объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-701

К.В.Рерих

ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ И СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

Направлено в ТМФ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование является продолжением работы[1], в которой был развит новый подход к проблеме построения общего решения уравнений Чу-Лоу[2], использующий аппарат теории преобразований Кремона /см. также[3]/. В рамках этого подхода было получено общее функциональное трехпараметрическое уравнение на инвариантные формы двух переменных, отношение которых в подходящих степенях дает общий интеграл системы уравнений Чу-Лоу - четную антипериодическую функцию $C(w)$, локальная зависимость от которой общего решения этих уравнений была установлена в[5], на основе другого подхода[4]. Там же, в[1] были указаны структура 2-го общего интеграла и функциональное уравнение, решением которого он является. Таким образом, первым этапом построения общего решения уравнения Чу-Лоу в нашем подходе является нахождение явного вида двух общих интегралов.

Решение соответствующих функциональных уравнений, определяющих эти общие интегралы как функции двух переменных, является весьма трудной задачей. Поэтому представляет интерес получить первые несколько коэффициентных функций, входящих в разложения общих интегралов в ряды по одной переменной/пропорциональной в первом приближении $C(w)$/, а также найти несколько первых членов разложения общего решения в ряд по степеням $C(w)$. Полученные, включая кубичное по $C(w)$, приближения к общему решению /разделы 2 и 3/ могут послужить основой для эвристических соображений о замкнутом виде общего решения, а также для анализа экспериментальных данных по p-волнам πN -рассеяния. Основанием для этого может быть предложенный в разделе 4 механизм получения борновского полюса в общем решении. Показано, что уже в первом приближении по $C(w)$ можно добиться правильного поведения в борновском полюсе, если потребовать, чтобы $C(w) \underset{w \to 0}{\sim} 1/3w^2$ и нужным образом фиксировать имеющийся произвол в высших поправках так, чтобы они не давали вклада в борновский полюс.

2. КВАДРАТИЧНОЕ И КУБИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ $x(w)$ И $y(w)$

Как известно[6], переход к нелинейной краевой задаче на матричные элементы S -матрицы и введение униформизующей переменной $w = \pi^{-1} \arcsin \omega$, где ω - энергия пиона в лабораторной системе, позволяет свести проблему нахождения всех решений интегральных уравнений Чу-Лоу к решению следующей системы нелинейных разностных уравнений вида [6,7]:

$$S_i(w)S_i(1-w)=1,$$

$$S_i(w+1)=1/\sum_j A_{ij}S_j(w) \qquad /1/$$

в классе мероморфных действительных функций комплексного переменного w /мы не выписываем здесь условий порогового поведения и поведения в борновском полюсе/. Здесь $S_i(w)$ - матричные элементы S-матрицы в состояниях i, A_{ij} - элементы матрицы кроссинг-симметрии

$$A_{ij}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -8 & 16\\ -2 & 7 & 4\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}. \qquad /2/$$

Мы будем использовать систему уравнений /1/ в более удобной для нас форме, предложенной в [4]:

$$x'=F(x,y),\qquad F(x,y)=\frac{x+2x^2-xy-2y^2}{1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2}$$

$$y'=-F(y,x),\qquad x(-w)=-x(w),\quad y(-w)=y(w), \qquad /3/$$

$$x'=x(w+1),\quad y'=y(w+1).$$

$$t'\,t(w)=(1-2y'-x')(1-2y+x),$$

$$t(-w)=t(w),\quad t'=t\,(w+1). \qquad /4/$$

Связь $S_i(w)$ в /1/ с функциями $x(w)$, $y(w)$ и $t(w)$ из /3/, /4/ дается формулой

$$S_i(w)=(\xi_i+\eta_i y(w)+\lambda_i x(w))/t(w), \qquad /5/$$

где ξ, η, λ - собственные векторы матрицы A из /2/:

$$A(\xi,\eta)=(\xi,\eta),\qquad A\lambda=-\lambda,$$

$$\xi=(1,1,1),\quad \eta=(4,-2,1),\quad \lambda=(-4,-1,2). \qquad /6/$$

В работе [1] нами были получены структуры двух общих интегралов системы /3/ /см. /37/ и /39/ из [1]/:

$$\Phi_1(y,x^2)=\frac{f_{110}(y,x^2)\; f^4_{201}(y,x^2)}{f^2_{202}(y,x^2)\, f_{510}(y,x^2)}=C(w), \qquad /7/$$

$$\Phi_2(y,x^2)=\frac{x}{1+\phi(y,x^2)}=1/(w+\beta(w)), \qquad /8/$$

где $C(-w)=C(w)$, $C(w+1)=-C(w)$, а $\beta(w)$ - известная произвольная функция $\beta(-w)=-\beta(w)$, $\beta(w+1)=\beta(w)$. Входящие в /7/ и /8/ инвариантные формы $f_{\mu_1\mu_2\mu_3}(y,x^2)$ и функция $\phi(y,x^2)$ являются решениями функциональных уравнений:

$$f_{\mu_1\mu_2\mu_3}(y',x'^2)=f_{\mu_1\mu_2\mu_3}(y,x^2)\,\pi_{\mu_1\mu_2\mu_3}(y,x), \qquad /9/$$

$$\phi(y',x'^2)=\frac{x'}{x}(1+x+\phi(y,x^2))-1\,. \qquad /10/$$

Функция $\pi_{\mu_1\mu_2\mu_3}(y,x)$ имеет вид /см. /30/ из /1//

$$\pi_{\mu_1\mu_2\mu_3}(y,x)=\epsilon\, j_1^{\mu_1}(x,y,1)\, j_2^{\mu_2}(x,y,1)\, j_3^{\mu_3}(x,y,1)[\phi_3(x,y,1)]^{-\mu_1-\mu_2-\mu_3} \qquad /11/$$

где $\epsilon=-1$ для $f_{110}(y,x^2)$ и $\epsilon=1$ для остальных наборов $\mu_1\mu_2\mu_3$, а функции $j_i(x,y,1)$ и $\phi_3(x,y,1)$ равны:

$$j_1=1+4x+4y,\quad j_2=1-2x+y,\quad j_3=1+x-2y \qquad /12/$$

$$\phi_3=1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2\,.$$

Для дальнейшего более удобным является переход от переменной y в /7-12/ к u при неизменном x:

$u=y-x^2=f_{110}(y,x^2)$.

Уравнения /3/ для u и x примут вид:

$$u'=-\frac{u[1+4(1+2x)^{-2}u][1+(1-x)^{-2}u]}{(1+x)^4[1+(3-3x-4x^2)p(x)u-2u^2p(x)]^2}$$

$$/13/$$

$$x'=\frac{x(1+x)^{-1}-x(1+4x)p(x)u-2u^2p(x)}{1+(3-3x-4x^2)p(x)u-2u^2p(x)}\,,$$

где $p(x)=[(1-x)(1+x)^2(1+2x)]^{-1}$.

Будем решать уравнения /9/, /10/ в переменных u и x, разлагая входящие в них функции /а также u' и x', заданные /13// в ряд по степеням u:

$$f_{\mu_1\mu_2\mu_3}(u,x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)u^k, \qquad /14.1/$$

$$\phi(u,x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{(k)}(x)u^k. \qquad /14.2/$$

В результате для коэффициентных функций $f^{(k)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)$ и $\phi^{(k)}(x)$ получим, используя /9-14/, рекуррентные системы функциональных уравнений вида

$$f^{(k)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}\left(\frac{x}{1+x}\right)-(-1)^k f^{(k)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)\,\pi_\mu(x^2,x)(1+4x)^{4k} = R_1(x,f^{(0)}_\mu(x),\dots,f^{(k-1)}_\mu(x)), \qquad /15/$$

$$\phi^{(k)}\left(\frac{x}{1+x}\right)-(-1)^k(1+x)^{4k-1}\phi^{(k)}(x) = R_2(x,\phi^{(1)}(x),\dots,\phi^{(k-1)}(x)), \qquad /16/$$

где $\pi_\mu(x^2,x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^{\mu_1-\mu_2}(1+x)^{-2(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}$,
а правые части этих уравнений R_1 и R_2 зависят от ранее определенных коэффициентных функций $f^{(0)}_\mu(x),\dots,f^{(k-1)}_\mu(x)$, $\phi^{(0)}(x),\dots,$ $\phi^{(k-1)}(x)$ и их производных. Введением переменной $z=x^{-1}$ и переопределением функций $f(z^{-1})\to F(z)$ этим уравнениям можно придать вид линейных разностных уравнений. Метод решения таких уравнений известен, - это разложение на элементарные дроби. Решения уравнений /15/ для трех наборов $(\mu_1\mu_2\mu_3)$ и $k=0,1,2$, а также уравнений /16/ для $k=1,2,3$ приведены в Приложении /см. П.1 - П.4/. Входящие в /П.1-П.3/ функции $\phi(1/x)$ и $\bar{\psi}(1/x)$ есть решения разностных уравнений

$$\phi(z+1)+\phi(z) = \frac{1}{z(z+1)}, \quad \phi(-z) = \phi(z) \qquad /17.1/$$

$$\psi(z+1)-\psi(z) = \frac{1}{z^2(z+1)^2}, \quad \bar{\psi}(-z) = -\bar{\psi}(z), \qquad /17.2/$$

которые выражаются через известные[8] G- и ψ-функции Эйлера:

$$\phi(z) = G(z) - \frac{1}{z} - \frac{\pi}{\sin\pi z}, \quad G(z) = \psi\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)-\psi\left(\frac{z}{2}\right), \qquad /18.1/$$

$$\bar{\psi}(z) = \frac{2}{z} - 2\frac{d}{dz}\left(\psi(z)+\frac{1}{2z}+\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi z\right), \quad \psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z). \qquad /18.2/$$

Легко получить, используя известные[8] разложения для G- и ψ-функций, представления в виде рядов $\phi(z)$ и $\bar{\psi}(z)$:

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{z-n}\right), \qquad /19.1/$$

$$\bar{\psi}(z) = \frac{2}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z+n)^2} - \frac{1}{(z-n)^2}\right). \qquad /19.2/$$

Функция $b(\frac{1}{x})$ из /П.4/ есть решение разностного уравнения

$$b(z+1) + b(z) = -\frac{2}{z^2(z+1)^2}\phi(z) + \frac{1}{z^3(z+1)^3}, \qquad /20/$$

$$b(-z) = -b(z),$$

которое не выражается простым образом через известные функции. Нетрудно получить для нее следующее представление в виде ряда

$$b(z) = \frac{1}{z^3} + 4\frac{\phi(z)}{z} + (2\phi(0)+3)\frac{d\phi}{dz} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} r_n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right), \qquad /21/$$

где

$$r_n = 2(\zeta(2,n) - \zeta(2)) - \frac{1}{n^2}, \quad \phi(0) = -2\ln 2, \ \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

$\zeta(2,n)$ - обобщенная дзета-функция Римана /8/.
Подставляя разложения /14.1/ в /7/ и учитывая /П.1-П.3/, можно получить коэффициентные функции $\chi^{(k)}(x)$ в разложении $u = u(x,C)$:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \chi^{(k)}(x) C^k. \qquad /22/$$

Для $k = 1,2,3$ они задаются следующими выражениями:

$$\chi^{(1)}(x) = x^4, \quad \chi^{(2)}(x) = -\frac{x^6(1+20x^2-9x^4)}{(1-x^2)^2} + \frac{2}{3}x^4\phi\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\chi^{(3)}(x) = \frac{x^8(-7+119x^2+1169x^4-939x^6+234x^8)}{18(1-x^2)^4} - \frac{4}{9}\frac{x^6(1+20x^2-9x^4)}{(1-x^2)^2}\phi\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+\frac{4}{9}x^4\phi^2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4}{3}\frac{x^9}{(1-x^2)}\frac{d}{dx}\phi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}x^6\frac{d}{dx}\bar{\psi}\left(\frac{1}{x}\right). \qquad /23/$$

Разрешая уравнения /8/ и /22/ относительно u и x как функций $w+\beta(w)$ и $C(w)$ /ниже мы ради простоты опустим $\beta(w)$/ и учитывая /14.2/, /П.4/, /23/ и соотношение $y = u + x^2$, получим коэффициенты разложения общего решения уравнений /3/ в ряд по степеням $C(w)$:

$$y(w)=\sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(w)\,C^{k}(w),$$

$$x(w)=\sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(w)\,C^{k}(w). \qquad /24/$$

Функции $x^{(k)}(w)$ и $y^{(k)}(w)$ для $k=0\div 3$ приведены ниже:

$$x^{(0)}(w)=\frac{1}{w},\qquad y^{(0)}(w)=\frac{1}{w^{2}}, \qquad /25/$$

$$x^{(1)}(w)=\frac{2}{w^{3}(w^{2}-1)},\qquad y^{(1)}(w)=\frac{w^{2}+3}{w^{4}(w^{2}-1)}, \qquad /26/$$

$$x^{(2)}(w)=\frac{w^{4}-3w^{2}+12}{3w^{5}(w^{2}-1)^{2}}+\frac{4}{3w^{3}(w^{2}-1)}\phi(w)+\frac{1}{w^{2}}\bar{\psi}(w), \qquad /27/$$

$$y^{(2)}(w)=\frac{w^{4}-2w^{2}+21}{3w^{6}(w^{2}-1)^{2}}+\frac{2}{3}\,\frac{w^{2}+3}{w^{4}(w^{2}-1)}\phi(w)+\frac{2}{w^{3}}\bar{\psi}(w),$$

$$x^{(3)}(w)=\frac{288-174w^{2}+79w^{4}+12w^{6}-5w^{8}}{36w^{7}(w^{2}-1)^{3}}+\frac{4}{9}\,\frac{w^{4}-3w^{2}+12}{w^{5}(w^{2}-1)^{2}}\phi(w)+ \qquad /28/$$

$$+\frac{8}{9w^{3}(w^{2}-1)}\phi^{2}(w)-\frac{5}{36w^{2}}\,\frac{d\phi(w)}{dw}-\frac{2(3-5w^{2})}{w^{4}(w^{2}-1)^{2}}\bar{\psi}(w)+\frac{1}{w^{3}(w^{2}-1)}\,\frac{d\bar{\psi}}{dw}+\frac{2}{3}\,\frac{b(w)}{w^{2}},$$

$$y^{(3)}(w)=\frac{270-141w^{2}+47w^{4}+29w^{6}-5w^{8}}{18w^{8}(w^{2}-1)^{3}}+\frac{4(w^{4}-2w^{2}+21)}{9w^{6}(w^{2}-1)^{2}}\phi(w)+\frac{4(w^{2}+3)}{9w^{4}(w^{2}-1)}\phi^{2}(w)$$

$$-\frac{5}{18w^{3}}\,\frac{d\phi}{dw}+\frac{4(w^{4}+4w^{2}-3)}{w^{5}(w^{2}-1)^{2}}\bar{\psi}(w)+\frac{w^{2}+3}{2w^{4}(w^{2}-1)}\,\frac{d\bar{\psi}}{dw}+\frac{4}{3}\,\frac{b(w)}{w^{3}}.$$

Функции $x^{(0)}(w)$ и $y^{(0)}(w)$ соответствуют известному /6,9/ частному решению уравнений /1/, а $x^{(1)}(w)$ и $y^{(1)}(w)$ получены ранее другим образом в /10/.

3. КВАДРАТИЧНОЕ И КУБИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ $t(w)$

Решение уравнения /4/ неоднозначно и мультипликативно зависит от известной /6/ $D(w)$-функции. Будем искать его решение аналогично /24/ в виде ряда по степеням $C(w)$:

$$t(w)=\sum_{k=0}^{\infty} t^{(k)}(w)\,C^{k}(w). \qquad /29/$$

Подставляя разложения /24/, /29/ в /4/ и учитывая /25-28/, получим линейное разностное уравнение на $t^{(k)}(w)$ с неоднородностью, зависящей от $x^{(\ell)}(w)$, $y^{(\ell)}(w)$, где $\ell=0,\dots,k$, и $t^{(m)}(w)$ с $m=0,\dots,k-1$, найденными предварительно. Решая это уравнение для $k=0\div 3$, получим

$$t^{(0)}(w)=\frac{(w^2-1)^2}{w^4}, \qquad /30/$$

$$t^{(1)}(w)=-\frac{4}{w^6}, \qquad /31/$$

$$t^{(2)}(w)=-\frac{66-25w^2+54w^4-47w^6+16w^8}{6w^8(w^2-1)}-\frac{8(1-2w^2+4w^4-2w^6)}{3\;w^6}\phi(w)-$$

$$-\frac{4(w^2-1)}{w^5}\bar{\psi}(w)+\frac{(w^2-1)^2}{2w^4}\phi''(w), \qquad /32/$$

$$t^{(3)}(w)=-\frac{2(936-841w^2+901w^4-335w^6-21w^8)}{9w^{10}(w^2-1)^2}+\frac{5}{36}\frac{(w^2-1)^2}{w^8}-$$

$$-\frac{2(66-105w^2+102w^4+w^6)}{9\;w^8(w^2-1)}\phi(w)-\frac{16}{9w^6}\phi^2(w)+\frac{5(w^2-1)}{9\;w^5}\frac{d\phi}{dw}-\frac{2}{w^6}\phi''(w) \qquad /33/$$

$$-\frac{24}{w^7}\bar{\psi}(w)-\frac{72+5w^2(w^2-1)^2}{36w^6}\bar{\psi}'(w)-\frac{8(w^2-1)}{3\;w^5}b(w)+\frac{4(w^2-1)^2}{3\;w^4}d(w),$$

где функции $\phi(w)$, $\psi(w)$ и $b(w)$ уже описаны ранее в /18-21/, а новая функция $d(w)$ есть решение следующего разностного уравнения:

$$d(w+1)-d(w)=-\frac{(3+w+w^2)}{3w^3(w+1)^3}\left[\phi(w)-\frac{1}{2w(w+1)}\right]. \qquad /34/$$

Используя свойства $\phi(w)$ и разлагая правую часть на элементарные дроби, можно получить решение /34/ в виде ряда

$$d(w)=-\frac{1}{2w^4}+\frac{8}{3}\phi^2(w)-\frac{8}{3w^2}\phi(w)+\frac{\phi(0)}{w^2}+\left(\frac{1}{2}\phi(0)+\frac{11}{12}\right)\bar{\psi}'(w)-$$

$$-\phi''(0)\left[\psi(w)+\frac{1}{2w}+\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi w\right]+ \qquad /35/$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}d_n\left(\frac{1}{w+n}-\frac{1}{w-n}-\frac{2}{n}\right),$$

где
$$d_n = \frac{1}{n^3} - \frac{3}{2}(-1)^n \zeta(3) - 2\Phi(-1,3;n),$$
$\psi(w)$ - пси-функция Эйлера, а $\Phi(z,s,v)$ - спец. функция /см.[8] /.

4. МЕХАНИЗМ ПОЛУЧЕНИЯ БОРНОВСКОГО ПОЛЮСА В ОБЩЕМ РЕШЕНИИ. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подставляя разложения /24/, /29/ в /5/ с учетом /6/, получим представление общего решения уравнений /1/ для матричных элементов S-матрицы в виде отношения двух рядов по $C(w)$
$$S_i(w) = \frac{\xi_i + \eta_i y^{(0)}(w) + \lambda_i x^{(0)}(w) + \sum_{k=1}^{\infty}(\eta_i y^{(k)}(w) + \lambda_i x^{(k)}(w))C^{(k)}(w)}{t^{(0)}(w) + \sum_{k=1}^{\infty} t^{(k)}(w) C^{k}(w)} \cdot \qquad /36/$$
В соответствии с известным $\beta(w)$ и $D(w)$-произволом в выражении /36/ всегда можно сделать следующую замену $S_i(w) \to S_i(w+\beta(w)) \cdot D(w)$.

Обрывая суммирование в /36/ при $k=n$ и вводя $\beta(w)$ и $D(w)$, получим n-приближение к общему решению $S_i^{(n)}(w)$
$$S_i^{(n)}(w) = D(w) \frac{\xi_i + \eta_i y^{(0)}(w^*) + \lambda_i x^{(0)}(w^*) + \sum_{k=1}^{n}(\eta_i y^{(k)}(w^*) + \lambda_i x^{(k)}(w^*))C^{k}(w)}{t^{(0)}(w^*) + \sum_{k=1}^{n} t^{(k)}(w^*) C^{k}(w)}, \qquad /37/$$
где $w^* = w + \beta(w)$, что при $n=0$ дает известное[6,9] решение, которое, как отмечалось в [7], не дает физически нужного ($\mathrm{Res}\, S_i(0) \sim \lambda_i$) поведения в борновском полюсе. В[11] был сделан вывод, а в [5] детально обоснован, что общее решение уравнений /1/, зависящее от трех произвольных функций, может обеспечить требуемое борновское поведение. Сложность полученных выражений /27/, /28/, /32/, /33/, входящих в /36/, и следующая из этого трудность получения замкнутого выражения для общего решения инициируют поиски механизма получения борновского полюса, начиная с какого-нибудь приближения по $C(w)$. В[10] в отличие от нашего определения n-приближения /37/, были получены выражения для $S_i(w)$ в первом приближении по $C(w)$, совпадающие с первыми двумя членами разложения в ряд по $C(w)$ $S_i^{(1)}(w)$ из /37/. Это привело автора[10] к выводу, что в линейном приближении по $C(w)$ невозможно получить правильное борновское поведение.

Ниже будет показано, что при нашем определении n-приближения это возможно уже при $n=1$, а учет следующих членов по $C(w)$ в /37/ при $n>1$ не дает вклада в борновское поведение. Действительно, выбирая $C(w)$ и $D(w)$ ($\beta(w) \underset{w\to 0}{\sim} O(w^3)$) в виде

$$C(w) = \sin^2 \pi w \, C_1(w), \qquad C_1(0) = \frac{1}{3\pi^2}$$

$$D(w) = \frac{D_1(w)}{\mathrm{tg}^4 \frac{\pi}{2} w}, \qquad D_1(0) \neq 0 \qquad /38/$$

и подставляя /25/, /26/, /30/, /32/ в /37/ при $n=1$, получим, что $S_i^{(1)}(w)$ будет иметь при $w=0$ полюс 1-го порядка с вычетом $\mathrm{Res}\, S_i^{(1)}(0) = -\lambda_i D_1(0)(\frac{\pi}{2})^{-4}$. Поскольку функции $\phi(w)$, $\bar{\psi}(w)$, $b(w)$ и $d(w)$, а также производные ϕ и $\bar{\psi}$ в /27/, /28/ и /32/, /33/ возникли как результат частного выбора решений /19.1/, /19.2/, /21/ и /35/ разностных уравнений /18.1/, /18.2/, /20/ и /34/, то всегда их можно выбрать по-иному, добавив к ним соответствующие периодические функции с нужными свойствами и поведением в нуле таким, чтобы $x^{(k)}(w)$, $y^{(k)}(w)$ и $t^{(k)}(w)$ при $w \to 0$ вели себя как

$$x^{(k)}_{w\to 0}(w) \sim w^{-(2k-1)}, \quad y^{(k)}_{w\to 0}(w) \sim w^{-2k}, \quad t^{(k)}_{w\to 0}(w) \sim w^{-2k-2}$$

при $k=2,3$. Можно показать, что это возможно и при любом $k>3$. Легко увидеть, учитывая /38/, что в /36/ члены с $k \geq 2$ не дадут вклада в $\mathrm{Res}\, S_i(0)$. Для достижения этого при $k=2,3$ следующие замены нужно произвести в /27/, /28/, /32/, /33/:

$$\phi(w) \to \phi(w) + \frac{3}{2}\alpha_1(w), \qquad \bar{\psi}(w) \to \bar{\psi}(w) - 2\gamma_1(w),$$

$$b(w) \to b(w) + 3\bar{\psi}(w)\alpha_1(w) - 15\gamma_2(w), \qquad \phi''(w) \to \phi''(w) + \alpha_2(w), \qquad /39/$$

$$d(w) \to d(w) + \frac{3}{4}\phi''(w)\alpha_1(w) - \frac{4}{w^2}\alpha_1(w) + 8\phi(w)\alpha_1(w) - \frac{279}{2}\alpha_3(w),$$

где $\alpha_i(-w) = \alpha_i(w)$, $\gamma_i(-w) = -\gamma_i(w)$, α_1, α_2, γ_2 - антипериодические, γ_1, α_3 - периодические функции и

$$\alpha_i(w) \underset{w\to 0}{\approx} \frac{1}{w^{2i}} + o(w^{-2i+2}), \qquad \gamma_i(w) \underset{w\to 0}{\approx} \frac{1}{w^{2i+1}} + o(w^{-2i+1}).$$

Нетрудно, комбинируя $\sin \pi w$ и $\cos \pi w$, выбрать $\alpha_i(w)$ и $\gamma_i(w)$, удовлетворяющие указанным условиям. Однако эту детализацию, равно как и выбор трех произвольных функций $\beta(w)$, $D(w)$ и $C(w)$ целесообразно провести при анализе экспериментальных данных по p-волнам πN-рассеяния на основе выражения /37/ при $n \leq 3$. Хотя сходимость рядов в /36/ пока не исследована, малость константы $C_1(0)$ в /38/ позволяет ожидать, что выражение /37/ для $S_i^{(n)}(w)$ при $n \leq 3$ будет неплохим приближением при низких энергиях.

Следует заметить, что введение конкретных $\alpha_i(w)$ и $\gamma_i(w)$ согласно /39/ не увеличивает функционального произвола, связанного с зависимостью общего решения уравнений Чу-Лоу от трех произвольных функций $\beta(w)$, $D(w)$ и $C(w)$. Действительно, как легко убедиться, их введение эквивалентно следующему переопределению $\beta(w)$, $D(w)$ и $C(w)$:

$$\beta(w) \to \beta(w) + 2\gamma_1(w)C^2(w) + 10\gamma_2(w)C^3(w) + \ldots$$

$$D(w) \to D(w)\frac{1 - \frac{1}{4}(16\alpha_1(w) + \alpha_2(w))C^2(w) + 93\alpha_3 C^3(w) + \ldots}{1 + \frac{1}{4}(16\alpha_1(w) + \alpha_2(w))C^2(w) - 93\alpha_3 C^3(w)} \qquad /40/$$

$$C(w) \to C(w) + \alpha_1(w)C^2(w) + \alpha_1^2(w)C^3(w) + \ldots$$

Когда настоящая работа была закончена, появилась работа /12/, где независимо получены квадратичные по $C(w)$ поправки в общем решении уравнений /1/, согласующиеся с нашими результатами /27/, /32/.

В заключение автор выражает благодарность В.А.Мещерякову, В.Герджикову и В.П.Гердту за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$f_{201}^{(0)} = (1-x^2)^2, \qquad f_{201}^{(1)} = \frac{(1-x^2)(5-3x^2)}{3x^2} - \frac{10}{3}\frac{(1-x^2)^2}{x^4}\phi\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f_{201}^{(2)} = \frac{5}{3}\frac{(1+2x^2)}{x^4} - \frac{20}{3}\frac{(1+2x^2-x^4)}{x^6}\phi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{20}{3}\frac{(1-x^2)^2}{x^8}\phi^2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{20}{3}\frac{(1-x^2)}{x^3}\frac{d}{dx}\phi\left(\frac{1}{x}\right) \qquad /П.1/$$

$$f_{202}^{(0)} = x^2(1-x^2)^2, \qquad f_{202}^{(1)} = \frac{2}{3}(1-x^2)(2-3x^2) - \frac{8}{3}\frac{(1-x^2)^2}{x^2}\phi\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f_{202}^{(2)} = \frac{1}{9}\frac{10+6x^2+9x^4}{x^2} - \frac{8}{9}\frac{(5+10x^2-3x^4)}{x^4}\phi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{40}{9}\frac{(1-x^2)^2}{x^6}\phi^2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{16}{3}\frac{(1-x^2)}{x}\frac{d}{dx}\phi\left(\frac{1}{x}\right) \qquad /П.2/$$

$$f^{(0)}_{510}=(1-x^2)^4,\quad f^{(1)}_{510}=\frac{(1-x^2)^2}{3x^2}(11-32x^2+9x^4)-\frac{22}{3}\frac{(1-x^2)^4}{x^4}\phi\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f^{(2)}_{510}=\frac{41-163x^2+259x^4-65x^6+24x^8}{6x^4}-\frac{88}{3}\frac{(1-x^2)^3}{x^6}\phi\left(\frac{1}{x}\right)+$$

$$+\frac{88}{3}\frac{(1-x^2)^4}{x^8}\phi^2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{44}{3}\frac{(1-x^2)^3}{x^3}\frac{d}{dx}\phi\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^4}{x^6}\frac{d}{dx}\bar{\psi}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad /П.3/$$

$$\phi^{(1)}=\frac{2}{1-x^2},\quad \phi^{(2)}=\frac{1}{3}\frac{(1-x^2+6x^4)}{x^4(1-x^2)^2}+\frac{\bar{\psi}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^7},$$

$$\phi^{(3)}=\frac{105-62x^2+77x^4}{36(1-x^2)^3x^4}-\frac{5}{36}\frac{(1-x^2)}{x^8}+\frac{5}{36x^9}\frac{d}{dx}\phi\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{(1-x^2)x^6}\frac{d}{dx}\bar{\psi}\left(\frac{1}{x}\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\frac{(1+20x^2-9x^4)}{(1-x^2)^2x^9}\bar{\psi}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{4}{3}\frac{\bar{\psi}\left(\frac{1}{x}\right)\phi\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{11}}+\frac{2}{3x^{11}}b\left(\frac{1}{x}\right). \qquad /П.4/$$

Свойства и представление в виде рядов функций $\phi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\bar{\psi}\left(\frac{1}{x}\right)$ и $b\left(\frac{1}{x}\right)$ из /П.1-П.4/ см. в тексте /17-21/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-80-728, Дубна, 1980.
2. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, 101, No.5, p.1570.
3. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-80-718, Дубна, 1980.
4. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971; Р2-7047, Дубна, 1973.
5. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, 24, вып.2, с.155.
6. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-2369, Дубна, 1965.
7. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. Ann.of Phys., 1970, 59, No.2, p.408; ТМФ, 1970, 3, вып.1, с.78.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1973, т.1.
9. Rothelutner T. Z.phys., 1964, 177, No.3, p.287.
10. Гердт В.П. ТМФ, 1981, 48, №3, с.346.
11. Рерих К.В. Автореферат диссертации. ОИЯИ, 2-5451, Дубна, 1970.
12. Гердт В.П., Жарков А.Ю. ОИЯИ, Р2-81-435, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 ноября 1981 года.