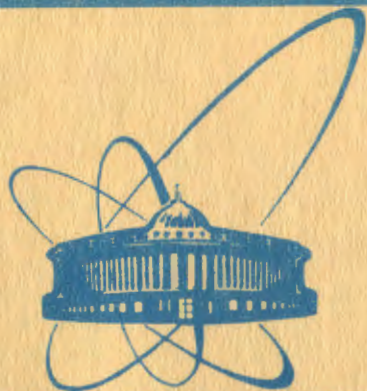


3-968



сообщения
Объединенного
Института
Ядерных
Исследований
Дубна

6381/2-81

28/11-81

P2-81-633

Зыонг Ван Фи, Нгуен Монг Зао

ПОПРАВКА К ФУНКЦИИ ГРИНА ФЕРМИОНА

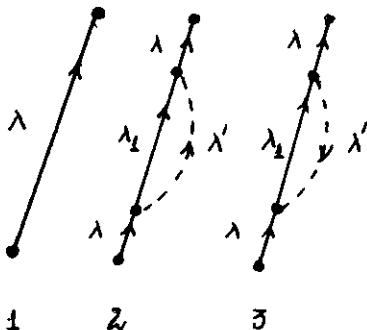
1981

В работе /1/ был рассмотрен подход к теории взаимодействия полей в объединенном 8-пространстве. При этом сформирована S-матрица и показано, что элементы этой матрицы в любом приближении конечны /2,3/.

В данной работе рассматривается поправка четвертого порядка теории возмущения к функции Грина фермиона. При этом применяется лагранжиан взаимодействия, который получается при использовании локального калибровочного преобразования и компенсирующего поля в объединенном пространстве /6/. Такой лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L}_I(\xi) = g \sum_{j=1}^8 \bar{\psi}(\xi) \Gamma^j \psi(\xi) B_j(\xi), \quad /1/$$

где ξ - восьмимерный вектор координат, $\xi = (x, X)$, $x = (\vec{x}, t)$, $X = (\vec{X}, T)$; $\psi(\xi)$ - 16-компонентный спинор - является полем групп фермионов (ν_e, e, P, n) , $(\nu_\mu, \mu, N_1^+, N_1^0)$ и т.д.; $B(\xi)$ - векторное поле - поле фотонов и пионов /8/; g - константа связи, имеющая размерность L^2 . Лагранжиан /1/ дает возможность вычислить ряд эффектов электромагнитного взаимодействия /2,4/, причем константа электромагнитного взаимодействия e выводится из g путем преобразования начальных и конечных состояний объединенного пространства в соответствующие состояния пространства Минковского и затем усреднения внутренних импульсов на поверхностях масс наблюдаемых частиц /2,4/.



Рассмотрим теперь выражения, соответствующие диаграммам 2 и 3 /рисунок/ четвертого порядка теории возмущения. В данном приближении согласно формулировке теории с ориентацией во времени фейнмановских диаграмм можно показать, что для такого типа собственной энергии фермиона имеются всего 24 различные диаграммы и приведенные две диаграммы являются единственными, которые дают ненулевые матричные элементы.

Имеем для пропагатора фермионного поля /2/

$$S^c(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{\mathfrak{D}} d\lambda e^{-i\lambda\xi} \frac{\hat{\lambda}}{\lambda^2 + i\epsilon} \theta(\pm p_0), \quad /2/$$

где $\lambda = (\mathbf{p}, P)$ - восьмимерный вектор импульса; $p = (\vec{p}, p_0)$ - 4-вектор энергии-импульса; $P = (\vec{P}, P_0)$ - евклидовый 4-вектор внутреннего энергии-импульса; $\hat{\lambda} = \sum_{j=1}^4 \Gamma^j \lambda_j$; знаки \mathfrak{D} и \mathfrak{D} обозначают контуры интегрирования, замыкающиеся соответственно в верхней /при $t > 0$ / и нижней /при $t < 0$ / полуплоскостях комплексной плоскости внутренней энергии.

Для векторного поля в объединенном пространстве имеем пропагатор /5/

$$D_{jk}^c = \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{\mathfrak{D}} d\lambda e^{-i\lambda\xi} \frac{H_{jk}}{\lambda^2 + i\epsilon} \theta(\pm p_0). \quad /3/$$

Здесь

$$H_{jk} = \begin{cases} g_{jk} + \frac{\partial^j \partial^k}{P^2} & \text{при } P^2 \neq 0, \\ g_{ik} & \text{при } P^2 = 0, \end{cases}$$

где g_{jk} - метрика объединенного пространства.

На рисунке внутренняя линия фермиона 1, соответствующая пропагатору /2/, представляет собой гриновскую функцию в первом приближении. Обозначим ее через $S^c(\Lambda)$. Функция Грина $G(\Lambda)$ во втором приближении тогда принимает следующий вид:

$$G^c(\Lambda) = S^c(\Lambda) + S^c(\Lambda) \Sigma(\Lambda) S^c(\Lambda). \quad /4/$$

При этом $S^c(\Lambda) \Sigma(\Lambda) S^c(\Lambda)$ - сумма выражений, соответствующих двум диаграммам, 2 и 3. Оператор $\Sigma(\Lambda)$ имеет вид

$$\Sigma(\Lambda) = g^2 (2\pi)^{-8} (I_1 + I_2) = g^2 (2\pi)^{-8} I, \quad /5/$$

где

$$I_{1,2} = ig_{\mu\nu} (2\pi)^{-8} \int_{\mathfrak{D}} \frac{d\lambda_1 \Gamma_\mu \hat{\lambda}_1 \Gamma_\nu \theta(p_{10}) \theta(p_0 - p_{10})}{(\lambda_1^2 + i\epsilon) [(\lambda_1 - \lambda)^2 + i\epsilon]}. \quad /6/$$

Выражение /5/ является функцией от λ . Здесь имеем виртуальный фермион, обладающий таким 8-импульсом, который определяется законом сохранения энергий-импульсов и, следовательно, 8-импульсами частиц в начальном /или конечном/ состоянии. Такие

частицы свободны и согласно /1/ их 8-импульсы $\lambda_{(i)}$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют соотношениям $\lambda_{(i)}^2 = p_{(i)}^2 - P_{(i)}^2 = 0$; $p_{(i)}^2 = m_{(i)}^2 = P_{(i)}^2$, где $m_{(i)}$ — масса покоя частицы i . Следовательно, /5/ будет инвариантно не относительно группы преобразований в объединенном пространстве $O(7,1)$, а относительно лоренц-преобразований и преобразований во внутреннем пространстве отдельно. Выполним интегрирование по P_{10} , имеем

$$I = - \frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^7} \int_{\Omega} dV \frac{\Gamma_{\mu} \hat{\lambda} \Gamma_{\nu}}{P_{10} (\lambda_1 - \lambda)^2}. \quad /7/$$

При этом $P_{10} = \sqrt{p_1^2 - \vec{P}_1^2}$, и элемент объема dV принимает вид $dV = p_{10}^6 dp_{10} \sin^6 \theta_5 \sin^5 \theta_4 \sin^4 \theta_3 \sin^3 \theta_2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\theta_5 d\theta_6$. Область интегрирования Ω определяется соотношением

$$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi; \quad 0 \leq \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6 \leq \pi; \quad p_{10} \leq p_0.$$

Ограничимся рассмотрением случая $\lambda^2 > 0$. В результате получим из /7/ для функции $G^c(\lambda)$ в /4/

$$G^c(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2} \left[1 + g^2 (2\pi)^{-8} J + \frac{ig^2 S^2}{9920\pi} \left(\frac{4s^2}{S^2} - \frac{8s^2}{S} + 1 \right) \right], \quad /8/$$

где $s = p^2$; $S = P^2$ и J принимает вид

$$J = 6\pi^4 \left\{ \frac{1}{2} s^{3/2} \left(\frac{s^2}{15S^{3/2}} - \frac{s}{2S^{1/2}} + \frac{s^{1/2}}{6} + D \right) \right\}. \quad /9/$$

Функция D имеет вид

$$D = \frac{(s-S)^5}{256s^3} \int \frac{-s-S dx}{s-S} \ln \frac{|\sqrt{S}(s-S) + (\sqrt{s} - \sqrt{S})x|}{|\sqrt{S}(s-S) - (\sqrt{s} + \sqrt{S})x|} -$$

$$- \frac{1}{16} \ln \frac{s-S}{S} \left\{ (s-S)^4 \frac{5\sqrt{S}}{s^{5/2}} - (s-S)^3 \left(\frac{\sqrt{s}}{2S^{3/2}} - \frac{5S^{3/2}}{s^{5/2}} \right) + (s-S)^2 \times \right.$$

$$\times \left[\frac{5S^{3/2}}{3s^{5/2}}(s+3S) - \frac{\sqrt{s}(3s+S)}{2S^{3/2}} \right] + (s-S) \left[\frac{5S^{5/2}}{2s^{5/2}}(s+S) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}(s+S) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{s}{S} \right) \right] + \frac{S^{5/2}}{10s^{5/2}}(s^2 + 10sS + 5S^2) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{s}}{5\sqrt{s}} (5s^2 + 10sS + S^2) \left(1 - \frac{s}{2S}\right) \left\{ + \frac{(s-S)^3}{16} \left(\frac{5\sqrt{s}}{16s^{3/2}} - \frac{\sqrt{s}}{64S^{3/2}} \right) + \right. \\
& + \frac{(s-S)}{8} \left(\frac{5S^{3/2}}{s^{3/2}} + \frac{3s^{2/2}}{4S^{3/2}} \right) + \frac{s-S}{32} \left[\frac{5S^{3/2}}{2s^{3/2}} (s+3S) + \frac{5S}{s^{3/2}} + \right. \\
& + \frac{5\sqrt{s}}{6s^{3/2}} (s^2 + 3S^2) + \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{s}} \left(1 - \frac{3s}{2S}\right) \left(\frac{19s}{4} + 3S \right) + \\
& + \frac{1}{8} \left(\frac{7s^{7/2}}{12S^{3/2}} - \frac{11s^{5/2}}{12\sqrt{s}} \right) - \frac{\sqrt{s} s^{3/2}}{2} + \frac{5S^{3/2} \sqrt{s}}{30} + \\
& \left. \left. + \frac{S^{5/2}}{2\sqrt{s}} + \frac{S^{7/2}}{s^{3/2}} \right] - D_1(\sqrt{s}) + D_1(-\sqrt{s}). \right.
\end{aligned}$$

/10/

При этом $D_1(-\sqrt{s})$ получается из $D_1(\sqrt{s})$ в результате замены $\sqrt{s} \rightarrow -\sqrt{s}$, а $D_1(\sqrt{s})$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
D_1(\sqrt{s}) &= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{s} - \sqrt{S}}{\sqrt{s}} \left\{ (s-S)^4 \frac{5(\sqrt{s} - \sqrt{S})}{64s^{5/2}} + \frac{(s+S)^3}{32} \times \right. \\
& \times \left[\frac{5}{2s^{5/2}} (\sqrt{s} - \sqrt{S})(s + \sqrt{s} \sqrt{S} + 2S) - \frac{s - \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{S}}{2}\right)^2}{s^2} \right] + \\
& + \frac{(s-S)^2}{8} \left[\frac{5}{12s^{5/2}} (\sqrt{s} - \sqrt{S})(s^2 + \sqrt{s} s^{3/2} + 4sS + 3S^{3/2} \sqrt{s} + 3S^2) + \right. \\
& + \frac{\sqrt{s}}{s^2} (s^{3/2} - \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{S}}{2}\right)^3) \left. \right] + \frac{s-S}{8} \left[\frac{5}{32s^{5/2}} (\sqrt{s} - \sqrt{S})(s + \sqrt{s} \sqrt{S} + 2S) \times \right. \\
& \times \left(s^2 + 3sS + 2\sqrt{s} s^{3/2} + 2S^2 \right) + \frac{s^2 - \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{S}}{2}\right)^4}{s} \left(1 - \frac{3s}{2S}\right) \left. \right] +
\end{aligned}$$

/11/

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{32s^{5/2}} (\sqrt{s}-\sqrt{S})(s^4 + \sqrt{S}s^{7/2} + 6Ss^3 + 6S^{3/2}s^{5/2} + 16S^2s^2 + \\
& + 15S^{5/2}s^{3/2} + 20S^3s + 10S^{7/2}\sqrt{s} + 5S^4) - \\
& - \frac{\sqrt{s}}{5S} \left[s^{5/2} - \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{S}}{2} \right)^5 \right] \left(1 - \frac{s}{2S} \right) \}.
\end{aligned}$$

В /10/ остается интеграл, который, как известно, нельзя выразить через элементарную функцию. В таблице представлен результат вычисления этого интеграла при различных значениях s.

Таблица

Y	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	3	4
Z	9,32	8,76	8,45	8,35	8,29	8,27	8,28	8,29	8,32	8,66	8,92
Y	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
Z	9,09	9,21	9,30	9,37	9,43	9,47	9,53	9,58	9,62	9,64	9,67

$Y = \sqrt{\frac{s}{S}}$; Z - значение интеграла.

При больших энергиях Z оказывается почти постоянным и принимает значения $9,67 \leq Z \leq 9,99$ в соответствии со значениями Y: $20 \leq Y \leq 10^6$. Мнимая часть в /10/ возникает вследствие того, что контуры интегрирования оказываются "зажатыми" между полюсами в плоскостях комплексной P_{10} . К этому вопросу мы еще вернемся в дальнейшем при рассмотрении условия унитарности.

Попытаемся теперь применить полученное выражение для функции Грина в конкретном эффекте. Легко видеть, что такая функция входит в диаграмму четвертого порядка эффекта Комптона, причем в начальном состоянии фигурируют две входящие свободные линии /фотона и электрона/. В низшем приближении такой эффект был вычислен в работе /4/, где с помощью сравнения результата данного формализма с формулой, получаемой в обычной квантовой электродинамике, выводится соотношение между константой g и константой e электромагнитного взаимодействия: $8g^2 m^4 = e^2$, m - масса электрона. С другой стороны, в эффекте Комптона $P = P_e + P_{(\gamma)}$.

а $P_{(y)} = 0$, следовательно, s равняется квадрату массы электрона: $S = P_{(e)}^2 = m^2$. Таким образом, в рассматриваемом конкретном эффекте все величины, входящие в /10/, определены.

Оценим вклад поправки. Рассмотрим сначала случай малых энергий рассеяния. В таком случае в /8/ выражение J принимает вид

$$J = -\frac{3}{4} \left[-\frac{35}{12} m^4 \left(\frac{\sqrt{s-m}}{m} \right)^2 \ln \frac{\sqrt{s-m}}{m} - s^{3/2} \left(\frac{s^2}{15m^3} - \frac{s}{m} + \frac{m}{6} \right) - \frac{1}{2m} J_1 \right], \quad /12/$$

где

$$J_1 = (\sqrt{s-m})^5 \int_{s-m^2}^{-s-m^2} \frac{dx}{x} \ln \frac{|(\sqrt{s-m})[m(\sqrt{s-m}) + 2m^2 x]|}{|(\sqrt{s+m})[m(\sqrt{s-m}) - 2m^2 x]|}. \quad /13/$$

Если $\sqrt{s} = m + \delta$, а $\delta \ll m$, то величина $\ln |(\sqrt{s-m})[m(\sqrt{s-m}) + 2m^2 x]|$ имеет максимальное значение $2 \ln(\sqrt{s-m})$ на верхней границе интеграла, в то время как $\ln |(\sqrt{s-m})[m(\sqrt{s-m}) - x]|$ принимает максимальное значение при $x = s - m^2$. Отсюда получим

$$J \leq 3m^5 \frac{\sqrt{s-m}}{m} \left[\left(\frac{\sqrt{s-m}}{m} \right)^2 \ln \frac{\sqrt{s-m}}{m} \right].$$

Следовательно, в рассматриваемом пределе J_1 в /12/ можно пренебречь, и тогда вся реальная часть поправки оказывается малой по сравнению с мнимой, которая при $\sqrt{s} \approx m$ принимает значение порядка 10^{-6} .

Вклад реальной части поправки при увеличении \sqrt{s} увеличивается быстрее, чем вклад мнимой части, и становится главным при высоких энергиях. В таком случае при помощи таблицы можно показать, что часть интеграла в /10/ оказывается малой. Следует заметить, что для поправки к эффекту Комптона, особенно при высоких энергиях, необходимо рассматривать кроме диаграмм типа собственной энергии и другие.

Рассмотрим теперь условие унитарности для диаграмм 2 и 3 на рисунке. Подынтегральные выражения в /6/ имеют четыре полюса:

$$P_{10} = \pm (p_1^2 - \vec{P}_1^2)^{1/2} \pm i0.,$$

$$P_{10} = P_0 \pm [(p_1 - p)^2 - (\vec{P}_1 - \vec{P})^2]^{1/2} \pm i0.$$

Так как $\lambda^2 > 0$, полюс $P_0 - [(p_1 - p)^2 - (\vec{P}_1 - \vec{P})^2]^{1/2} - i0$ при значении $\lambda^2 = 2(p_{10} p_0 - P_{10} P_0)$, $p_0 \geq p_{10}$, находится под полюсом $(p_1^2 - \vec{P}_1^2)^{1/2} \pm i0$, следовательно, в этом случае контуры интегрирования оказываются

"зажатыми" между ними. Вводим обозначение $\delta G(\lambda^2)$:

$$G^c(\lambda) = S^c(\lambda)[1 + \delta G(\lambda^2)]. \quad /14/$$

Из /6/ и /7/ можно показать, что при $\lambda^2 \leq 0$ $\delta G(\lambda^2) = 0$, и отсюда получается соотношение $\delta(\lambda^2 + i0) = \delta G^*(\lambda^2 - i0)$ или соотношение между скачком и мнимой частью $\delta G(\lambda^2) \cdot \Delta \delta G(\lambda^2) = 2i \text{Im} \delta G(\lambda^2)$. Используя последнее соотношение, можем написать для рассматриваемых диаграмм /с добавлением в начальном и конечном состояниях внешних линий свободных фотона и электрона/

$$2i \text{Im} M_{fi} = \frac{g^4 (2m)^2}{(2\pi)^{22}} Q_b(\lambda'_\alpha, \lambda'_\beta) \frac{\hat{\lambda}}{\lambda^2} 6i \int d\lambda_1 d\hat{\lambda}_1 \times \quad /15/$$

$$\times \theta(p_{10}) \theta(p_0 - p_{10}) \theta(p_0) \delta(\lambda_1^2) \delta((\lambda_1 - \lambda)^2) \frac{\hat{\lambda}}{\lambda^2} Q_a(\lambda_\alpha, \lambda_\beta).$$

При этом $Q_a(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)$, $Q_b(\lambda'_\alpha, \lambda'_\beta)$ - начальное и конечное состояния; M_{fi} определяется следующим образом:

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^8 M_{fi} \delta(\lambda_\alpha + \lambda_\beta - \lambda'_\alpha - \lambda'_\beta). \quad /16/$$

Рассмотрим условие унитарности $S^+ S = 1$, которое дает

$$2 \text{Im} \langle f | T | i \rangle = \langle \ell | T | f \rangle^* \langle \ell | T | i \rangle. \quad /17/$$

При этом T связан с S соотношением $S = 1 + iT$. Матричный элемент $\langle \ell | T | i \rangle$ в /17/ можно представить в виде

$$\langle \ell | T | i \rangle = \frac{g^2}{(2\pi)^6} e_\mu \bar{u}_\alpha^+ \Gamma_\mu \frac{\hat{\lambda}}{\lambda^2} Q_a(\lambda_\alpha, \lambda_\beta), \quad /18/$$

где e_μ и \bar{u}_α^+ - амплитуды состояния бозона и фермиона, которые входят в $|\ell\rangle$. Подставляя /18/ в правую часть /17/, после суммирования по всем возможным состояниям $|\ell\rangle$ получим

$$\langle \ell | T | f \rangle^* \langle \ell | T | i \rangle = \frac{g^4}{(2\pi)^{12}} Q_b(\lambda'_\alpha, \lambda'_\beta) \frac{\hat{\lambda}}{\lambda^2} \times \quad /19/$$

$$\times \int d\lambda_1 g_{\mu\nu} \Gamma_\mu \hat{\lambda} \Gamma_\nu \theta(p_{10}) \theta(p_0 - p_{10}) \theta(p_0) \delta(\lambda_1^2) \times$$

$$\times \delta((\lambda_1 - \lambda)^2) \frac{\hat{\lambda}}{\lambda^2} Q_a(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \delta(\lambda_\alpha + \lambda_\beta - \lambda'_\alpha - \lambda'_\beta).$$

Сравнивая /19/ с /15/ и учитывая /16/, видим, что соотношение /17/ выполняется.

Таким образом, в рамках подхода квантовой теории поля в объединенном пространстве вычисляемая поправка к гриновской функции

фермиона оказывается конечной. Далее, при применении этого результата в комптоновском эффекте показывается, что поправка мала при малых и средних энергиях /можно, с другой стороны, показать, что в этой области энергий поправки, соответствующие другим диаграммам, дают вклад, который не больше, чем рассматриваемая поправка/. При высоких энергиях для оценки поправки необходимо рассматривать полный набор диаграмм.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессорам В.А.Мещерякову и А.А.Кузнецову за постоянное внимание к работе, профессорам Д.Д.Иваненко, Б.М.Барбашову, Я.П.Терлецкому за обсуждение и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Duong Van Phi. C.R.Acad.Sc., 1968, vol.266, p.1545.
2. Duong Van Phi. Cahier de Phys., 1967, vol.21, p.106.
3. Duong Van Phi. Journ.of Math.Phys., 1968, vol.1-2, p.6.
4. Nguyen Duc Bich, Duong Van Phi. Ann.Phys., 1975, vol.32, p.466.
5. Duong Van Phi, Nguyen Mong Giao. Int.Conf. on High Energy Phys., Lisabon, 1981, vol.5D, p.306.
6. Duong Van Phi, Nguyen Mong Giao. JINR, E2-81-520, Dubna, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 октября 1981 года.