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $(z, z) = (Uz, Uz) = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_{\min} &= \min_{(z,z)=1} (z, AA^+ z) = \min_{(z,z)=1} (z, TT^+ z) = \\ &= \min_{(z,z)=1} (z, [\mathcal{D}\mathcal{D}^+ + \tau\tau^+] z) = \min_{(z,z)=1} \left\{ \sum_j |\lambda_j|^2 |z_j|^2 + \|\tau z\|^2 \right\} \geq \\ &\geq |\lambda_{\min}|^2 \geq |\operatorname{Re} \lambda_{\min}|^2 \geq (1 - J_0)^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Воспользуемся далее неравенством

$$u \geq \exp \left\{ (u-1) - \frac{z}{2} (u-1)^2 \right\}, \quad (5.8)$$

где

$$z = \frac{2}{(1-u_0)^2} \left[\ln \frac{1}{u_0} - (1-u_0) \right],$$

которое справедливо для всех $u \geq u_0$ ($0 < u_0 < 1$). С учетом неравенств (5.7) и (5.8) получим

$$\begin{aligned} |\det A| &= [\det AA^+]^{1/2} = \left[\prod_j \Lambda_j \right]^{1/2} \geq \\ &\geq \prod_j \exp \left\{ \frac{1}{2} (\lambda_j - 1) - \frac{z(J_0)}{4} (\lambda_j - 1)^2 \right\} = \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2} \text{Sp}(AA^+ - I) - \frac{\tau(J_0)}{4} \text{Sp}(AA^+ - I)^2\right\},$$

где $\tau(J_0)$ дается формулой (5.4). Подставляя в (5.9) явный вид матрицы $A = I - J + iC$, получаем неравенство (5.2).

В частности, для эрмитовой матрицы C имеем ($B=0, J=0$), используя неравенства N^+ и N^- ,

$$\exp\left\{\frac{1}{2} \text{Sp} C^2 - \frac{1}{4} \text{Sp} C^4\right\} \leq |\det(I + iC)| \leq \exp\left\{\frac{1}{2} \text{Sp} C^2\right\}. \quad (5.10)$$

С помощью полученных неравенств на простейшем примере покажем идею наших дальнейших оценок сверху и снизу для плотности энергии вакуума.

Рассмотрим одномерный интеграл

$$S(g) = \int d\phi_\varphi \det(I - ig\tau_1\varphi). \quad (5.11)$$

Здесь мера $d\phi_\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2}$, τ_1 - матрица Паули. Точное вычисление дает

$$\det(I - ig\tau_1\varphi) = 1 + g^2\varphi^2$$

и

$$S(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} (1 + g^2\varphi^2) = 1 + g^2. \quad (5.12)$$

Аналог плотности энергии вакуума (4.1) есть

$$E(g) = -\ln S(g) = -\ln(1 + g^2). \quad (5.13)$$

Теперь займемся оценками интеграла (5.11). Используем тождество

$$\det(I - ig\tau_1\varphi) = (1+q)^2 \det\left(I - J_q - ig \frac{\tau_1\varphi}{1+q}\right), \quad (5.14)$$

где $J_q = \frac{q}{1+q} I$ и $q > 0$. Подставляя (5.14) в (5.11), получим

$$S(g) = (1+q)^2 \int d\phi_\varphi \det\left(I - J_q - ig \frac{\tau_1\varphi}{1+q}\right). \quad (5.15)$$

Сначала получим оценку снизу для $E(g)$. Воспользуемся неравенст-

вом N^+ :

$$|\det(I - J_q - ig \frac{\tau_1 \varphi}{1+q})| \leq \leq \exp \left\{ -Sp J_q + \frac{1}{2} Sp \left(J_q^2 + \frac{g^2 \varphi^2}{(1+q)^2} \right) \right\}. \quad (5.16)$$

Подставим (5.16) в (5.15) и проинтегрируем по φ . Заметим, что интеграл по φ существует при $\frac{2g^2}{(1+q)^2} < 1$.

$$S(g) \leq \exp \left\{ 2 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{1+q} + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{2g^2}{(1+q)^2} \right] \right\}.$$

Откуда

$$E(g) \geq E^-(g),$$

$$E^-(g) = \max_{q>0} \left\{ -2 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{1+q} + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{2g^2}{(1+q)^2} \right] \right\}. \quad (5.17)$$

Вычисление дает

$$E^-(g) = -\ln \frac{1}{2} \left[1 + 3g^2 + \sqrt{(1+3g^2)^2 - 8g^2} \right] + \\ + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \left[1 - 3g^2 + \sqrt{(1+3g^2)^2 - 8g^2} \right] - \\ - \frac{1 - 3g^2 - \sqrt{(1+3g^2)^2 - 8g^2}}{1 + 3g^2 + \sqrt{(1+3g^2)^2 - 8g^2}}.$$

При $g^2 \rightarrow \infty$ получим

$$E^-(g) = -\ln g^2 - (\ln 3\sqrt{3} - 1) + O\left(\frac{1}{g^2}\right). \quad (5.18)$$

Таким образом, главный асимптотический член в (5.18) совпадает с точным поведением $E(g)$ в (5.13).

Займемся теперь оценкой сверху для $E(g)$. В данном случае

$$\det(I - J_q - ig \frac{\tau_1 \varphi}{1+q}) = \left| \det(I - J_q - ig \frac{\tau_1 \varphi}{1+q}) \right|. \quad (5.19)$$

Используя неравенство N^- , имеем

$$\det(I - J_q - ig \frac{z_1 \varphi}{1+q}) \geq \exp \left\{ \frac{1}{2} S_p B - \frac{z(J_0)}{4} S_p B^2 \right\}. \quad (5.20)$$

Здесь

$$B = -(2J_q - J_q^2) + \frac{g^2 \varphi^2}{(1+q)^2},$$

$J_0 = J_q = \frac{z}{1+q}$, а $z(J_0)$ дается формулой (5.4). Рассмотрим асимптотику $S(g)$ при $g \rightarrow \infty$. В этом случае $q \rightarrow \infty$ и, следовательно, $J_q \rightarrow 1$. Имеем

$$\det(I - J_q - ig \frac{z_1 \varphi}{1+q}) \geq \exp \left\{ -1 + \frac{g^2 \varphi^2}{q^2} - \left(1 - \frac{g^2 \varphi^2}{q^2}\right)^2 \ln q^2 \right\}. \quad (5.21)$$

Подставляя неравенство (5.21) в (5.11), с учетом (5.14) получим

$$S(g) \geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} \exp \{ H_q(\varphi) \}, \quad (5.22)$$

где

$$H_q(\varphi) = \ln q^2 - 1 + \frac{g^2 \varphi^2}{q^2} - \left(1 - \frac{g^2 \varphi^2}{q^2}\right)^2 \ln q^2.$$

Нетрудно видеть, что максимум функции $H_q(\varphi)$ не находится в точке $\varphi = 0$. Поэтому воспользуемся следующим приемом. Записывая меру $d\sigma_\varphi$ в явном виде, сдвинем интеграл по φ на произвольное число Φ :

$$S(g) \geq \int d\sigma_\varphi \exp \left\{ -\varphi \Phi - \frac{1}{2} \Phi^2 + H_q(\varphi + \Phi) \right\}. \quad (5.23)$$

Применим к полученному интегралу неравенство

$$\int d\sigma_\varphi \exp \{ W(\varphi) \} \geq \exp \left\{ \int d\sigma_\varphi W(\varphi) \right\}, \quad (5.24)$$

верное для всех вещественных функционалов W . Имеем

$$S(g) \geq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Phi^2 + \int d\sigma_\varphi H_q(\varphi + \Phi) \right\}. \quad (5.25)$$

Подставляя в (5.25) явное выражение для H_q , получаем

$$E(g) \leq E^+(g),$$

$$E^+(g) = \min_{q>0} \min_{\phi} \left\{ \frac{1}{2} \phi^2 - \ln q^2 + 1 - \frac{g^2}{q^2} (1 + \phi^2) + \left[1 - 2 \frac{g^2}{q^2} (1 + \phi^2) + \frac{g^4}{q^4} (3 + 6\phi^2 + \phi^4) \right] \ln q^2 \right\}. \quad (5.26)$$

Минимум по ϕ легко вычисляется:

$$E^+(g) = \min_{\lambda>0} \left\{ (\ln \lambda - \ln g^2) (1 - 4\lambda + 6\lambda^2) + \frac{1}{2\lambda} - \frac{3}{2} + 2\lambda + \frac{(\frac{1}{2} - \lambda)^2}{4\lambda^2 (\ln g^2 - \ln \lambda)} \right\}, \quad (5.27)$$

где введена новая переменная $\lambda = \frac{g^2}{q^2}$. Минимум полученного выражения осуществляется при

$$\lambda = (16 \ln g^2)^{-\frac{1}{3}}, \quad g \rightarrow \infty. \quad (5.28)$$

Окончательно

$$E^+(g) = -\ln g^2 \cdot \left[1 + O((\ln g^2)^{-\frac{1}{3}}) \right]. \quad (5.29)$$

Полученные результаты показывают, что используемый нами метод оценок довольно точен, поскольку в асимптотике $g \rightarrow \infty$ нижняя (5.18) и верхняя (5.29) оценки совпадают с истинным поведением функции в (5.13).

6. Оценка снизу $E^-(g)$

Используя метод оценок, изложенный в предыдущем разделе, получим оценку снизу для вакуумного ожидания S -матрицы (4.II). Применение неравенства N^+ при оценке детерминанта в (4.II) дает

$$\begin{aligned} & |\det(I - J_q + ig H_q)| \leq \\ & \leq \exp \left\{ \text{Sp} \left(-J_q + \frac{1}{2} J_q^2 \right) + \frac{ig}{2} \text{Sp} (H_q - H_q^+) (I - J_q) + \frac{g^2}{2} \text{Sp} H_q H_q^+ \right\}. \end{aligned} \quad (6.I)$$

Имеем согласно (4.I0)

$$Sp(H_q - H_q^+) / (1 - J_q) = 0,$$

$$\begin{aligned} Sp H_q H_q^+ &= \int \int d x_1 d x_2 Sp \left\{ \bar{\sigma}_q(x_1) \gamma_5 \phi(x_1) \sigma_q(x_1) \bar{\sigma}_q^+(x_2) \gamma_5 \phi(x_2) \bar{\sigma}_q^+(x_2) \right\} \\ &= \int \int d x_1 d x_2 \phi(x_1) \Pi_q(x_1, x_2) \phi(x_2), \end{aligned}$$

$$\Pi_q(x_1, x_2) = d G_q^2(x_1, x_2), \quad G_q(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n(x_1) \sigma_n(x_2)}{1 + q_n}.$$

С учетом полученных оценок для вакуумного ожидания S -матрицы имеем

$$\langle 0 | S_V(q) | 0 \rangle \leq N_q \int d \sigma_p \exp \left\{ \frac{g^2}{2} \int \int d x_1 d x_2 \phi(x_1) \Pi_q(x_1, x_2) \phi(x_2) \right\}, \quad (6.2)$$

где

$$N_q = \exp \left\{ d \sum_{n=0}^{\infty} \left[\ln(1 + q_n) - \frac{q_n}{1 + q_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{q_n}{1 + q_n} \right)^2 \right] \right\}.$$

Функциональный интеграл по бозонному полю является гауссовым и точно вычисляется. Воспользовавшись (3.9) и (3.10), имеем

$$\langle 0 | S_V(q) | 0 \rangle \leq N_q \left[\det(\delta_{nn'} - g^2 P_{nn'}) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.3)$$

где

$$P_{nn'} = \int \int d x d x' \Delta_n(x) \Pi_q(x, x') \Delta_{n'}(x').$$

При переходе к пределу $V \rightarrow \infty$ в формуле (4.1) для энергии вакуума будем использовать соотношения, полученные в [14]. Именно, числа q_n могут быть выбраны таким образом, что

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_{n=0}^{\infty} f(q_n) &= \int \left(\frac{d\kappa}{2\pi} \right)^d f(q(\kappa^2)), \\ \lim_{V \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n(x) \sigma_n(x')}{(1 + q_n)^a} &= \int \left(\frac{d\kappa}{2\pi} \right)^d \frac{\tilde{\sigma}(\kappa)}{(1 + q(\kappa^2))^a} e^{-i\kappa(x-x')}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $f(u)$ — ограниченная функция, такая, что $f(u) = O(u)$ при $u \rightarrow 0$.
Используя эти соотношения, а также (3.8) и (3.15), получим

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln N_q &= d \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \left[\ln(1+q(k^2)) - \frac{q(k^2)}{1+q(k^2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{q(k^2)}{1+q(k^2)} \right)^2 \right], \\ \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \left[\det(I_{nn'} - g^2 P_{nn'}) \right]^{-\frac{1}{2}} &= \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \ln \left(1 - \frac{g^2}{m^2+k^2} \tilde{\Pi}_q(k^2) \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где

$$\tilde{\Pi}_q(k^2) = d \int \left(\frac{dp}{2\pi} \right)^d \frac{\tilde{G}(p^2) \tilde{G}((p+k)^2)}{[1+q(p^2)][1+q((p+k)^2)]}. \quad (6.6)$$

Существенно, что полученное выражение справедливо при условии

$$\frac{g^2}{m^2+k^2} \tilde{\Pi}_q(k^2) \leq 1 \quad (0 \leq k^2 < \infty). \quad (6.7)$$

Учитывая полученные соотношения и замечая, что оценка снизу справедлива для любых чисел q_n и, следовательно, любых функций $q(k^2)$, найдем

$$E(g) \geq E^-(g),$$

$$\begin{aligned} E^-(g) &= \max_{q(k^2) > 0} \left\{ -d \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \left[\ln(1+q(k^2)) - \frac{q(k^2)}{1+q(k^2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{q(k^2)}{1+q(k^2)} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \ln \left[1 - \frac{g^2}{m^2+k^2} \tilde{\Pi}_q(k^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Полученное неравенство справедливо для любых g^2 . Нам будет интересно поведение $E^-(g)$ при $g \rightarrow \infty$. Максимизация функционала (6.8) приводит к сложному интегральному уравнению. Мы не будем решать это уравнение, а поступим следующим образом. Выберем функцию $q(k^2)$ в форме

$$q(k^2) = f(g) \frac{\tilde{G}(k^2)}{\tilde{G}(0)}. \quad (6.9)$$

Очевидно, в силу условия (6.7), функция $f(q) \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \infty$. Программа вычислений состоит в следующем. Надо подставить (6.9) в (6.8) и вычислить асимптотику встречающихся интегралов при $f \rightarrow \infty$ для конкретного вида пропагаторов. Затем необходимо найти точку максимума по f полученного выражения и тем самым определить асимптотику $E^-(q)$ при $q \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала пропагатор (2.10), для которого

$$\tilde{G}(k^2) = \frac{1}{M} \left(\frac{M^2}{M^2 + k^2} \right)^{\delta}, \quad (6.10)$$

тогда согласно (6.9)

$$q(k^2) = f(q) \left(\frac{M^2}{M^2 + k^2} \right)^{\delta}.$$

Подставляя функцию $q(k^2)$ в (6.8), после некоторых вычислений, которые мы здесь опускаем, получим для интегралов, входящих в (6.8), при $f \rightarrow \infty$ следующие выражения:

$$d \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \left[\ln(1+q) - \frac{q}{1+q} + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^2 \right] = M^d \omega_d C_1 f^\alpha \left[1 + O\left(\frac{\ln f}{f} \right) \right],$$

$$\omega_d = \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)},$$

$$C_1 = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} (2 - \alpha + \alpha^2), \quad \alpha = \frac{d}{2\delta} < 1,$$

$$\tilde{\Pi}_q(k^2) = \frac{d M^{d-2}}{f^{2-\alpha}} R_1 \left(f^{-\frac{1}{\delta}} \frac{k^2}{M^2} \right),$$

$$R_1(p^2) = \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \frac{1}{[1+k^{2\delta}] [1+(k+p)^{2\delta}]},$$

$$R_1(0) = \frac{2\omega_d}{d} \Gamma(1+\alpha) \Gamma(2-\alpha) = \frac{2\omega_d}{d} \alpha(1-\alpha) \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

Функция $R_1(p^2)$ монотонно убывает и при $p^2 \rightarrow \infty$:

$$R_1(p^2) = O\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right).$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} & - \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \ln \left[1 - \frac{g^2}{m^2 + k^2} \widetilde{\Pi}_q(k^2) \right] = \\ & = \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \left[-\ln \left(1 - \frac{g^2}{m^2 + k^2} \widetilde{\Pi}_q(k^2) \right) - \sum_{s=1}^{\frac{d}{2}} \frac{g^{2s}}{s} \left(\frac{\widetilde{\Pi}_q(k^2)}{m^2 + k^2} \right)^s \right] + \\ & \quad + \sum_{s=1}^{\frac{d}{2}} \frac{g^{2s}}{s} \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \left(\frac{\widetilde{\Pi}_q(k^2)}{m^2 + k^2} \right)^s \xrightarrow{f \rightarrow \infty} \\ & \rightarrow m^d \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \left[-\ln \left(1 - \frac{\xi}{k^2 + 1} \right) - \sum_{s=1}^{\frac{d}{2}} \frac{\xi^s}{s(k^2 + 1)^s} \right] + \\ & + \sum_{s=1}^{\frac{d}{2}-1} \frac{\xi^s}{s} f^{\alpha(1-\frac{2s}{d})} M^d \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \left[\frac{m^2 R_1(k^2)}{M^2 k^2 R_1(0)} \right]^s + \frac{2\omega d}{d} \xi^{\frac{d}{2}} \left(\frac{m^2}{M^2}\right)^{\frac{d}{2}} M^d \ln f^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

где

$$\xi = \frac{g^2}{f^{2-\alpha}} \tau_1, \quad \tau_1 = d M^{d-4} \left(\frac{M^2}{m^2}\right) R_1(0).$$

Условие сходимости (6.7):

$$0 \leq \xi \leq 1.$$

Учитывая полученные оценки, видим, что максимум функционала (6.8) с функцией q по (6.9) осуществляется при

$$\xi = 1, \tag{6.11}$$

откуда

$$f = g^{\frac{2}{2-\alpha}} \tau_1^{\frac{1}{2-\alpha}}.$$

Окончательно для $E^-(g)$ получим

$$E^-(g) = -K g^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}} \left[1 + O\left(g^{-\frac{2}{\alpha(2-\alpha)}}\right) \right], \tag{6.12}$$

где

$$K_- = M^d \omega_d C_1 z_1^{\frac{d}{2-\alpha}}$$

Рассмотрим теперь теорию, в которой пропагатором ферми-поля является функция (2.12). В этом случае имеем

$$q(k^2) = f(q) e^{-\frac{K_-^2}{M^2}} \quad (6.13)$$

Подставим функции (6.13) в (6.8). В пределе $f \rightarrow \infty$ получим для интегралов, входящих в (6.8), следующие выражения:

$$d \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \left[\ln(1+q) - \frac{q}{1+q} + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^2 \right] = M^d \frac{(\ln f)^{\frac{d}{2}+1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}+2)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln f}\right) \right],$$

$$\widetilde{\Pi}_q(k^2) = d M^{d-2} \frac{(\ln f)^{\frac{d}{2}}}{f^2} R_2\left(\frac{1}{\ln f} \frac{k^2}{M^2}\right),$$

$$R_2(k^2) = \left(\frac{dp}{2\pi} \right)^d \theta(1-p^2) \theta(1-(p+k)^2), \quad R_2(0) = \frac{2\omega_d}{d}.$$

Функция $R_2(u)$ монотонно убывает и при $u \geq 4$ тождественно равна нулю. Имеем далее

$$\begin{aligned} & - \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \ln \left[1 - \frac{q^2}{m^2+k^2} \widetilde{\Pi}_q(k^2) \right] \xrightarrow{f \rightarrow \infty} \\ & \rightarrow m^d \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \left[-\ln \left(1 - \frac{\eta}{k^2+1} \right) - \sum_{s=1}^{\frac{d}{2}} \frac{\eta^s}{s(k^2+1)^s} \right] + \\ & + M^d \sum_{s=1}^{\frac{d}{2}-1} \frac{\eta^s}{s} (\ln f)^{\frac{d}{2}-s} \left(\frac{m^2}{M^2} \right)^s \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \left[\frac{1}{k^2} \frac{R_2(k^2)}{R_2(0)} \right]^s + \\ & + M^d \frac{2\omega_d}{d} \eta^{\frac{d}{2}} \ln \ln f, \end{aligned}$$

где

$$\eta = \frac{g^2}{f^2} (\ln f)^{\frac{d}{2}} \tau_2, \quad \tau_2 = d M^{d-4} \left(\frac{M^2}{m^2} \right) R_2(0).$$

Условие сходимости (6.7) :

$$0 \leq \eta \leq 1.$$

Как и в предыдущем случае, можно убедиться, что максимум функционала (6.8) осуществляется при $\eta = 1$,

откуда

$$f^2 = g^2 (\ln g^2)^{\frac{d}{2}} \tau_2 \left[1 + O\left(\frac{\ln \ln g}{\ln g} \right) \right].$$

Окончательно для $E^-(g)$ получим

$$E^-(g) = -M^d \frac{(\ln g)^{\frac{d}{2}+1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}+2\right)} \left[1 + O\left(\frac{\ln \ln g}{\ln g} \right) \right]. \quad (6.14)$$

7. Оценка сверху $E^+(g)$

Оценку сверху для плотности энергии вакуума мы сможем получить только для теорий, где пропагатор фермионного поля зависит от K^2 , т.е. имеет вид $\bar{G}(K^2)$. Дело в том, что нам надо оценить детерминант в формуле (4.II) снизу. Только при выполнении сформулированного условия детерминант оказывается строго положительным. Действительно, в этом случае матрица в (4.II) эрмитова:

$$H_g^+ = H_g,$$

и, кроме того,

$$\text{Sp } H_g^{2n+1} = 0,$$

$$\text{Sp } J_g H_g^{K_1} J_g H_g^{K_2} \dots J_g H_g^{K_s} = 0, \quad \sum_s K_s = 2n+1,$$

при любой комбинации матриц J_g и H_g , лишь бы сумма

$K_1 + \dots + K_s$ была нечетным числом. Имеем далее

$$\begin{aligned} \det(I - J_q - ig H_q) &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Sp} (J_q - ig H_q)^n \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Sp} [(J_q - ig H_q)^n + (J_q + ig H_q)^n] \right\} = \\ &= \left\{ \det(I - J_q + ig H_q) \det(I - J_q - ig H_q) \right\}^{\frac{1}{2}} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, детерминант оказывается положительным.

Для оценки снизу воспользуемся неравенством N^- :

$$\det(I - J_q - ig H_q) \geq \exp \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Sp} B_q - \frac{z(J_0)}{4} \operatorname{Sp} B_q^2 \right\}, \quad (7.1)$$

где матрица B_q определяется согласно (5.3):

$$B_q = -(2J_q - J_q^2) + ig [J_q, H_q] + g^2 H_q. \quad (7.2)$$

Функция $z(J_0)$ определена в (5.4), а число J_0 является максимальным членом диагональной матрицы J_q . Так как функция $q(k^2)$ выбирается согласно (6.9), а пропагатор ферми-поля $\bar{G}(k^2)$ является монотонно убывающей функцией, то

$$J_0 = \max_n \frac{q_n}{1+q_n} = \max_{k^2} \frac{q(k^2)}{1+q(k^2)} = \frac{q(0)}{1+q(0)} = \frac{f}{1+f}. \quad (7.3)$$

Поскольку нас интересует предел больших констант связи $g \rightarrow \infty$, то $f \rightarrow \infty$. При $f \rightarrow \infty$ для функции $z(J_0)$ в (7.1) получим согласно формулам (5.4) и (7.3)

$$z = z(J_0) = 4 \ln f. \quad (7.4)$$

Подставляя (7.2) в (7.1), имеем

$$\det(I - J_q - ig H_q) \geq \exp \left\{ W_2[\Phi] \right\}, \quad (7.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 W_q[\Phi] = & -Sp \left\{ \frac{1}{2} (2J_q - J_q^2) + \frac{z}{4} (2J_q - J_q^2)^2 \right\} + \\
 & + g^2 Sp \left\{ H_q^2 + \frac{z}{2} (2J_q - J_q^2) H_q^2 + \frac{z}{2} [(J_q H_q)^2 - J_q^2 H_q^2] \right\} - \\
 & - \frac{z}{4} g^4 Sp H_q^4. \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

Подставив полученное неравенство в (4.11), имеем

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle \geq \prod_n (1+q_n)^d \int d\sigma_\varphi \exp \{ W_q[\Phi] \}. \quad (7.7)$$

Дальнейший шаг состоит в следующем. Основной вклад в интеграл (7.7) даст область интегрирования по φ , где функционал $W_q[\Phi]$ принимает максимальное значение. Очевидно (см. (7.6)), что эти значения φ отличны от нуля. Однако найти функцию $\Phi_{\max}(x)$, на которой осуществляется максимум функционала $W_q[\Phi]$, практически невозможно. Поэтому поступим следующим образом. Учитывая определение меры $d\sigma_\varphi$ (3.10) в интеграле (7.7), произведем сдвиг по переменной интегрирования u_0 :

$$u_0 \rightarrow u_0 + \sqrt{V} m \phi_0,$$

где ϕ_0 - некоторая произвольная постоянная размерности поля ϕ . В функционале $W_q[\Phi]$ функция $\phi(x)$, которая определена согласно (3.9), изменится следующим образом:

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \phi_0,$$

поскольку $g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}$. Таким образом, интеграл (7.7) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle \geq \\
 & \geq \prod_n (1+q_n)^d \int d\sigma_\varphi \exp \left\{ -\sqrt{V} m \phi_0 u_0 - V \frac{m^2}{2} \phi_0^2 + W_q[\Phi + \phi_0] \right\}. \quad (7.8)
 \end{aligned}$$

Воопользовавшись неравенством (5.24), получим

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle \geq \exp \left\{ d \sum_n \ln(1+q_n) - V \frac{m^2}{2} \Phi_0^2 + \int d\sigma_\varphi W_\varphi[\Phi + \Phi_0] \right\}. \quad (7.9)$$

Вычисляя интеграл по $d\sigma_\varphi$, для плотности энергии вакуума получим оценку сверху:

$$E(g) \leq E^+(g).$$

Здесь

$$E^+(g) = d \min_{q>0} \min_{\Phi_0} \left\{ - \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d \left[\ln(1+q) - \frac{q}{1+q} + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} g^2 (\mathcal{Q}_1 + R_1 \Phi_0^2) + \frac{m^2}{2d} \Phi_0^2 + \frac{g}{4} \left[\int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d (2J_q - J_q^2)^2 - 2g^2 (\mathcal{Q}_2 + R_2 \Phi_0^2) + g^4 (\mathcal{Q}_3 + R_3 \Phi_0^2 + R_4 \Phi_0^4) \right] \right\}, \quad (7.10)$$

где \mathcal{Q}_j и R_j — интегралы, соответствующие диаграммам Фейнмана, показанным на рис. 1. На диаграммах приняты следующие правила соответствия:

$$\begin{array}{ll} \text{---} & G_q = \frac{\tilde{G}(k^2)}{1+q(k^2)}, & \text{---} & G_q J_q^2, \\ \text{= =} & G_q J_q, & \text{~~~~} & \tilde{D} = \frac{1}{m^2+k^2}. \end{array}$$

Так, например,

$$\mathcal{Q}_1 = \int \left(\frac{dk_1}{2\pi} \right)^d \int \left(\frac{dk_2}{2\pi} \right)^d G_q(k_1^2) G_q(k_2^2) \tilde{D}((k_1+k_2)^2),$$

$$R_1 = \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d G_q^2(k^2),$$

$$R_2 = 2 \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d G_q^2(k^2) J_q(k^2) - \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d G_q^2(k^2) J_q^2(k^2)$$

и т.д.













\mathcal{D}_1	
\mathcal{D}_2	2  $- 2$  $+ 1$ 
\mathcal{D}_3	2  $+ 1$ 
R_1	
R_2	2  $- 1$ 
R_3	4  $+ 2$ 
R_4	

Рис. 1. Диаграммы, соответствующие интегралам, которые определяют $E^+(g)$ в (7.10).

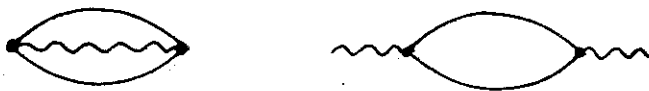


Рис. 2. Расходящиеся диаграммы в модели Y_2 .

Полученная формула (7.10) дает оценку сверху для плотности энергии вакуума при любых вещественных g . Нам же будет интересно поведение $E^+(g)$ при $g \rightarrow \infty$. Как и при оценке снизу, вычисление точного минимума по q в (7.10) связано с решением сложного интегрального уравнения. Мы поступим другим способом. Функцию $q(k^2, f)$ можно выбрать более или менее произвольно и затем вычислять минимум по параметру, как это было сделано в предыдущем разделе. Каково же дополнительное требование, накладываемое на функцию $q(k^2, f)$?

Из анализа формулы (7.10) следует, что в пределе $g \rightarrow \infty$ основной положительный вклад в (7.10) дают слагаемые, подчеркнутые волнистой линией. Они записываются в виде

$$\frac{g}{4} \left[\left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d (2J_q - J_q^2)^2 - 2g^2 \phi_0^2 \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d (2J_q - J_q^2) G_q^2 + g^4 \phi_0^4 \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d G_q^4 \right]. \quad (7.11)$$

Минимум этого выражения по ϕ_0^2 должен равняться нулю. Это возможно лишь тогда, когда в пределе $f \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$\left[\left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d (2J_q - J_q^2) G_q^2 \right]^2 = \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d (2J_q - J_q^2)^2 \cdot \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^d G_q^4. \quad (7.12)$$

Таким образом, наш выбор функции $q(k^2, f)$ будет ограничен условием (7.12).

Рассмотрим сначала теорию с пропагатором ферми-поля (2.13). В этом случае для того, чтобы удовлетворить условию (7.12), функцию $q(k^2, f)$ следует выбрать в следующем виде:

$$q(k^2, f) = \frac{\sqrt{f^2 + \left[1 + \frac{k^2}{M^2}\right]^{2\ell}} - \left[1 + \frac{k^2}{M^2}\right]^\ell}{\left[1 + \frac{k^2}{M^2}\right]^\ell}. \quad (7.13)$$

Нетрудно убедиться в том, что в силу очевидного равенства:

$$(2J_q - J_q^2) = M^2 f^2 G_q^2, \quad (7.14)$$

условие (7.12) выполняется.

Подставим теперь функцию $q(k^2, f)$ (7.13) в (7.10) и перейдем

к асимптотически большому f . В результате получим

$$E^+(g) = d M^d \min_{f, \Lambda > 0} f^\alpha \left\{ \Lambda^2 \ln f \cdot \xi^2 \bar{R}_4 - \right. \\ \left. - \Lambda \left[-\frac{M}{d} + \frac{1}{2} \xi \bar{R}_4 + \ln f \cdot (2 \xi \bar{R}_4 - f^{-\frac{1}{2}} \xi^2 \bar{R}_3) \right] - \right. \\ \left. - \left[\bar{D}_0 + \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \xi \bar{D}_1 - \ln f \cdot \bar{R}_4 + 2 f^{-\frac{1}{2}} \ln f \cdot \xi \bar{D}_2 - f^{-\frac{2}{5}} \ln f \cdot \xi^2 \bar{R}_3 \right] \right\}. \quad (7.15)$$

Здесь мы перешли к безразмерным величинам:

$$\xi = f^{\alpha-2} g^2 M^{d-4}, \quad \Lambda = f^{-\alpha} M^d \Phi_0^2, \quad \mu = \frac{m^2}{M^2},$$

и воспользовались тем, что

$$z = z(f) \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 4 \ln f.$$

Постоянные \bar{D}_j и \bar{R}_j определяются теми же диаграммами Фейнмана (см. рис. I), но с другими правилами соответствия:

$$g \rightarrow \frac{\sqrt{1+k^{4g}} - k^{2g}}{k^{2g}}, \quad J_g \rightarrow \frac{\sqrt{1+k^{4g}} - k^{2g}}{\sqrt{1+k^{4g}}}, \\ G_g \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+k^{4g}}}, \quad \tilde{D} \rightarrow \frac{1}{k^2},$$

$$\bar{D}_0 = \frac{\omega_d}{d} \left[B\left(\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right) \right] > 0.$$

Оставляя лишь главные члены при $f \rightarrow \infty$ в (7.15), находим минимум по Λ :

$$E^+(g) = d M^d \min_f f^\alpha \left[-\bar{D}_0 + \frac{M}{d} \cdot \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2} \bar{R}_4 \right]. \quad (7.16)$$

Условие минимума по f записывается в виде

$$\alpha(\bar{\mathcal{D}}_0 + \frac{1}{2} \bar{R}_4) = \frac{2M}{d} \cdot \frac{1}{3}$$

Отсюда

$$f = g^{\frac{2}{2-\alpha}} \left[M^{d-4} \frac{\alpha d}{2\mu} (\bar{\mathcal{D}}_0 + \frac{1}{2} \bar{R}_4) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} \quad (7.17)$$

Подставляя (7.17) в (7.16), окончательно получаем

$$E^+(g) = -M^d K_+ g^{\frac{2}{2-\alpha}},$$

$$K_+ = d \left(M^{d-4} \frac{\alpha d}{2\mu} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \left[\bar{\mathcal{D}}_0 + \frac{1}{2} \bar{R}_4 \right]^{\frac{2}{2-\alpha}} \quad (7.18)$$

Видно, что степень роста $E^+(g)$ по g^2 совпадает со степенью роста $E(g)$ (см. (6.12)).

Рассмотрим теперь случай, когда ферми-пропагатор имеет вид (2.14). Функцию $q(k^2, f)$ выбираем в виде

$$q(k^2, f) = f \exp\left\{-\frac{k^2}{M^2}\right\}. \quad (7.19)$$

Нетрудно убедиться, что при $f \rightarrow \infty$

$$\int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d J_q^n = \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d J_q \quad (\forall n \geq 1), \quad (7.20)$$

$$\int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d J_q^n G_q^m = \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d G_q^m. \quad (7.21)$$

Следовательно, условие (7.12) выполняется. Когда $g \rightarrow \infty$, параметр $f \rightarrow \infty$ и формула (7.10) может быть представлена в виде

$$E^+(g) = \frac{dM^d}{(4\pi)^{d/2}} \min \left\{ -\frac{(\ln f)^{\frac{d}{2}+1}}{\Gamma(\frac{d}{2}+2)} + \frac{M}{2d} \frac{f^2}{G^2} - \left(\frac{M}{2d}\right)^2 \frac{1}{4} \Gamma(\frac{d}{2}+1) \frac{f^4}{G^4 (\ln f)^{\frac{d}{2}+1}} + O((\ln f)^{\frac{d}{2}}) \right\}, \quad (7.22)$$

где

$$G^2 = \frac{g^2 M^{d-4}}{(4\pi)^{d/2}}.$$

Условие минимума имеет вид

$$-\frac{(\ln f)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} + \frac{M}{d} \frac{f^2}{G^2} - \left(\frac{M}{2d}\right)^2 \frac{f^4 \Gamma(\frac{d}{2}+1)}{G^4 (\ln f)^{\frac{d}{2}+1}} = 0,$$

откуда

$$f^2 = G^2 (\ln G^2)^{\frac{d}{2}} \cdot \frac{2M}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left[1 + O\left(\frac{\ln \ln G^2}{\ln G^2}\right) \right]. \quad (7.23)$$

Подставляя полученное решение в (7.22), окончательно найдем

$$E^+(g) = -M^d \frac{(\ln g^2)^{\frac{d}{2}+1}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2}+2)} \left[1 + O\left(\frac{\ln \ln g^2}{\ln g^2}\right) \right]. \quad (7.24)$$

Сравнение верхней (7.24) и нижней (6.14) оценок показывает, что в пределе асимптотически больших g плотность энергии вакуума ведет себя как

$$E(g) = -M^d \frac{(\ln g^2)^{\frac{d}{2}+1}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2}+2)} \left[1 + O\left(\frac{\ln \ln g^2}{\ln g^2}\right) \right]. \quad (7.25)$$

8. Поведение амплитуд бозон-бозонного неупругого рассеяния при $g \rightarrow \infty$

Предложенный выше метод минимизации, позволивший найти асимптотику плотности энергии, применим к нахождению асимптотик амплитуд и функций Грина. Действительно, рассмотрим функциональный интеграл

$$I_V(x_1, \dots, x_n) = \int d\sigma_\varphi \int d\sigma_\psi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{ig(\bar{a} H a)} \quad (8.1)$$

При $V \rightarrow \infty$

$$I_V(x_1, \dots, x_n) = T_V(x_1, \dots, x_n) e^{-VE(g)}, \quad (8.2)$$

где, по определению, $T_V(x_1, \dots, x_n)$ — n -точечная функция Грина бозона.

В интеграле (8.1) введем функцию g , так же, как и в случае (4.6) и (4.9):

$$I_V(x_1, \dots, x_n) = \prod_m (1+g_m)^d \int d\sigma_\varphi \int d\sigma_\psi \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \exp \left\{ (\bar{a} J_g a) + i g (\bar{a} H_g a) \right\}. \quad (8.3)$$

Преобразование (8.1) в (8.3) является тождественным. Метод минимизации, по своей сути, означает взятие интеграла (8.1) методом перевала. При этом функция $E(g)$ определяется выбором экстремальной функции $g(k^2)$.

Наше предположение состоит в том, что при достаточно больших константах связи g в интеграле (8.3) следует выбрать функцию $g(k^2)$ в ее экстремальной форме и пренебречь членом $(\bar{a} J_g a)$. Заметим, что на сегодняшний день это предположение мы не можем строго математически обосновать.

Ограничимся рассмотрением взаимодействия (2.1) в пространстве \mathbb{R}^4 с пропагатором ферми-поля (2.14). Сформулированное выше предположение означает, что в ряду теории возмущений причинная функция Грина модифицируется:

$$\tilde{G}(k^2) \rightarrow \tilde{G}_g(k^2) = \frac{\tilde{G}(k^2)}{1+g(k^2)} = \frac{1}{M} \left[f(g) + e^{\frac{k^2}{M^2}} \right]^{-1}. \quad (8.4)$$

Здесь при достаточно больших g параметр f зависит от g следующим образом:

$$f = 2\mu G^2 \ln G^2, \quad (8.5)$$

где $G^2 = \frac{g^2}{16\pi^2}$, $M = \frac{m^2}{M^2}$, что было получено в предыдущих разделах.

Прежде всего рассмотрим полную функцию Грина бозона:

$$\tilde{D}(k^2) = \frac{1}{m^2 + k^2 + \Pi(k^2)}, \quad (8.6)$$

где $\Pi(k^2)$ — массовый оператор бозона, представляющий собой сумму по всем сильносвязным собственно-энергетическим диаграммам:

$$\Pi(k^2) = \sum_{n=1}^{\infty} g^{2n} \Pi_n(k^2, g). \quad (8.7)$$

Согласно оценкам, приведенным в приложении, имеем при $g \rightarrow \infty$

$$\Pi_n(k^2, g) = \frac{(\ln f)^{n+1}}{f^{2n}} \cdot \overline{\Pi}_n(k^2), \quad (8.8)$$

где $\overline{\Pi}_n$ представляет собой сумму тех же диаграмм, но с модифицированными пропагаторами:

$$\tilde{G}_q(k^2) \rightarrow \frac{1}{M} \Theta(M^2 - k^2), \quad \tilde{D}(k^2) \rightarrow \frac{1}{k^2}. \quad (8.9)$$

Используя соотношение (8.8), имеем

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8\pi^2}{M} \right)^n \frac{1}{(\ln g^2)^{n-1}} \overline{\Pi}_{2n}(k^2) = \\ &= \frac{8\pi^2}{M} \overline{\Pi}_2(k^2) + O\left(\frac{1}{\ln g^2}\right). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Таким образом, мы видим, что в пределе $g \rightarrow \infty$ выживает только второй порядок модифицированной теории возмущений.

Рассмотрим теперь амплитуду рассеяния $2 \rightarrow N$:

$$T_{2 \rightarrow N} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{n_0+2n} T_n(g), \quad (8.11)$$

где $n_0 = N+2$ - низший порядок теории возмущений, в котором возможен данный процесс. Исследуем амплитуду (8.11) при $g \rightarrow \infty$. При этом будем считать, что внешние бозонные импульсы равны нулю. Величина $T_n(g)$ представляет собой сумму всех связанных диаграмм Фейнмана в (n_0+2n) порядке теории возмущений. Кроме того, вместо свободной функции Грина бозона будем использовать полную функцию Грина (8.6). Условно запишем

$$T_n(g) = \sum_{j_n} T_n^{(j_n)}(g), \quad (8.12)$$

где сумма проводится по всем связным диаграммам, кроме диаграмм с приводимыми вставками в бозонный пропагатор. Согласно вычислениям,

проведенным в приложении, имеем при $g \rightarrow \infty$

$$T_n^{(j_n)}(g) = f^{-n_0 - 2n} (\ln f)^{2+n+K_\varphi} \overline{T}_n^{(j_n)} \quad (8.13)$$

Здесь K_φ - число бозонных линий в диаграммах, при разрезании которых диаграмма становится несвязной. Амплитуда $\overline{T}_n^{(j_n)}$ соответствует той же диаграмме, что и $T_n^{(j_n)}$, только с измененными пропагаторами фермиона и бозона согласно (8.9). Подставляя (8.8) в (8.6) и используя (8.5), получим

$$T_{2 \rightarrow N} = \frac{1}{(\ln g)^N} \left(\frac{8\pi^2}{\mu} \right)^{\frac{N+2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8\pi^2}{\mu} \right)^n \sum_{j_n} (\ln g)^{K_\varphi - n} \overline{T}_n^{(j_n)} \quad (8.14)$$

Максимальное значение числа K_φ для процесса $2 \rightarrow N$ в $(n_0 + 2n)$ порядке теории возмущений равно

$$K_\varphi = \begin{cases} N-1, & n \geq N-1, \\ n, & n \leq N-1. \end{cases}$$

Из полученных формул следует, что вклад в амплитуду $T_{2 \rightarrow N}$ при $g \rightarrow \infty$ дают только диаграммы с максимальным числом K_φ :

$$T_{2 \rightarrow N} = \frac{\text{const}}{(\ln g)^N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{8\pi^2}{\mu} \right)^n \sum_{j_n: K_\varphi = n} \overline{T}_n^{(j_n)} \quad (8.15)$$

Такие диаграммы называются древесными.

Итак, мы получили интересный результат: в пределе сильной связи $g \rightarrow \infty$ "выживает" только графика-деревья. Это подтверждает основу известного феноменологического подхода в киральной теории. В этой теории в качестве одного из главных предположений принимается гипотеза о том, что именно диаграммы-деревья дают основной вклад в амплитуду сильных физических процессов.

9. Энергия вакуума в суперперенормируемой модели Y_2 при $g \rightarrow \infty$

Воспользуемся развитыми методами для получения асимптотического поведения при $g \rightarrow \infty$ плотности энергии вакуума в локальной двумерной модели Якави Y_2 . Лагранжиан взаимодействия для этой модели

$$\mathcal{L}_I(x) = ig(\bar{\Psi}(x)\gamma_5\Psi(x))\varphi(x). \quad (9.1)$$

Пропагаторы полей имеют вид

$$\tilde{S}(i\hat{k}) = \frac{1}{M-i\hat{k}}, \quad \tilde{D}(k^2) = \frac{1}{m^2+k^2}. \quad (9.2)$$

Матрицы γ_m и γ_5 выбираются согласно (2.4).

В этой модели имеются лишь две расходящиеся диаграммы, показанные на рис. 2. Для устранения расходимостей достаточно добавить к лагранжиану взаимодействия два контрчлена:

$$\mathcal{L}'(x) = -\frac{1}{2}\delta m^2\varphi^2(x) + \delta E, \quad (9.3)$$

где

$$\delta m^2 = g^2\tilde{\Pi}(0), \quad \delta E = \frac{1}{2}\int\left(\frac{dk}{2\pi}\right)^2\frac{\tilde{\Pi}_2(k^2)}{m^2+k^2}.$$

Здесь введены функции

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(k^2) &= 2\int\left(\frac{dp}{2\pi}\right)^2\frac{M^2+p(p+k)}{(M^2+p^2)(M^2+(p+k)^2)}, \\ \tilde{\Pi}_2(k^2) &= \tilde{\Pi}(0) - \tilde{\Pi}(k^2) = 2\int\left(\frac{dp}{2\pi}\right)^2\left[\frac{1}{M^2+p^2} - \frac{M^2+p(p+k)}{(M^2+p^2)(M^2+(p+k)^2)}\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k^2}{k^2+4M^2}}\ln\frac{\sqrt{k^2+4M^2}+\sqrt{k^2}}{\sqrt{k^2+4M^2}-\sqrt{k^2}} \xrightarrow{k^2\rightarrow\infty} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{k^2}{M^2}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Будем считать, что в интегралы, определяющие контрчлены (9.3), введена какая-либо регуляризация. Явный вид этого обрезания для нас не является существенным.

Как оказалось, в рассматриваемой модели γ_2 оценка снизу получается без введения минимизирующей функции $g(k^2)$. Для вакуумного ожидания S -матрицы имеем согласно (4.2) и (4.II)

$$\langle 0|S_V(g)|0\rangle = \int d\sigma_\varphi \int d\sigma_\psi \exp\left\{ig\int dx\bar{\Psi}(x)\gamma_5\Psi(x)\varphi(x) - \frac{1}{2}\delta m^2\int dx\varphi^2(x) + V\delta E\right\} =$$

$$= \int d\sigma_\varphi \det(I - igH) \exp\left\{-\frac{1}{2} \delta m^2 \int_V dx \phi^2(x) + V \delta E\right\}, \quad (9.5)$$

где для рассматриваемого взаимодействия

$$H = \int_V dx \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \phi(x). \quad (9.6)$$

Воспользуемся неравенством N^+ ; после простых преобразований получим

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle \leq \int d\sigma_\varphi \exp\left\{-\frac{g^2}{2} \iint_V dx_1 dx_2 \phi(x_1) \Pi_1(x_1 - x_2) \phi(x_2) + V \delta E\right\}, \quad (9.7)$$

где с учетом определений (9.3) и (9.4)

$$\begin{aligned} \Pi_1(x) &= \int \left(\frac{dp}{2\pi}\right)^2 \tilde{\Pi}_1(p^2) e^{-ipx}, \\ \tilde{\Pi}_1(p^2) &= 2 \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{M^2 + k^2} - \frac{1}{\sqrt{(M^2 + k^2)(M^2 + (k+p)^2)} } \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \ln \left[1 + \alpha(1-\alpha) \frac{p^2}{M^2} \right] \xrightarrow{p^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{p^2}{M^2}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Интеграл по бозонному полю является гауссовым и легко вычисляется. Окончательно получим для плотности энергии вакуума

$$\begin{aligned} E(g) &\geq E^-(g), \\ E^-(g) &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^2 \left[\frac{g^2}{m^2 + k^2} \tilde{\Pi}_2(k^2) - \ln \left(1 + \frac{g^2}{m^2 + k^2} \tilde{\Pi}_1(k^2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Зная асимптотическое поведение функций $\tilde{\Pi}_2(k^2)$ и $\tilde{\Pi}_1(k^2)$ при $k^2 \rightarrow \infty$ (формулы (9.4) и (9.8)), легко вычислить поведение плотности энергии вакуума $E^-(g)$ при $g \rightarrow \infty$. После простых вычислений получим

$$E^-(g) = -\frac{(g \ln g)^2}{8\pi^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln g^2}\right) \right). \quad (9.10)$$

Для того чтобы показать, что получившаяся асимптотика энергии вакуума при $g \rightarrow \infty$ представляет собой истинное поведение $E(g)$, найдем оценки сверху и снизу для теории с пропагатором фермиона, не зависящим γ -матриц:

$$\tilde{G}(k^2) = \frac{1}{\sqrt{M^2 + k^2}}. \quad (9.11)$$

В этом случае теория является также суперперенормируемой и содержит те же расходящиеся диаграммы (см. рис. 2).

Перенормированным массовым оператором бозона в данном случае будет функция $\widetilde{\Pi}_1(k^2)$ в (9.8), которая и войдет в соответствующие контрчлены. Оценка снизу для плотности энергии вакуума проводится аналогично проделанным выше выкладкам и определяется формулой (9.9), где вместо функции $\widetilde{\Pi}_2(k^2)$ следует подставить массовый оператор $\widetilde{\Pi}_1(k^2)$. Поскольку асимптотическое поведение этих функций при $k^2 \rightarrow \infty$ одинаково, то при $g \rightarrow \infty$ поведение оценки снизу $E^-(g)$ совпадает с (9.10).

Для получения оценки сверху воспользуемся неравенством (5.10). Тогда для вакуумной S -матрицы (9.5) получим

$$\langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle \geq \int d\phi_g \exp \{ W_V[\Phi] \}. \quad (9.12)$$

Здесь

$$W_V[\Phi] = - \frac{g^2}{2} \iint_V dx_1 dx_2 \Phi(x_1) \widetilde{\Pi}_1(x_1 - x_2) \Phi(x_2) - \\ - \frac{g^4}{4} \iint_V dx_1 \dots dx_4 R(x_1, \dots, x_4) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_4) + V \delta E, \quad (9.13)$$

где

$$R(x_1, \dots, x_4) = 2 G(x_1 - x_2) G(x_2 - x_3) G(x_3 - x_4) G(x_4 - x_1).$$

Для дальнейшей оценки интеграла (9.12) используем минимизационную процедуру по бозонным полям (см. /14/). Учитывая определение меры $d\phi_g$ по (3.10), проделаем следующие тождественные преобразования:

$$\int d\phi_g \exp \{ W_V[\Phi] \} = \\ = \left(\prod_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_n}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_n (1+g_n) \mu_n^2 + \frac{1}{2} \sum_n g_n \mu_n^2 + W_V[\Phi] \right\} = \\ = \prod_n (1+g_n)^{-\frac{1}{2}} \int d\phi_g \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_n \frac{g_n}{1+g_n} \mu_n^2 + W_V[\Phi_g] \right\}, \quad (9.14)$$

где

$$\Phi_g(x) = \sum_n \frac{\Delta_n(x)}{1+g_n} \mu_n.$$

Числа q_n удовлетворяют перечисленным выше условиям. Воспользовавшись далее неравенством (5.24), имеем

$$\begin{aligned} & \langle 0 | S_V(g) | 0 \rangle \geq \\ & \geq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_n \left(\ln(1+q_n) - \frac{q_n}{1+q_n} \right) + \int d\sigma_\varphi W_V[\Phi_q] \right\}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Интегрирование по бозе-полям в (9.15) легко выполняется, и окончательно получаем после простых преобразований

$$\begin{aligned} E(g) & \leq E^+(g), \\ E^+(g) & = \min_{q \geq 0} \left\{ \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^2 \left[\ln(1+q(k^2)) - \frac{q(k^2)}{1+q(k^2)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{g^2}{2} \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^2 \frac{\tilde{\Pi}_1(k^2)}{m^2+k^2} \frac{q(k^2)}{1+q(k^2)} + \frac{g^4}{4} \int \left(\frac{dp_1}{2\pi} \right)^2 \int \left(\frac{dp_2}{2\pi} \right)^2 \frac{\tilde{R}(p_1, p_2)}{(m^2+p_1^2)(1+q(p_1^2))(m^2+p_2^2)(1+q(p_2^2))} \right\} \\ \tilde{R}(p_1, p_2) & = 2 \int \left(\frac{dk}{2\pi} \right)^2 \frac{2\sqrt{M^2+(k+p_1+p_2)^2} + \sqrt{M^2+k^2}}{(M^2+k^2)\sqrt{(M^2+(k+p_1)^2)(M^2+(k+p_2)^2)(M^2+(k+p_1+p_2)^2)}}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Выберем функцию $q(k^2)$ в форме

$$q(k^2) = f(g) \frac{M^4}{k^4}. \quad (9.17)$$

Подставляя (9.17) в (9.16) и вычисляя интегралы при $f \rightarrow \infty$, получим

$$E^+(g) = \frac{M^2}{8\pi} \min_{f > 0} \left\{ \pi \sqrt{f} - \frac{g^2 \ln^2 \sqrt{f}}{4\pi M^2} + \text{const} \left(\frac{g^2}{4\pi M^2} \right)^2 \frac{\ln \sqrt{f}}{\sqrt{f}} \right\}. \quad (9.18)$$

Условие минимума по $S = \sqrt{f}$ записывается как

$$\pi - \frac{g^2}{2\pi M^2} \frac{\ln S}{S} + \text{const} \left(\frac{g^2}{4\pi M^2} \frac{\ln S}{S} \right)^2 \frac{1}{\ln S} = 0. \quad (9.19)$$

При $g \rightarrow \infty$ имеем

$$S = \sqrt{f} = \frac{g^2 \ln g^2}{2\pi^2 M^2} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln g^2}{\ln g^2} \right) \right). \quad (9.20)$$

Подставляя решение (9.20) в (9.18), получим окончательно

$$E^+(g) = - \frac{(g \ln g)^2}{8\pi^2} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln g^2}{\ln g^2}\right) \right). \quad (9.21)$$

Таким образом, нижняя оценка (5.21) совпадает с верхней (9.10) и при $g \rightarrow \infty$

$$E(g) = - \frac{(g \ln g)^2}{8\pi^2} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln g^2}{\ln g^2}\right) \right). \quad (9.22)$$

Приложение

Рассмотрим асимптотику при $f \rightarrow \infty$ произвольной связанной диаграммы Фейнмана, описывающей бозон-бозонные взаимодействия в n порядке теории возмущений с пропагатором фермиона (7.4). Будем считать, что все внешние импульсы бозонов равны нулю.

Пусть

- L_ψ - число внутренних ферми-линий,
- L_ϕ - число внутренних бозе-линий,
- N_ϕ - число внешних бозе-линий.

Между этими величинами существуют соотношения

$$n = L_\psi, \quad n = 2L_\phi + N_\phi. \quad (П.1)$$

Пусть, далее,

$$L_\psi = K_\phi + l_\psi, \quad (П.2)$$

где K_ϕ - число внутренних бозе-линий, при разрезании одной из которых диаграмма становится несвязной.

Рассматриваемая диаграмма определяется интегралом

$$T_n = \int \prod_{j=1}^N \left(\frac{dk_j}{2\pi} \right)^d \prod_{i=1}^{L_\psi} \frac{\tilde{G}(p_i)}{1 + g(p_i^2)} \prod_{k=1}^{L_\phi} \tilde{D}(s_k^2). \quad (П.3)$$

Здесь N - число независимых интегрирований, причем

$$N = L_\psi - L_\phi - n + 1 = \frac{n}{2} - \frac{N_\phi}{2} + 1.$$

Импульсы p_i и S_i являются линейными комбинациями импульсов интегрирования K_i . Произведем следующие преобразования:

$$T_n = \prod_{i=1}^{L\varphi} \int_0^{\infty} \frac{d\tau_i}{e^{\tau_i} + 1} \prod_{j=1}^N \left(\frac{dk_j}{2\pi} \right)^d \prod_{z=1}^{L\varphi} \frac{1}{M} \delta\left(\tau_z - \frac{p_z^2}{M^2}\right) \prod_{K=1}^{L\varphi} \tilde{D}(S_K^2) \frac{1}{m^{2K\varphi}}.$$

Пологая $\tau_i = \ln f - v_i$, получим

$$T_n = \frac{1}{f^{L\varphi}} \prod_{i=1}^{L\varphi} \int_{-\infty}^{\ln f} \frac{dv_i}{1 + e^{-v_i}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{dk_j}{2\pi} \right)^d \prod_{z=1}^{L\varphi} \frac{1}{M} \delta\left(\ln f - v_z - \frac{p_z^2}{M^2}\right) \prod_{K=1}^{L\varphi} \frac{\tilde{D}(S_K^2)}{m^{2K\varphi}}.$$

Ясно, что в пределе $f \rightarrow \infty$ основной вклад в интеграл дает область положительных v_i . Имеем

$$\begin{aligned} T_n &\approx \frac{1}{f^{L\varphi}} \prod_{i=1}^{L\varphi} \int_0^{\ln f} dv_i \prod_{j=1}^N \left(\frac{dk_j}{2\pi} \right)^d \prod_{z=1}^{L\varphi} \frac{1}{M} \delta\left(\ln f - v_z - \frac{p_z^2}{M^2}\right) \prod_{K=1}^{L\varphi} \frac{\tilde{D}(S_K^2)}{m^{2K\varphi}} \\ &= \frac{1}{f^n} (\ln f)^{\left(\frac{n-N\varphi}{2}\right)\left(\frac{d}{2}-1\right) + \frac{d}{2} + K\varphi} \overline{T}_n, \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

где

$$\overline{T}_n = \prod_{i=1}^N \left(\frac{dk_i}{2\pi} \right)^d \prod_{j=1}^{L\varphi} \frac{1}{M} \Theta(M^2 - p_j^2) \prod_{K=1}^{L\varphi} \frac{1}{S_K^2} \frac{1}{m^{2K\varphi}}. \quad (\text{II.5})$$

Таким образом, в пределе $f \rightarrow \infty$ пропагатор ферми-поля заменяется на

$$\tilde{G}(k^2) = \frac{1}{M} e^{-\frac{K^2}{M^2}} \rightarrow \frac{1}{M} \Theta(M^2 - K^2), \quad (\text{II.6})$$

а бозе-поля

$$\tilde{D}(k^2) = \frac{1}{m^2 + K^2} \rightarrow \frac{1}{K^2}. \quad (\text{II.7})$$

Литература:

1. Caianiello E.R. Nuovo Cimento, 1954, II, p.493; 1956, 3, p.223.
2. Yennie D.R., Cartenhaus S. Nuovo Cimento, 1958, 9, p.59.
3. Buccafurri A., Caianiello E.R. Nuovo Cimento, 1958, 8, p.170.
4. Simon B. Nuovo Cimento, 1959, 59A, p. 199.
5. Арфаева И.Я. ТМФ, 1973, 14, с.3; ТМФ, 1973, 15, с. 207.
6. Басуев А.Г. ТМФ, 1975, 22, с. 203.
7. Frank W. Ann. of Phys., 1964, 30, p. 328.
8. Glimm J., Jaffe A. Quantum field theory models. Les Houches Lectures 1970 C. de Witt and Stora R. eds. Gordon and Breach, 1970, New York.
9. Schrader R. Ann of Phys., 1972, 70, p. 412.
10. Seiler E., Simon B. Commun. Math. Phys., 1975, 45, p. 99.
11. Dubnickova A.Z., Efimov G.V., Ivanov M.A. Fort der Phys., 1979, 27, p. 403.
12. Szwinger J. Phys. Rev., 1959, 115, p. 721.
13. Osterwalder K., Schrader R. Helvetica Physica Acta, 1973, 46, p. 277.
14. Efimov G.V. Commun. Math. Phys., 1977, 57, p. 235; 1979, 65, p. 15.
15. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. "Наука", М., 1964.
16. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. "Наука", М., 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 ноября 1981 года.