сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-81-582

Н.А.Бойкова, Ю.Н.Тюхтяев, Р.Н.Фаустов

РАСЧЕТ ПОПРАВОК ПОРЯДКА $\alpha^6 \ln \alpha$ В СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ОСНОВНОГО УРОВНЯ ПОЗИТРОНИЯ ОТ ДИАГРАММ ПРЯМОГО КАНАЛА

1981

В последнее время метод квазипотенциала, предложенный Логуновым и Тавхелидзе[1], был успешно применен для расчета ряда поправок порядка $\alpha^6 \ln\alpha$ к известному с точностью до α^5 значению сверхтонкого сдвига основного уровня позитрония [2,3]. В частности, был вычислен вклад в сверхтонкий сдвиг от диаграммы однофотонного обмена [4,5], исследованы эффекты связанности частиц в промежуточных состояниях[6], проанализировано кулоновское взаимодействие в позитронии[7].

Результаты расчетов, в основном, совпали с соответствующими данными других авторов[8,9]. Настоящая работа завершает исследование логарифмических вкладов порядка $\alpha^6 \ln\alpha$ от диаграмм прямого взаимодействия в атоме позитрония методом квазипотенциала.

В соответствии с методикой, развитой ранее[10,4], для вычислений используем квазипотенциальное уравнение в виде

$$2(E-\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2})\,\Psi(\vec{p}) = (2\pi)^{-3} \int d^3q\,\{v_C(\vec{p}-\vec{q}) + \Delta V(p,q;E)\}\Psi(\vec{q}), \qquad /1/$$

где возмущение $\Delta V = V - v_C$. Квазипотенциал определен выражением

$$V = T^* - T^* F T^*, \qquad /2/$$

при этом F - свободная двухвременная функция Грина двух частиц, спроектированная на положительно-частотные состояния, $T^* = u_1 u_2 T u_1 u_2$, $T = K + KGK$, а K - ядро уравнения Бете-Солпитера для полной четырехвременной функции Грина G.

Используя разложение $K = K_C^{(1)} + K_T^{(1)} + K_{CC}^{(2)} + K_{CT}^{(2)} + K_{TT}^{(2)}$, где C и T символизируют соответственно обмен кулоновским и поперечным фотонами, для ΔV с необходимой точностью получаем

$$\Delta V = \Delta V_C + \Delta V_T, \qquad /3/$$

где

$$\Delta V_C = K_C^{(1)*} - v_C + K_{CC}^{(2)*} + (K_C^{(1)} \overline{G}_0 K_C^{(1)})^* - K_C^{(1)*} F K_C^{(1)*},$$

$$\Delta V_T = K_T^{(1)*} + K_{CT}^{(2)*} + K_{TT}^{(2)*} + (K_C^{(1)}\,\overline{G_0\, K_T^{(1)}})^* + (\overline{K_T^{(1)} G_0}\, K_C^{(1)})^* -$$

$$- K_C^{(1)*} F K_T^{(1)*} - K_T^{(1)*} F K_C^{(1)*} + \overline{K_T^{(1)} G_0\, K_T^{(1)}}^{\,*} - K_T^{(1)*} F K_T^{(1)*}.$$

Часть возмущения ΔV_C, ответственная за кулоновское взаимодействие, была рассмотрена ранее в работе [7]. Обратимся к рассмотрению оставшейся части возмущения ΔV_T. Положим, что с требуемой точностью решением уравнения /1/ является нерелятивистская кулоновская волновая функция:

$$\phi_C(\vec{p}) = 4\pi a m \phi(0)\,(\vec{p}^{\,2} + \omega^2)^{-2}, \qquad \omega = \frac{m a}{2}. \qquad /4/$$

Тогда сдвиг уровня энергии, соответствующий ΔV_T, для основного состояния принимает вид

$$\Delta E_T \simeq \langle \vec{p}|\Delta V_T|\vec{q}\rangle + \langle \vec{p}|\Delta V_T|\vec{n}\rangle\langle \vec{n}|\Delta V_T|\vec{q}\rangle \simeq$$

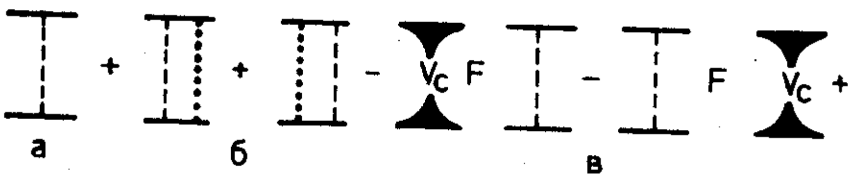
$$\simeq \langle \vec{p}|\, V_а + V_б + V_в + V_г + V_д + V_е\, |\vec{q}\rangle, \qquad /5/$$

где $|\vec{q}\rangle$ - волновая функция основного состояния /4/ и

$$V_а = K_T^{(1)*};\ V_б = (K_C^{(1)}\overline{G_0 K_T^{(1)}})^* + (\overline{K_T^{(1)} G_0}\, K_C^{(1)})^*;\ V_в = K_{CT}^{(2)*};$$

$$V_г = K_{TT}^{(2)*};\ V_д = \overline{K_T^{(1)}\, G_0 K_T^{(1)}}^{\,*};\ V_е = -v_C F K_T^{(1)*} - K_T^{(1)*} F v_C.$$

Указанные процессы взаимодействия удобно изобразить графически:



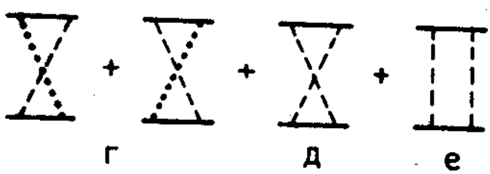


Диаграмма обмена одним поперечным фотоном /а/ была рассмотрена в работах [3-5]. Обратимся к исследованию диаграмм б,в,г, д,е.

Выполнение интегрирования по относительным энергиям и вычисление матричной структуры с точностью до членов, содержащих поправки порядка $\alpha^6 \ln\alpha$ $/\Delta E(\alpha^6 \ln\alpha)$ /, позволяет получить

$$\Delta E^{б} = \Delta E^{б}(\alpha^5),$$

$$\Delta E^{в} = \Delta E^{в}(\alpha^5) + \Delta E^{в}(\alpha^6 \ln\alpha),$$

$$\Delta E^{г} = \Delta E^{г}(\alpha^5) + \Delta E^{г}(\alpha^6 \ln\alpha), \qquad /6/$$

$$\Delta E^{д} = \Delta E^{д}(\alpha^5) + \Delta E^{д}(\alpha^6 \ln\alpha),$$

$$\Delta E^{е} = \Delta E^{е}(\alpha^5) + \Delta E^{е}(\alpha^6 \ln\alpha),$$

где

$$\Delta E^{б}(\alpha^5) = \frac{8}{3}\,\frac{\alpha^4 m|\phi(0)|^2}{(2\pi)^5}\langle\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\rangle \int d^3p\,\Phi_p^2 \int d^3q\,\Phi_q^2 \int \frac{d^3k}{\epsilon_k k_p^2}\Big\{\frac{1}{\epsilon_k - E} - \frac{1}{k_q} -$$

$$- \frac{1}{\epsilon_k - E}\,\frac{q^2}{\epsilon_q(\epsilon_q + m)} - \frac{k^2}{k_q(\epsilon_k + E)}\Big(\frac{1}{\epsilon_k + E + k_q} - \frac{1}{\epsilon_k - E + k_q}\Big) -$$

$$- \frac{q^4 m}{\epsilon_q(\epsilon_q + m)^2}\cdot\frac{1}{k_q(\epsilon_k - E)(k_q + \epsilon_k - E)}\Big\},$$

$$\Delta E^{в}(\alpha^5) = -\frac{8}{3}\,\frac{\alpha^4 m|\phi(0)|^2}{(2\pi)^5}\langle\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\rangle \int d^3p\,\Phi_p^2 \int d^3q\,\Phi_q^2 \int \frac{d^3k}{\epsilon_k k_p^2(\epsilon_k - E)} \times$$

$$\times\Big\{1 - \frac{q^2}{\epsilon_q(\epsilon_q + m)} - \frac{1}{k^2}\cdot\Big(\frac{k^4}{(\epsilon_k + m)^2} + \frac{q^4 m}{\epsilon_q(\epsilon_q + m)^2}\Big)\Big\},$$

$$\Delta E^{г}(\alpha^5) = \frac{8}{3}\,\frac{\alpha^4 m^2|\phi(0)|^2}{(2\pi)^5}\langle\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\rangle \int d^3p\,\Phi_p^2 \int d^3q\,\Phi_q^2 \int \frac{d^3k}{\epsilon_k\,\epsilon_{kpq} k_q k_p^2} \times$$

$$\times\Big\{\frac{k_p^2}{(\epsilon_k + E + k_q)(\epsilon_{kpq} + E + k_q)} + \frac{k_q^2}{(\epsilon_k - E + k_q)(\epsilon_{kpq} - E + k_q)} +$$

$$
+\frac{2k^{2}}{(\epsilon_{k}+E+k_{q})(\epsilon_{k}+\epsilon_{kpq})}+\frac{k_{p}^{2}+k_{q}^{2}}{(\epsilon_{k}-E+k_{q})(\epsilon_{k}+\epsilon_{kpq})}\Big\},
$$

$$
\Delta E^{\text{Д}}(\alpha^{5})=-\frac{4}{3}\,\frac{\alpha^{4}m|\phi(0)|^{2}}{(2\pi)^{5}}\langle\vec{\sigma}_{1}\vec{\sigma}_{2}\rangle\int d^{3}p\,\Phi_{p}^{2}\int d^{3}q\,\Phi_{q}^{2}\int\frac{d^{3}k}{\epsilon_{k}\epsilon_{kpq}k_{p}k_{q}(k_{p}+k_{q})}\times
$$

$$
\times\Big\{(\epsilon_{k}-m)(\epsilon_{kpq}-m)\cdot\frac{(\epsilon_{k}-E+k_{p}+k_{q})(\epsilon_{kpq}-E+k_{p}+k_{q})-k_{p}k_{q}}{(\epsilon_{k}-E+k_{p})(\epsilon_{kpq}-E+k_{k})(\epsilon_{k}-E+k_{q})(\epsilon_{kpq}-E+k_{q})}+
$$

$$
+(\epsilon_{k}+m)(\epsilon_{kpq}+m)\frac{(\epsilon_{k}+E+k_{p}+k_{q})(\epsilon_{kpq}+E+k_{p}+k_{q})-k_{p}k_{q}}{(\epsilon_{k}+E+k_{p})(\epsilon_{kpq}+E+k_{p})(\epsilon_{k}+E+k_{q})(\epsilon_{kpq}+E+k_{q})}-
$$

$$
-\frac{(\epsilon_{k}+m)(\epsilon_{kpq}-m)}{\epsilon_{k}+\epsilon_{kpq}}\cdot\left(\frac{\epsilon_{k}+E+k_{p}+k_{q}}{(\epsilon_{k}+E+k_{p})(\epsilon_{k}+E+k_{q})}+\frac{\epsilon_{kpq}-E+k_{p}+k_{q}}{(\epsilon_{kpq}-E+k_{p})(\epsilon_{kpq}-E+k_{q})}\right)-
$$

$$
-\frac{(\epsilon_{k}-m)(\epsilon_{kpq}-m)}{\epsilon_{k}+\epsilon_{kpq}}\cdot\left(\frac{\epsilon_{k}-E+k_{p}+k_{q}}{(\epsilon_{k}-E+k_{p})(\epsilon_{k}-E+k_{q})}+\frac{\epsilon_{kpq}+E+k_{p}+k_{q}}{(\epsilon_{kpq}+E+k_{p})(\epsilon_{kpq}+E+k_{q})}\right)\Big\},
$$

$$
\Delta E^{\text{е}}(\alpha^{5})=\frac{2}{3}\,\frac{\alpha^{4}m|\phi(0)|^{2}}{(2\pi)^{5}}\langle\vec{\sigma}_{1}\vec{\sigma}_{2}\rangle\int d^{3}p\,\Phi_{p}^{2}\int d^{3}q\,\Phi_{q}^{2}\int\frac{d^{3}k}{\epsilon_{k}k_{p}k_{q}}\times
$$

$$
\times\Big\{\frac{4mk_{p}}{k_{p}+k_{q}}\,\frac{1}{(k_{p}+\epsilon_{q})^{2}-E^{2}}+\frac{\epsilon_{k}+E}{(\epsilon_{k}+E+k_{p})(\epsilon_{k}+E+k_{q})}-
$$

$$
-\frac{\epsilon_{k}-E}{(\epsilon_{k}-E+k_{p})(\epsilon_{k}-E+k_{q})}\Big\},
$$

$$
\Delta E^{\text{в}}(\alpha^{6}\ln\alpha)=-\frac{8}{3}\,\frac{\alpha^{4}|\phi(0)|^{2}}{(2\pi)^{5}}\langle\vec{\sigma}_{1}\vec{\sigma}_{2}\rangle\int d^{3}p\,\Phi_{p}^{2}\int d^{3}q\,\Phi_{q}^{2}q^{2}\int\frac{d^{3}k}{\epsilon_{k}k_{p}^{2}k_{q}^{2}},
$$

$$
\Delta E^{\Gamma}(\alpha^{6}\ln\alpha)=-\frac{8}{3}\,\frac{\alpha^{4}m|\phi(0)|^{2}}{(2\pi)^{5}}\langle\vec{\sigma}_{1}\vec{\sigma}_{2}\rangle\int d^{3}p\,\Phi_{p}^{2}\int d^{3}q\,\Phi_{q}^{2}\int\frac{d^{3}k}{2\epsilon_{k}^{2}k_{p}^{2}}\cdot\frac{p^{2}+q^{2}}{k_{q}(\epsilon_{k}-E+k_{q})},
$$

$$\Delta E^{д}(\alpha^6 \ln\alpha) = -\frac{4\alpha^4 m|\phi(0)|^2}{3(2\pi)^5} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int d^3 p\, \Phi_p^2 \int d^3 q\, \Phi_q^2 \int \frac{d^3 k}{\epsilon_k^2 k_p k_q} \times$$

$$\times \frac{2\vec{p}\vec{k}}{(\epsilon_k - E + k_p)(\epsilon_k - E + k_q)},$$

$$\Delta E^{e}(\alpha^6 \ln\alpha) = \frac{4\alpha^4 m|\phi(0)|^2}{(2\pi)^5} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int d^3 p\, \Phi_p^2 \int d^3 q\, \Phi_q^2 \times$$

$$\times \int \frac{d^3 k}{\epsilon_p^2 (\epsilon_k - E + k_p)(\epsilon_k - E + k_q)} \cdot \left(p^2 + \frac{[\vec{p}\vec{k}]^2}{12m(\epsilon_k - E)}\right),$$

$$\Phi_p^2 = (p^2 + \omega^2)^{-2}; \quad k_p = |\vec{k} - \vec{p}|; \quad k_{pq} = |\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}|; \; \epsilon_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}; \; E = \sqrt{m^2 - \omega^2}.$$

При вычислении сдвига с точностью до α^5, как и ранее[3], используем выражение для квазипотенциала в терминах амплитуды рассеяния на массовой поверхности. Для этого в формулах для сдвигов $\Delta E^{б}(\alpha^5)$, $\Delta E^{в}(\alpha^5)$, $\Delta E^{г}(\alpha^5)$, $\Delta E^{д}(\alpha^5)$, $\Delta E^{e}(\alpha^5)$ положим

$$\frac{4\pi\alpha m}{(2\pi)^3} \Phi_p^2 \sim \delta(\vec{p}); \quad \frac{4\pi\alpha m}{(2\pi)^3} \Phi_q^2 \sim \delta(\vec{q}); \quad E \sim m.$$

Тогда получим

$$\Delta E^{б}(\alpha\ \ ) = \frac{4}{3m} \alpha^2 |\phi(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int_\epsilon^\infty dk \left\{ \frac{2}{k^2} - \frac{1}{\epsilon_k(\epsilon_k + m)} - \frac{1}{k\epsilon_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\epsilon_k(\epsilon_k + m)(\epsilon_k + k)} \right\} = \frac{8}{3m^2} \alpha^2 |\phi(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \left\{ \frac{m}{\epsilon} - 1 + \frac{1}{2} \ln\frac{2\epsilon}{m} \right\},$$

$$\Delta E^{в}(\alpha^5) = 0, \qquad /7/$$

$$\Delta E^{г}(\alpha^5) = \frac{4}{3} \alpha^2 |\phi(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int_\epsilon^\infty \frac{dk}{\epsilon_k} \left\{ \frac{1}{k(\epsilon_k + k)} + \frac{1}{\epsilon_k} \right\} =$$

$$= \frac{4}{3m^2} \alpha^2 |\phi(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \left\{ 1 - \ln\frac{2\epsilon}{m} \right\},$$

$$\Delta E^{д}(\alpha^5) = -\frac{1}{3} \alpha^2 |\phi(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int_\epsilon^\infty \frac{dk}{\epsilon_k^2 k} \left\{ 1 - \frac{k^2}{\epsilon_k(\epsilon_k + k)} - \frac{2k}{\epsilon_k + k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3m^2} \alpha^2 |\phi(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \left\{ 1 + \ln\frac{2\epsilon}{m} \right\},$$

$$\Delta E^{е}(\alpha^5) = \frac{1}{3}\alpha^2|\phi(0)|^2<\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2>\int\limits_{\epsilon}^{\infty}\frac{dk}{\epsilon_k k(\epsilon_k+k)} = -\frac{1}{3m^2}\alpha^2|\phi(0)|^2<\sigma_1\sigma_2>\ln\frac{2\epsilon}{m}.$$

Отметим, что вклад диаграммы однофотонного обмена в этом подходе найден впервые в работе [3]:

$$\Delta E^{а}(\alpha^5) = \frac{2\pi\alpha^2}{3m^2}|\phi(0)|^2<\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2>\cdot\frac{1}{\alpha}, \qquad /8/$$

следовательно, суммарный вклад в значение сверхтонкого сдвига основного уровня позитрония от диаграмм, изображенных на рисунке, с точностью до α^5 составляет

$$\Delta E^{а+б+в+г+д+е} = \frac{2\pi\alpha}{3m^2}|\phi(0)|^2<\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2>\{1-\frac{3\alpha}{2\pi}\}. \qquad /9/$$

Это соответствует результатам, полученным ранее [2,3].

Точный же расчет поправок, содержащих логарифмические вклады порядка $\alpha^6\ln\alpha$, приводит к следующим результатам:

$$\Delta E^{а}(\alpha^6\ln\alpha) = \frac{1}{24}\alpha^6 m<\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2>\ln\alpha^{-1}, \qquad /10/$$

$$\Delta E^{в}(\alpha^6\ln\alpha) = -\frac{1}{12}\alpha^6 m<\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2>\ln\alpha^{-1},$$

$$\Delta E^{Г}(\alpha^6\ln\alpha) = -\frac{1}{12}\alpha^6 m<\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2>\ln\alpha^{-1},$$

$$\Delta E^{Д}(\alpha^6\ln\alpha) = -\frac{1}{24}\alpha^6 m<\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2>\ln\alpha^{-1},$$

$$\Delta E^{е}(\alpha^6\ln\alpha) = \frac{13}{96}\alpha^6 m<\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2>\ln\alpha^{-1}.$$

Перейдем к обсуждению полученных результатов. К настоящему времени имеются следующие экспериментальные результаты для сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония:

$\Delta\nu_{эксп.} = 203{,}3849(12)$ ГГц [11],

$\Delta\nu_{эксп.} = 203{,}3870(16)$ ГГц [12]. /11/

Теоретическое значение сверхтонкого сдвига в позитронии с точностью до $\alpha^6\ln\alpha$, по мнению одних авторов [8], составляет

$$\Delta\nu_{теор.} = 203{,}4079 \text{ ГГц}, \qquad /12/$$

в то время как согласно работе [13]

$\Delta\nu_{теор.} = 203{,}4003$ ГГц. /13/

Вычисленный нами вклад от суммы диаграмм /г,д,е/, пропорциональный $\alpha^6 \ln\alpha^{-1}$:

$$\Delta E^{г+д+е}(\alpha^6 \ln\alpha) = \frac{1}{96}\alpha^6 m\langle\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\rangle \ln\alpha^{-1}, \qquad /14/$$

находится в полном соответствии с результатами работы [9].

Однако, как показано в работе [5], логарифмический вклад от диаграммы однофотонного обмена составляет

$$\Delta E^{a} = \frac{1}{24}\alpha^6 m\langle\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\rangle \ln\alpha^{-1}, \qquad /15/$$

что в два раза меньше соответствующего вклада, приведенного в работе [9].

Кроме того, в методике, основанной на использовании уравнения Бете-Солпитера, отсутствуют вклады от диаграмм в.

Таким образом, суммарный результат, полученный в данной работе, оказывается равным

$$\Delta E_T = \frac{1}{12}\alpha^4 m\langle\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_1\rangle \{1 - \frac{3\alpha}{2\pi} - \frac{3\alpha^2}{8}\ln\alpha^{-1}\}. \qquad /16/$$

С учетом полученных логарифмических поправок и ранее известных результатов [2,3,5,6,8] теоретическое значение для сверхтонкого расщепления в позитронии составляет

$\Delta\nu_{теор.} = 203{,}385$ ГГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p.380.
2. Karplus R., Klein A. Phys.Rev., 1952, 87, p.848.
3. Фаустов Р.Н. ОИЯИ, Р-1572, Дубна, 1964.
4. Тюхтяев Ю.Н. ТМФ, 1978, 36, с.264.
5. Левченко Н.А. и др. ОИЯИ, Р2-12355, Дубна, 1979.
6. Нюнько Н.Е., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. ЯФ, 1979, 30, с.457.
7. Левченко Н.А., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. ЯФ, 1980, 32, с.1656.
8. Barbieri R. et al.Phys.Lett., 1976, B65, p.258.
9. Fulton T. et al. Phys.Rev., 1971, A4, p.1802.
10. Фаустов Р.Н. ОИЯИ, 8246, Дубна, 1974.
11. Egan P.O. et al. Phys.Lett., 1975, A54, p.412.
12. Mills A.P., Berman G.H. Phys.Rev.Lett., 1975, 34, p.246.
13. Lepage G.P. Phys.Rev., 1977, A16, p.863.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 августа 1981 года.