

сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

5492 / 2-81

9/4-81

P2-81-557

В.А.Бедняков, И.С.Златев, П.С.Исаев,  
С.Г.Коваленко

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ  
ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ КХД  
С РАДИАЦИОННЫМИ ПОПРАВКАМИ

1981

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание было привлечено к исследованию высших квантово-хромодинамических поправок к моментам структурных функций процессов глубокоэластичного рассеяния. К настоящему времени завершены расчеты этих величин во втором приближении по эффективной константе кварк-глюонного взаимодействия  $\bar{g}^2(Q^2)$  /next-to-leading order/, что соответствует учету низших радиационных поправок к главному логарифмическому приближению /ГЛП/. Для этого, как известно, потребовалось вычислить универсальные ренормгрупповые функции  $\beta(g)$  и  $\gamma_n(g)$  в двухпетловом приближении <sup>1,2-3/</sup> и коэффициентные функции  $C_n^{(i)}(1, \bar{g}^2(Q^2))$ , зависящие от типа процесса, с точностью до членов порядка  $\bar{g}^2(Q^2)^{1/4}$ .

Сравнительно недавно функция  $\beta(g)$  была получена также в трехпетловом приближении <sup>4/</sup>. Однако пока отсутствуют соответствующие результаты для аномальных размерностей  $\gamma_n(g)$  и коэффициентных функций  $C_n^{(i)}(1, \bar{g}^2(Q^2))$ . Это не позволяет вычислить моменты в данном более высоком порядке теории возмущения.

Расчеты во втором приближении по  $\bar{g}^2(Q^2)$  предоставили возможность оценить значимость роли КХД-поправок. Оказалось, что при любом  $Q^2$  их вклад растет с увеличением номера момента  $n$  или бьеркеновской переменной  $x$  и при достаточно больших  $n$  КХД-теория возмущений теряет смысл.

Указанные обстоятельства говорят, по меньшей мере, о том, что при сравнении предсказаний КХД с экспериментом  $\bar{g}^2(Q^2)$  - поправки следует принимать во внимание. Это, естественно, ставит вопрос о том, как сказывается учет поправок на экспериментальном статусе КХД. Полной ясности пока здесь достичь не удалось, что во многом обусловлено недостаточной точностью имеющихся данных.

Существуют трудности другого характера. Они, главным образом, связаны со специфической предсказаний КХД для глубокоэластичных процессов. Известны две принципиально эквивалентные формулировки этих предсказаний: в виде системы интегро-дифференциальных уравнений эволюции Липатова-Алтарелли-Паризи <sup>5/</sup> /ЛАП/ для структурных функций или в виде системы алгебраических эволюционных уравнений /ЗУ/ для моментов этих функций. Хотя предсказания для моментов имеют относительно простой вид, сравнение их с экспериментом представляет сложную и, вообще говоря, неоднозначную задачу. В частности, при конечных значениях  $x$  и  $Q^2$

структурные функции могут быть измерены лишь в ограниченной области полного интервала изменения переменной  $x \in [0,1]$ . В связи с этим для определения моментов приходится экстраполировать экспериментальные значения структурных функций во весь указанный интервал. Полученные таким образом значения моментов могут содержать заметную неопределенность. Ввиду этого, как неоднократно отмечалось в литературе<sup>7,8/</sup>, весьма желательно иметь предсказания КХД непосредственно для структурных функций  $F(x, Q^2)$  или для функций распределения  $\Phi/P$  кварков и глюонов в нуклоне  $*f_i(x, Q^2)$ .

Значения  $f_i(x, Q^2)$  в дискретном наборе точек с различными  $x$  и  $Q^2$  можно, в принципе, получить, решая уравнения ЛАП численными методами. Из-за сложности этих уравнений во втором приближении по  $\bar{g}^2(Q^2)$  их численное интегрирование сопряжено с весьма значительными трудностями. К тому же для практических приложений табличное представление  $f_i(x, Q^2)$  оказывается неудобным, а в ряде важных случаев /процесс Дрелла-Яна, рождение адронов с большими  $p_T$  и др./, вообще малополезным. В связи с этим вопрос о наиболее удобном и рациональном представлении предсказаний КХД для глубококонепругих процессов развивался в последнее время в направлении поиска приближенных решений эволюционных уравнений в явной аналитической форме. Довольно много в данном направлении было сделано для случая ЗУ в ГЛП<sup>8/</sup>, и только не так давно в работе<sup>9/</sup> получено явное аналитическое выражение для несинглетной /валентной/ функции распределения, которая приближенно удовлетворяет ЗУ второго приближения по  $\bar{g}^2$ . Синглетные и глюонные функции распределения в этой работе не рассматривались.

В настоящей работе нами получено новое приближенное решение эволюционных уравнений во втором приближении по  $\bar{g}^2$ . Мы нашли в явном аналитическом виде полную совокупность функций распределения, входящих в эти уравнения, т.е. несинглетные, синглетные и глюонные функции распределения. Как и в нашей предыдущей работе<sup>10/</sup>, начальные условия для ЗУ, а также явный вид  $x$ -зависимости приближенных решений получены на основе феноменологической кварк-глюонной модели нуклона. Эта модель была предложена и исследована нами в работах<sup>11/</sup>. Она основывается на некоторых предположениях о кварк-глюонной структуре нуклона, согласующихся с КХД.

Напомним, что начальные условия, а следовательно, и вид  $x$ -зависимости решений ЗУ не являются предметом теории возму-

---

\* Дальнейшее изложение нам будет удобнее проводить в терминах функций распределения  $f_i(x, Q^2)$ , на основе которых может быть получена любая структурная функция.

щения. Это не позволяет в настоящее время строго вычислять их в рамках КХД. Строгую теорию в данном случае приходится подменять феноменологическими моделями или эмпирической информацией, извлеченной из экспериментальных данных. Почти все имеющиеся в литературе приближенные решения <sup>18,19/</sup> получены с использованием последней возможности. Мы попытались реализовать первую, считая, что задание начальных условий ЭУ на основе феноменологической модели предпочтительнее использования для этой цели эмпирической информации, лишенной физического смысла. В самом деле, модель, на которую мы опираемся в данной работе, позволяет достичь гораздо большей общности в описании различных процессов. Она дает возможность учесть различные существующие между ними связи, скрытые при эмпирическом подходе.

В §1 рассматриваются некоторые вопросы определения функций распределения кварков и глюонов в нуклоне во втором приближении по эффективной константе  $\bar{g}^2(Q^2)$ .

В §2 дана общая характеристика кварк-глюонной модели нуклона <sup>11/</sup> и на основе ее предсказаний получены искомые приближенные решения ЭУ в указанном выше приближении.

§3 посвящен анализу некоторых свойств КХД-поправок.

В §4, на основе результатов §2 и §3, рассчитаны структурные функции  $F_2$  и  $F_3$  во втором приближении по  $\bar{g}^2(Q^2)$  с учетом массовых эффектов и проведено сравнение с экспериментом.

Приложения 1-3 содержат сводку формул, необходимых для расчета структурных функций в рассматриваемом порядке КХД-теории возмущения и с учетом массовых эффектов. Некоторые из них  $/B_2^0(x)$  в схеме  $MS_A$  / ранее в литературе не приводились.

## §1. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ КХД-ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

Как хорошо известно <sup>12,13/</sup>, учет поправок к ГЛП вносит неоднозначность в способ определения функций распределения кварков и глюонов внутри нуклона. Уже во втором приближении по эффективной константе связи  $\bar{g}^2(Q^2)$  нарушаются соотношения партонной модели для структурных функций глубоконеупругих процессов. Это обстоятельство затрудняет партонную интерпретацию соответствующих формул КХД и приводит к упомянутому произволу.

При выборе того или иного способа определения ФР исходят, как правило, из соображений удобства или желания наложить на ФР некоторые дополнительные условия /например, независимость от способа ренормировки теории <sup>13/</sup>/. Ниже мы рассмотрим два наиболее распространенных способа определения, обозначая их индексами а/ <sup>12/</sup> и б/ <sup>13/</sup>.

В соответствии с этими обозначениями мы будем приписывать величинам, зависящим от способа определения ФР, индекс принадлежности к одному из них.

1. В способе определения  $a/^{12/}$  матричные элементы локальных вильсоновских операторов отождествляются в точке нормировки  $Q^2 = Q_0^2$  с моментами соответствующих функций распределения. В этом случае  $Q^2$ -эволюция ФР контролируется исключительно ренормгрупповыми функциями  $\beta$  и  $\gamma_n$ , рассчитанными в двухпетлевом приближении. Коэффициентные функции вильсоновских операторов  $C_n^{(i)}(1, \bar{g}^2(Q^2))$  отфакторизованы и рассматриваются как моменты элементарных сечений рассеяния заданного тока на кварках или глюонах. Одним из достоинств такого определения ФР является наиболее ясная партонная интерпретация формул КХД.

В способе  $a/$  функции распределения кварков и глюонов зависят от способа ренормировки теории. Это, однако, не является проблематичным, т.к. в произведениях ФР на коэффициентные функции  $C_n^{(i)}(1, \bar{g}^2(Q^2))$ , из которых строятся наблюдаемые величины, ренормализационная зависимость взаимно сокращается. В дальнейшем мы будем придерживаться схемы ренормировки  $\overline{MS}^{1/2}$ .

Рассматриваемый способ определения ФР характеризуется в представлении моментов следующей связью структурных функций с функциями распределения кварков и глюонов

$$\begin{aligned}
 M_2(n, Q^2) &\equiv \int_0^1 dx x^{n-2} F_2(x, Q^2) = \\
 &= \frac{5}{18} \langle \sum^{(a)} (Q^2) \rangle_n \left( 1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{2,n}^{\psi} \right) + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{2,n}^G \langle f_g^{(a)}(Q^2) \rangle_n + \\
 &+ \frac{1}{6} \langle f_v^{(a)}(Q^2) \rangle_n \left( 1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{2,n}^{NS} \right), \quad /1.1/
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_3(n, Q^2) &\equiv \int_0^1 dx x^{n-2} (xF_3(x, Q^2)) = \\
 &= -3 \langle f_v^{(a)}(Q^2) \rangle_n \left( 1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{3,n}^{NS} \right).
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\langle f_i(Q^2) \rangle_n = \int_0^1 dx \cdot x^{n-1} f_i(x, Q^2),$$

$\Sigma(x, Q^2) = 3f_v(x, Q^2) + 8f_g(x, Q^2)$  - синглетная комбинация функций распределения;  $f_v$ ,  $f_g$ ,  $f_g$  - валентные, морские и глюонные

ФР;  $F_2$  и  $F_3$  - структурные функции процессов глубоконеупругого рассеяния  $e(\mu) p \rightarrow e(\mu) X$  и  $\nu(\bar{\nu}) N$  /изоскалярная мишень/  $\rightarrow \mu^-(\mu^+) X$ .  $\bar{B}_{k,n}$  являются коэффициентами разложения вильсоновских коэффициентов функций  $C_n^{(1)}(1, \bar{g}^2(Q^2))$  по эффективной константе связи

$$\frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} = \frac{1}{\beta_0 \ln Q^2/\Lambda^2} \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \ln Q^2/\Lambda^2}{\ln Q^2/\Lambda^2} \right),$$

где  $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f$ ,  $\beta_1 = 102 - \frac{38}{3} n_f$ ;  $n_f$  - число кварковых ароматов. Явные выражения  $\bar{B}_{k,n}$  приведены в Приложении А. Там же дана связь  $F_2$  и  $F_3$  с ФР в представлении Бьеркеновской переменной  $x$ , полученная путем меллиновского обращения формул /1.1/.

Моменты ФР в данном случае подчиняются следующим эволюционным уравнениям:

$$\langle f_v^{(a)}(s) \rangle_n = \langle f_v^{(a)}(0) \rangle_n H_{NS}^n(Q^2, Q_0^2) e^{-d_{NS}^n \cdot s},$$

$$\langle \Sigma^{(a)}(s) \rangle_n = \{ (1 - \alpha_n) \langle \Sigma^{(a)}(0) \rangle_n - \tilde{\alpha}_n \langle f_g^{(a)}(0) \rangle_n \} H_{+\psi}^n(Q^2, Q_0^2) e^{-d_{+\psi}^n \cdot s} +$$

$$+ \{ \alpha_n \langle \Sigma^{(a)}(0) \rangle_n + \tilde{\alpha}_n \langle f_g^{(a)}(0) \rangle_n \} H_{-\psi}^n(Q^2, Q_0^2) e^{-d_{-\psi}^n \cdot s}, \quad /1.2/$$

$$\langle f_g^{(a)}(s) \rangle_n = \{ \alpha_n \langle f_g^{(a)}(0) \rangle_n - \epsilon_n \langle \Sigma^{(a)}(0) \rangle_n \} H_{+g}^n(Q^2, Q_0^2) e^{-d_{+g}^n \cdot s} +$$

$$+ \{ (1 - \alpha_n) \langle f_g^{(a)}(0) \rangle_n + \epsilon_n \langle \Sigma^{(a)}(0) \rangle_n \} H_{-g}^n(Q^2, Q_0^2) e^{-d_{-g}^n \cdot s}.$$

Здесь введена стандартная эволюционная переменная <sup>18/</sup>

$$s = -\ln \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{\bar{g}^2(Q_0^2)}.$$

Определяемые ренормгрупповыми функциями  $\gamma_n$  и  $\beta$  параметры эволюционных уравнений  $d_1^n$ ,  $\alpha_n$ ,  $\tilde{\alpha}_n$ ,  $\epsilon_n$  и  $H_{\pm 1}^n$  приводятся в Приложении Б.

2. Способ б/ определения ФР был предложен в работе <sup>19/</sup>. Связь моментов структурных функций с ФР выглядит в данном случае таким образом:

$$M_2(n, Q^2) = \frac{5}{18} \langle \Sigma^{(b)}(Q^2) \rangle_n + \frac{1}{6} \langle f_v^{(b)}(Q^2) \rangle_n, \quad /1.3/$$

$$M_3(n, Q^2) = - \langle f_v^{(b)}(Q^2) \rangle_n \left( 1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} (\bar{B}_{3,n}^{NS} - \bar{B}_{2,n}^{NS}) \right). \quad /1.4/$$

Как видно, характерным свойством такого определения является партонная формула для  $F_2$  и, как оказывается /см. Приложение А/, более простая по сравнению со способом а/ формула для  $F_3$ . Это делает его удобным для практических приложений. Не менее примечательной деталью способа определения б/ является ренормализационная инвариантность ФР. Она с очевидностью следует из /1.3/ в силу ренорминвариантности  $M_2(n, Q^2)$ .

Эволюционные уравнения теперь будут иметь следующий вид:

$$\langle f_v^{(b)}(s) \rangle_n = \langle f_v^{(a)}(s) \rangle_n \left( 1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{2,n}^{NS} \right),$$

$$\langle \Sigma^{(b)}(s) \rangle_n = \langle \Sigma^{(a)}(s) \rangle_n \left( 1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{2,n}^{\psi} \right) + \langle f_g^{(a)}(s) \rangle_n \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{2,n}^G, \quad /1.5/$$

$$\langle f_g^{(b)}(s) \rangle_n = \langle f_g^{(a)}(s) \rangle_n \left( 1 - \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{2,n}^G \right) - \langle \Sigma^{(a)}(s) \rangle_n \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \bar{B}_{2,n}^{\psi}.$$

Для упрощения записи мы выразили эволюцию ФР в данном случае, используя ФР  $-f_i^{(a)}$ , которые эволюционируют согласно уравнениям /1.2/.

Теперь, после того как даны необходимые определения и разъяснения, мы перейдем к непосредственной задаче настоящей статьи - поиску приближенных решений эволюционных уравнений /1.2/, /1.5/.

## §2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ КВАРК-ГЛЮОННОЙ МОДЕЛИ НУКЛОНА

1. Одной из основных задач КХД применительно к глубоконеупругим процессам является нахождение функций распределения  $f_i(x, Q^2)$  кварков и глюонов внутри нуклона /адрона/. Их моменты должны удовлетворять уравнениям эволюции, о которых шла речь в предыдущем параграфе. Алгебраические уравнения для моментов фактически эквивалентны интегро-дифференциальным уравнениям ЛАП для  $f_i(x, Q^2)$ . Эти два представления связаны преобразованием Меллина. Ввиду сложности уравнений даже приближенное их реше-

ние вызывает значительные затруднения. Дополнительные трудности возникают из-за незнания вида начальных условий, необходимых для их решения. В начальных условиях содержатся эффекты больших расстояний, строгий учет которых в рамках КХД не представляется в настоящее время возможным. Все это привело к появлению различных подходов к приближенному решению задачи о нахождении функций распределения в КХД, использующих те или иные эмпирические, т.е. не обладающие физическим смыслом, параметризации этих функций<sup>/8/</sup>.

Наше предложение состоит в том, чтобы отказаться от эмпиризма в рассматриваемой задаче и воспользоваться предсказаниями некоторой феноменологической модели.

2. Как и в предыдущей работе<sup>/10/</sup>, мы воспользуемся предложенной нами ранее<sup>/11/</sup> кварк-глюонной моделью нуклона. Ее исходные предположения не противоречат современным квантово-хромодинамическим представлениям о внутренней структуре адронов.

Согласно одному из основных предположений модели, допускается возможность экстраполяции функций распределения валентных  $f_v(x, Q^2)$ , морских  $f_g(x, Q^2)$  кварков и глюонов  $f_g(x, Q^2)$  из области малых значений  $x$  во весь интервал  $x \in [0, 1]$ , т.е.

$$f_i(x, Q^2) = \hat{A}_i(\bar{f}_i),$$

/1.6/

$$f_i(x, Q^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \bar{f}_i(x, Q^2).$$

Здесь  $\hat{A}_i$  - экстраполирующий оператор, который строится в модели в рамках определенных предположений о кварк-глюонной структуре нуклона /см. /11//. Область малых значений  $x$  характерна большой множественностью партонов и отсутствием кинематических корреляций между ними. Кроме того,  $x \rightarrow 0$  соответствует реджевскому пределу ( $\nu \rightarrow \infty$ ,  $Q^2 - \text{fixed}$ ). Это позволяет привлечь к построению функций распределения кварков и глюонов некоторые положения статистической теории и реджевский анализ. В нашей модели для предельных функций распределения  $\bar{f}_{v,s}$  были использованы результаты реджевского анализа, а  $\bar{f}_g$  выбирались в виде статистической больцмановской экспоненты.

Приведем полученные в рамках нашей модели окончательные выражения для  $\Phi P$ , определенных во всей физической области  $x \in [0, 1]$ :

$$f_v(x, Q^2) = \frac{x^{-\alpha(0)} (1-x)^{\gamma(Q^2)}}{B(r(Q^2)+1, 1/2)} D_q^{(1)}(x, Q^2),$$



$$f_s(x, Q^2) = \frac{r(Q^2) - a(Q^2)}{8x} (1-x)^{r(Q^2)+1/2} D_q^{(3/2)}(x, Q^2), \quad /1.7/$$

$$f_g(x, Q^2) = \frac{a(Q^2)}{x} (1-x)^{r(Q^2)+1/2} e^{-\beta_g(Q^2)x} D_g^{(3/2)}(x, Q^2),$$

где  $a(0) = 1/2$  - интерсепт  $A_2$ -мезонной реджевской траектории;

$$D_i^{(k)}(x, Q^2) = \frac{\Phi(a(Q^2), r(Q^2) + k; -\beta_i(Q^2)(1-x))}{\Phi(a(Q^2), r(Q^2) + 3/2; -\beta_i(Q^2))},$$

$\Phi(a, \beta; z)$  - вырожденная гипергеометрическая функция, причем  $\beta_q(Q_0^2) = \beta_g(Q_0^2)$ ,  $Q_0$  - точка нормировки.

При решении эволюционных уравнений нам потребуются моменты этих функций распределения. Приведем их явные выражения:

$$\langle f_v(Q^2) \rangle_n = \frac{B(r(Q^2) + 1, n - 1/2)}{B(r(Q^2) + 1, 1/2)} D_q^{(n+1/2)}(0, Q^2), \quad /1.8/$$

$$\langle f_s(Q^2) \rangle_n = \frac{r(Q^2) - a(Q^2)}{8} B(r(Q^2) + 3/2, n - 1) D_q^{(n+1/2)}(0, Q^2),$$

$$\langle f_g(Q^2) \rangle_n = a(Q^2) B(r(Q^2) + 3/2, n - 1) \frac{\Phi(a(Q^2) - 1 + n, r(Q^2) + n + \frac{1}{2}; -\beta_g(Q^2))}{\Phi(a(Q^2), r(Q^2) + \frac{3}{2}; -\beta_g(Q^2))}.$$

Наряду с явным видом  $x$ -зависимости ФР модель указывает на наличие  $Q^2$ -зависимости параметров  $r$ ,  $a$ ,  $\beta_q$ ,  $\beta_g$ . Характер этой зависимости в модели остается неизвестным. Мы зафиксируем данный произвол, исходя из эволюционных уравнений КХД.

3. Итак, переходим к нахождению приближенных решений эволюционных уравнений. Для этого применим известный метод, сущность которого состоит в следующем:

а/ Зададим  $Q^2$ -зависимость параметров модели в линейном приближении по эволюционной переменной  $s$ :

$$r^{(v)}(s, \Lambda) = r_{(0)}^{(v)}(\Lambda) + r_{(1)}^{(v)}(\Lambda) \cdot s,$$

$$a^{(v)}(s, \Lambda) = a_{(0)}^{(v)}(\Lambda) + a_{(1)}^{(v)}(\Lambda) \cdot s, \quad /1.9/$$

$$\beta_{q,g}^{(v)}(s, \Lambda) = \beta_{(0)}^{(v)}(\Lambda) + \beta_{q,g(1)}^{(v)}(\Lambda) \cdot s.$$

В рассматриваемом порядке КХД-теории возмущений параметры начальных условий -  $r_{(0)}$ ,  $a_{(0)}$ ,  $\beta_{(0)}$  и эволюционные параметры -

$a_{(1)}$ ,  $\beta_{q(1)}$ ,  $\beta_{g(1)}$  зависят от способа определения ФР ( $v = a, б$ ) и значения КХД-параметра  $\Lambda$ .

б/ Параметр  $r_{(1)}$  определяется из предсказываемого в КХД-проговогого  $x \rightarrow 1$  поведения ФР<sup>14/</sup>. Он имеет следующее значение:

$$r_{(1)}^{(v)} = \frac{4C_F}{\beta_0} = \frac{16}{25},$$

где  $C_F = 4/3$ ,  $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ ,  $n_f = 4$  - число кварковых ароматов /см. подробнее<sup>10/</sup>.

в/ Параметры начальных условий  $r_{(0)}$ ,  $a_{(0)}$  и  $\beta_{(0)}$  определяются из сравнения с экспериментальными данными по глубоконеупругому лептон-нуклонному рассеянию при фиксированном  $Q^2 = Q_0^2$ .

г/ Эволюционные параметры  $a_{(1)}$ ,  $\beta_{q,g(1)}$  /см. /1.9// определяются с помощью метода средних квадратов. Для этого составим следующий квадратичный функционал:

$$\bar{\chi}^2[f] = \sum_{i=v, \Sigma, g} \sum_n \int_0^1 ds g(s, n) \{ \langle f_i(s) | a_{(1)}, \beta_{q(1)}, \beta_{g(1)} \rangle_n - \langle f_i^{KХД}(s) \rangle_n \}^2$$

где  $\langle f_i(s) | a_{(1)}, \beta_{q(1)}, \beta_{g(1)} \rangle_n$  - моменты ФР, вычисленные по формулам /1.8/, в которых содержатся искомые параметры; моменты  $\langle f_i^{KХД}(s) \rangle_n$  рассчитываются с использованием правых частей ЭУ /1.2/ или /1.5/, в зависимости от рассматриваемого способа определения ФР. Начальные условия ЭУ определяются равенством  $\langle f_i^{KХД}(0) \rangle_n = \langle f_i(0) \rangle_n$  и найденными выше из эксперимента значениями параметров  $r_{(0)}$ ,  $a_{(0)}$ ,  $\beta_{(0)}$ ;  $g(s, n)$  - весовая функция, контролирующая распределение точности по области усреднения. Естественно, мы будем рассматривать лишь конечную область и выберем эту функцию в простейшем виде  $g(s, n) = \theta(20-n)\theta(1-s)$  /интервал  $0 \leq s \leq 1$  при  $Q_0^2 = 9 \text{ ГэВ}^2$  и  $\Lambda = 0,5 \text{ ГэВ}$  соответствует  $9 \leq Q^2 \leq 28 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}^2$ ).

Минимизируя функционал  $\bar{\chi}^2$  по параметрам  $a_{(1)}$ ,  $\beta_{q(1)}$  и  $\beta_{g(1)}$ , мы получаем для их определения систему трех уравнений /условия минимума  $\bar{\chi}^2$ /. Ввиду своей сложности данная система решалась численно на ЭВМ.

На основе изложенного метода нами найдены приближенные решения ЭУ для двух способов определения ФР, рассмотренных в предыдущем параграфе, и трех значений  $\Lambda$ . Значения параметров начальных условий  $r_{(0)}$ ,  $a_{(0)}$ ,  $\beta_{(0)}$  были найдены из сравнения с экспериментальными данными по структурной функции  $F_2$  при фиксированном /15.16/  $Q^2 = Q_0^2 = 9 \text{ ГэВ}^2$ .

Для расчета  $F_2$  использовались соответствующие формулы связи ФР со структурными функциями /см. Приложение А/. При этом нами были учтены кинематические массовые эффекты /см. Приложение В/, о которых более подробно будет сказано в §3. Найденные в результате указанных вычислений значения всех неизвестных параметров приведены в табл.1. Для сравнения в этой же таблице

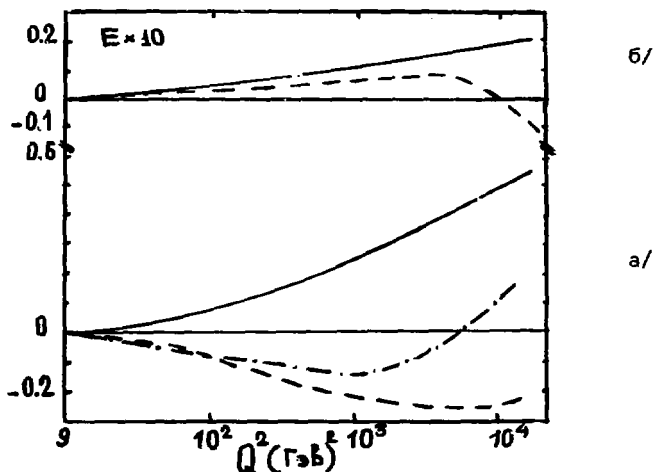


Рис. 1. Распределение усредненных относительных погрешностей

$$E_i(Q^2) = \frac{1}{N} \sum_{n=2}^N \frac{\langle f_i(Q^2) \rangle_n - \langle f_i^{КХД}(Q^2) \rangle_n}{\langle f_i^{КХД}(Q^2) \rangle_n} \quad (N=20)$$

приближенных решений эволюционных уравнений.  $i = v, s, g$  - сплошные, пунктирные, штрих-пунктирные кривые соответственно для способов определения функций распределения а/ и б/.

даны значения параметров, найденные в нашей предыдущей работе<sup>10/</sup> при решения ЗУ в ГЛП.

Подставив табличные значения параметров в /1.7/, получим искомые приближенные решения соответствующих эволюционных уравнений КХД во втором приближении КХД-теории возмущения для двух способов определения ФР а/ и б/, а также в ГЛП.

4. Обсудим вопрос о точности полученных приближенных решений. Введем для этого функцию

$$E_i(Q^2) = \frac{1}{N} \sum_{n=2}^N \frac{\langle f_i(Q^2) \rangle_n - \langle f_i^{КХД}(Q^2) \rangle_n}{\langle f_i^{КХД}(Q^2) \rangle_n}, \quad /1.11/$$

( $N=20$ ), характеризующую распределение по  $Q^2$  усредненных относительных ошибок. На рис. 1 приведен график этой функции.

а/ Из рис.1а следует, что приближенное решение, соответствующее способу а/, достаточно точно ( $\pm 100\% \approx \pm 5\%$ ) вплоть до  $Q^2 = 28 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}^2$  как в кварковом ( $i = u, s$ ), так и в глюонном секторе ( $i = g$ ).

б/ В способе б/ ситуация в кварковом и глюонном секторах не равнозначна. Компоненты приближенного решения, отвечающие валентным и синглетным распределениям, обладают чрезвычайно высокой точностью. Максимальные погрешности составляют в данном случае всего  $1 \pm 2\%$  при  $Q^2 = 28 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}^2$  и совершенно незначительны при  $Q^2 < 2 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}^2$ .

С глюнными функциями дело обстоит иначе. Здесь погрешности значительны и достигают  $30 \pm 40\%$  /на рис.1 соответствующий им график не приведен/. Такой результат, однако, не является неожиданным и тем более фатальным. В самом деле, исходя из формул /1.5/, можно показать, что ФР глюонов, определенная способом б/ в рассматриваемом порядке теории возмущения, не является положительно определенной величиной. Это, естественно, делает невозможной какую бы то ни было разумную их аппроксимацию физически содержательными ФР, каковыми являются функции /1.2/. В указанном смысле определение ФР способом а/ представляется более корректным/в рассматриваемом порядке теории возмущения/.

Сказанное, однако, не преуменьшает практической ценности определения б/ и полученных нами для этого случая приближенных решений. Это оправдывается простотой формул расчета структурных функций, а также тем примечательным обстоятельством, что глюонные распределения не входят в выражения для структурных функций при данном способе определения ФР.

### §3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КХД-ПОПРАВК

Рассчитаем на основании результатов предыдущего параграфа структурные функции  $F_2^{HO}$  и  $F_3^{HO}$  во втором порядке КХД-теории возмущения. Для этого воспользуемся формулами связи структурных функций с ФР способа определения б/ /см приложение А/. Применяя их к выражениям /1.2/ с параметрами, взятыми из соответствующей графы табл.1, получаем искомые структурные функции /в численном виде/.

Зная  $F_i^{HO}$  и  $F_i^{LO} / F_i^{LO}$  - структурные функции, рассчитанные в ГЛП /см./10/ //, проанализируем некоторые свойства КХД-поправок. Выясним, что нового, по сравнению с ГЛП, они привносят в поведение структурных функций. Для этого на рис.2 мы приводим графики отношений  $F_i^{HO}(x, Q^2, \Lambda) / F_i^{LO}(x, Q^2) / \Lambda = 0,5 \text{ ГэВ}$  ( $i = 2,3$ ) для трех значений КХД-параметра  $\Lambda = 0,5; 0,3; 0,1 \text{ ГэВ}$ .

а/ Сравнивая  $F_i^{LO}$  и  $F_i^{HO}$  при одинаковом  $\Lambda / \Lambda = 0,5 \text{ ГэВ}$  /,

можно видеть, что поправки приводят к усилению эффекта наруше-

ния скейлинга - при малых  $x$  к дополнительному росту, при больших  $x$  - к большему спаду.

б/ При малых  $x$  весомый вклад в нарушение скейлинга дают поправки к синглетной компоненте  $F_2^{HO}$ , т.е. к функциям распределения морских кварков. Это следует из сравнения графиков

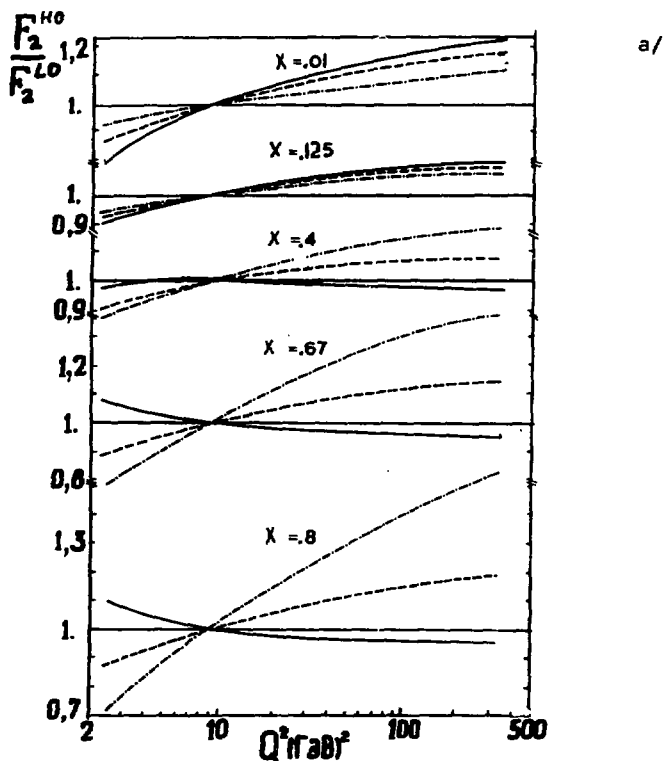


Рис. 2. Графики отношений  $F_i^{HO} / F_i^{LO}$ .  $F_i^{LO}$  - структурные функции, рассчитанные в главном логарифмическом приближении при  $\Lambda = 0,5$  ГэВ;  $F_i^{HO}$  - с учетом следующей радиационной поправки при  $\Lambda = 0,5; 0,3; 0,1$  ГэВ - сплошные, пунктирные, штрих-пунктирные кривые, соответственно. а/  $i=2$ ; б/  $i=8$ .

$F_2^{HO}/F_2^{LO}$  и  $F_3^{HO}/F_3^{LO}$ . Напомним, что  $F_3$ , в отличие от  $F_2$ , есть чисто несинглетная структурная функция.

в/ Изменение значения параметра  $\Lambda$  в  $F^{HO}$  от  $\Lambda = 0,5$  ГэВ до  $\Lambda = 0,1$  ГэВ значительно меняет величину нарушения скейлинга при больших  $x$  и незначительно - при малых.

г/ Характер вклада поправок таков, что выбором  $\Lambda$  нельзя устранить различий в поведении  $F^{HO}$  и  $F^{LO}$ . Таким образом, достаточно точный эксперимент может зарегистрировать нетривиальную  $x$  и  $Q^2$ -зависимость, привнесенную в структурные функции КХД-поправками.

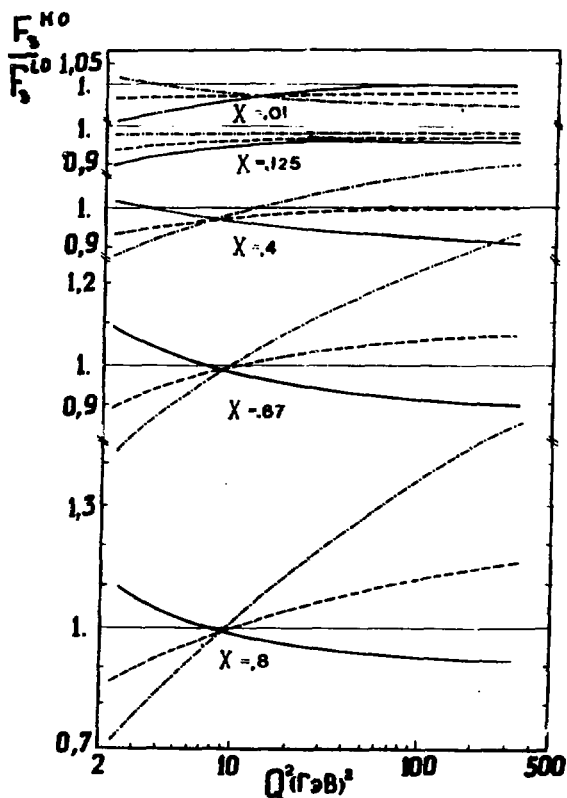


Таблица 1

Спо- соб оп- ределения	Параметры $\Lambda$ (ГэВ/с)	$Z_{(n)}$	$a_{(n)}$	$\beta_{(n)}$	$a_{(1)}$	$\beta_{g(1)}$	$\beta_{g(2)}$
а	0,5	2,31	1,14	-2,15	.621	-1,38	5,953
	0,3	2,27	1,15	-2,06	.623	-1,35	5,97
	0,1	2,20	1,13	-1,99	.618	-1,299	5,96
б	0,5	1,97	.992	-2,32	.050	-2,89	6,0
	0,3	1,97	.992	-2,32	.061	-2,78	6,5
	0,1	1,97	.992	-2,32	.066	-2,59	6,4
ГЛП	от $\Lambda$ не зависит	1,97	.992	-2,32	.619	- .995	5,951

#### §4. УЧЕТ МАССОВЫХ ЭФФЕКТОВ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

1. До сих пор мы рассматривали только логарифмические КХД-эффекты. Однако для расчета наблюдаемых структурных функций, подлежащих сравнению с экспериментальными данными при умеренных  $Q^2$ , нужно учитывать также степенные массовые эффекты  $m^2/Q^2$  /  $m$  - масса нуклона-мишени/. Учет этих эффектов требуется ввиду того, что при умеренных  $Q^2$  их вклад в структурные функции сравним по величине с вкладом рассмотренных нами  $\bar{g}^2(Q^2)$  -поправок. Как и  $\bar{g}^2(Q^2)$  -поправки, они особенно значительны при больших  $x$  и малых  $Q^2$ . Массовые эффекты имеют чисто кинематическую природу и могут быть учтены в рамках формализма  $\xi$ -скейлинга<sup>17</sup>. Отметим, однако, что  $\xi$ -скейлинг позволяет учесть массовые эффекты корректно только в области значений  $x$  ( $x \lesssim 0,8$ ). Это обстоятельство нужно учитывать при использовании полученных на его основе формул расчета структурных функций, которые мы приводим в Приложении В.

Принимая во внимание вышесказанное, рассчитаем структурные функции  $F_2^{ep}$  и  $F_3^{\nu(\bar{\nu})N}$  с учетом как логарифмических КХД-эффектов во втором порядке по  $\bar{g}^2(Q^2)$ , так и степенных массовых эффектов. Для этого нужно подставить в формулы Приложения В структурные функции  $F_2^{HO}$  и  $F_3^{HO}$ , рассчитанные в §3 и соответствующие случаю нулевой массы мишени ( $m=0$ ).

2. Найденные таким образом численные значения структурных функций  $F_2^{ep}$  и  $F_3^{\nu(\bar{\nu})N}$  мы сравнили с экспериментальными данными SLAC<sup>2/15/</sup>, FNAL<sup>16/</sup> ( $e(\mu)+p \rightarrow e(\mu)+X$ ) и CDHS<sup>18/</sup> ( $\nu(\bar{\nu})+N$  /изоскалярная мишень/  $\rightarrow \mu^-(\mu^+)+X$ ). Оказалось, что в хорошем согласии с экспериментальными точками находятся кривые, рассчитанные при  $\Lambda = 0,5$  ГэВ. Эти кривые и указанные экспериментальные данные представлены на рис. 3, 4. Там же даны для сравнения кривые для  $F_2^{LO}$  и  $F_3^{LO}$ , рассчитанных в ГЛП<sup>19/</sup> с тем же значением  $\Lambda = 0,5$  ГэВ. Как видно из рисунков, экспериментальная ситуация в рассматриваемом вопросе такова, что нельзя однозначно определить, лучше ли согласуются с экспериментом структурные функции при учете  $\bar{g}^2(Q^2)$  -поправок или нет. Пока можно говорить лишь о том, что привносимые поправками новые тенденции в поведении структурных функций /например, более сильный рост при малых  $x$  / несколько лучше соответствуют тенденции, проявляющейся на опыте.

Необходимо заметить, что выбранное нами выше значение  $\Lambda = 0,5$  ГэВ не является результатом процедуры всесторонней оптимизации\*. Извлечение КХД-параметра  $\Lambda$  из экспериментальных дан-

\* Неучтенными остались, например, "твистовые" поправки степенного характера ( $M_0^2/Q^2$ )<sup>2</sup>,  $M_0$  - адронный масштаб. В настоящее время они не поддаются строгому расчету в рамках КХД.



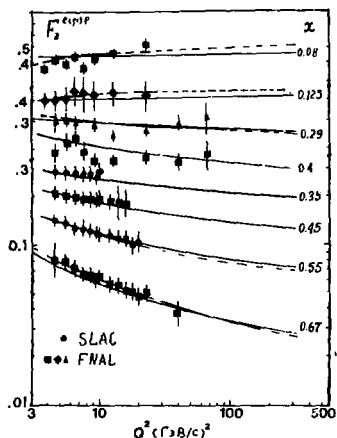


Рис. 3. Структурная функция  $F_2^{e(\mu)p}$  глубоконеупругого  $e(\mu)p \rightarrow e(\mu)X$  рассеяния. Сплошные кривые -  $F_2^{LO}$  /  $\Lambda = 0,5$  ГэВ/, пунктирные -  $F_2^{HO}$  /  $\Lambda = 0,5$  ГэВ/. Точки - экспериментальные данные SLAC /15/, FNAL /16/.

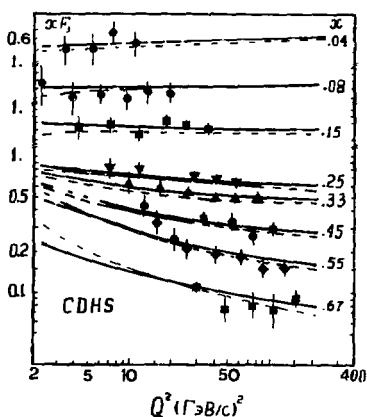


Рис. 4. Структурная функция  $xF_3$  глубоконеупругого  $\nu(\bar{\nu})N \rightarrow \mu^-(\mu^+)X$  рассеяния на изоскалярной мишени. Сплошные кривые -  $xF_3^{LO}$ , пунктирные -  $xF_3^{HO}$ . Точки - экспериментальные данные CDHS /18/.

ных представляет весьма деликатный вопрос и требует специального рассмотрения, выходящего за рамки настоящей статьи.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены явные выражения для функций распределения кварков и глюонов внутри нуклона, которые обладают  $Q^2$ -зависимостью, хорошо аппроксимирующей предсказываемую КХД во втором приближении по эффективной константе кварк-глюонного взаимодействия  $\bar{g}^2(Q^2)$ . Иначе говоря, эти функции распределения являются новыми приближенными решениями эволюционных уравнений КХД, учитывающих низшие  $\bar{g}^2(Q^2)$ -поправки к главному логарифмическому приближению. Нами впервые найдены в явном виде синглетные и глюонные функции распределения, обладающие таким свойством.

В рассматриваемом порядке КХД-теории возмущения способ определения функций распределения и соответствующих им эволюционных уравнений неоднозначен. В работе нами получены приближенные решения для двух наиболее распространенных способов <sup>12,13/</sup>.

Приведенный в Приложении А список формул связи  $\Phi$  со структурными функциями в схеме  $\overline{MS}$  нами уточнен и дополнен новыми формулами ( $\overline{B}_k^G(z)$ ), необходимыми для практических вычислений.

Отметим некоторые характерные черты найденных нами приближенных решений.

а/ Они имеют правильное с точки зрения КХД-теории возмущения пороговое поведение  $x \rightarrow 1$ .

б/ При их получении в качестве начальных условий эволюционных уравнений были использованы не эмпирические параметризации экспериментальных данных при  $Q^2 = Q_0^2$ , а предсказания феноменологической кварк-глюонной модели нуклона [11].

в/  $x$ -зависимость приближенных решений при всех  $Q^2$  также была выбрана на основе этой модели.

Наш подход к приближенному решению эволюционных уравнений, основанный на феноменологической модели, обладает более широкими возможностями по сравнению с подходами, исходящими из эмпирических параметризаций [8]. Например, существует возможность теоретического расчета функций распределения в любом адроне /  $\Pi, K$  и т.д. /, нахождения многочастичных и корреляционных функций. Расчет таких величин становится сейчас весьма актуальной задачей.

Используя полученные нами приближенные решения, мы вычислили структурные функции  $F_2$ ,  $F_3$  и проанализировали влияние КХД-поправок на их поведение. Наконец, учитывая массовые эффекты, мы сравнили найденные структурные функции с экспериментальными данными. Оказалось, что привносимая КХД-поправками в области малых значений  $x$  дополнительная тенденция роста структурных функций с увеличением  $Q^2$  лучше соответствует этим данным.

Авторы признательны С.А.Бунятову за интерес к данной работе. Мы благодарны А.В.Радюшкину за стимулирующие обсуждения и Ю.П.Иванову за помощь в численных расчетах на ЭВМ.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Приведем формулы связи структурных функций  $F_i^{HO}$  с функциями распределения во втором приближении по эффективной константе  $\overline{g}^2(Q^2)$ . Для рассмотренных в статье способов определения функций распределения а/ [12] и б/ [13] они имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \text{а/ } F_2^{HO}(x, Q^2) = & F_2^{(a)PM}(x, Q^2) + \frac{\overline{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} (F_2^{(a)PM}(y, Q^2) \overline{B}_2^\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \\
 & + \frac{5}{18} y f_5^{(a)}(y, Q^2) \overline{B}_2^G\left(\frac{x}{y}\right)),
 \end{aligned}$$

$$x F_2^{HO}(x, Q^2) = x F_3^{(a)PM}(x, Q^2) + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \int \frac{dy}{x y} \bar{B}_3^\psi\left(\frac{x}{y}\right) F_3^{(a)PM}(y, Q^2) y, \quad /A1/$$

$$6/ \quad F_2^{HO}(x, Q^2) = F_2^{(b)PM}(x, Q^2),$$

$$x F_3^{HO}(x, Q^2) = x F_3^{(b)PM}(x, Q^2) + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} x \quad /A2/$$

$$\times \int \frac{dy}{x y} (\bar{B}_3^\psi\left(\frac{x}{y}\right) - \bar{B}_2^\psi\left(\frac{x}{y}\right)) y F_3^{(b)PM}(y, Q^2),$$

где  $F_j^{(i)PM}$  вычисляются по формулам партонной модели

$$F_2^{(i)PM}(x, Q^2) = \frac{5}{18} \Sigma^{(i)}(x, Q^2) + \frac{1}{6} f_v^{(i)}(x, Q^2), \quad /A3/$$

$$F_3^{(i)PM}(x, Q^2) = -3 f_v^{(i)}(x, Q^2).$$

Ядра свертки,  $\bar{B}_i^\psi(x)$ ,  $\bar{B}_i^G(x)$  являются меллиновскими образами коэффициентов  $\bar{B}_{i,n}^\psi$ ,  $\bar{B}_{i,n}^G$ , фигурирующих в /1.1/ и /1.3/. Выпишем эти величины в схеме ренормировки  $\overline{MS}^4$ .

$$\bar{B}_{2,n}^\psi = \bar{B}_{2,n}^{NS} = \frac{4}{3} \left\{ 3 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - 4 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} - \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + \right.$$

$$\left. + 4 \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \frac{1}{j} + \frac{3}{n} + \frac{3}{(n+1)} + \frac{2}{n^2} - 9 \right\}, \quad /A4/$$

$$\bar{B}_{3,n}^{NS} - \bar{B}_{2,n}^{NS} = -\frac{4}{3} \frac{4n+2}{n(n+1)},$$

$$\bar{B}_{2,n}^G = 2n_f \left\{ \frac{4}{n+1} - \frac{4}{n+2} + \frac{1}{n^2} - \frac{n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)} \left( 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) \right\}, \quad /A5/$$

$$\bar{B}_2^\psi(x) = \frac{4}{3} x \left\{ 2(1-x) \ln \frac{1-x}{x} + 4x \left( \frac{\ln(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{3x}{(1-x)_+} + \right.$$

$$\left. + 3 + 4x - 4x \frac{\ln x}{1-x} - \left( \frac{2}{3} \pi^2 + 9 \right) \delta(1-x) \right\},$$

$$\bar{B}_3^{NS}(x) - \bar{B}_2^{NS}(x) = -\frac{4}{3} \cdot 2x(1+x),$$

$$\bar{B}_2^G(x) = 2n_f x \left\{ [(1-x)^2 + x^2] \ln \frac{1-x}{x} + 8x(1-x) - 1 \right\}.$$

Функция  $\bar{B}_2^G(x)$  ранее в литературе не приводилась. Здесь  $n_f = 4$  - число кварковых ароматов. Индекс "+" в сингулярных выражениях указывает на следующие правила интегрирования:

$$\int_0^1 \frac{h(x) dx}{(1-x)_+} \equiv \int_0^1 dx \frac{h(x)-h(1)}{1-x},$$

$$\int_0^1 dx h(x) \left( \frac{\ln(1-x)}{1-x} \right)_+ \equiv \int_0^1 dx [h(x)-h(1)] \frac{\ln(1-x)}{1-x},$$

$h(x)$  - функция, регулярная в граничных точках.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Дадим сводку формул для расчета параметров ЗУ /схема  $\overline{MS}^A/$ :

$$H_{NS}^n(Q^2, Q_0^2) = 1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2) - \bar{g}^2(Q_0^2)}{16\pi^2} Z_{NS}^n, \quad /Б1/$$

$$H_{\pm i}^n(Q^2, Q_0^2) = 1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2) - \bar{g}^2(Q_0^2)}{16\pi^2} Z_{\pm}^n + \left( \frac{\bar{g}^2(Q_0^2)}{16\pi^2} \left( \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{\bar{g}^2(Q_0^2)} \right)^{d_{\pm}^n - d_{\pm}^n} - \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} \right) K_{\pm \mp}^n, \quad /Б2/$$

$$Z_{NS}^n = \frac{\gamma_{NS}^{(1),n}}{2\beta_0} - \frac{\gamma_{NS}^{(0),n}}{2\beta_0^2} \beta_1, \quad /Б3/$$

$$Z_{\pm}^n = \frac{\gamma_{\pm \pm}^{(1),n}}{2\beta_0} - \frac{\lambda_{\pm \pm}^n \beta_1}{2\beta_0^2}, \quad /Б4/$$

$$K_{\pm \mp}^i = \begin{cases} \frac{\gamma_{\pm \mp}^{(1),n}}{2\beta_0 + \lambda_{\pm \mp}^n - \lambda_{\mp \mp}^n}, & i=\psi \\ \frac{\gamma_{\pm \mp}^{(1),n}}{2\beta_0 + \lambda_{\pm \mp}^n - \lambda_{\mp \mp}^n} \cdot \frac{\gamma_{\psi \psi}^{(0),n} - \lambda_{\mp \mp}^n}{\gamma_{\psi \psi}^{(0),n} - \lambda_{\pm \pm}^n}, & i=G, \end{cases} \quad /Б5/$$

$$d_{NS}^n = \gamma_{NS}^{(0),n} / 2\beta_0, \quad d_{\pm}^n = \lambda_{\pm \pm}^n / 2\beta_0,$$

$$\lambda_{\pm}^n = \frac{1}{2} [ \gamma_{\psi\psi}^{(0),n} + \gamma_{GG}^{(0),n} \pm \sqrt{(\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \gamma_{GG}^{(0),n})^2 + 4\gamma_{\psi G}^{(0),n} \gamma_{G\psi}^{(0),n}} ], \quad /Б6/$$

$$\gamma_{--}^{(1),n} = \{ D_1^n (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_+^n) + D_2^n \gamma_{\psi G}^{(0),n} \} T_n .$$

$$\gamma_{-+}^{(1),n} = \{ D_1^n (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_-^n) + D_2^n \gamma_{\psi G}^{(0),n} \} T_n .$$

/Б7/

$$\gamma_{+-}^{(1),n} = \{ D_3^n (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_+^n) + D_4^n \gamma_{\psi G}^{(0),n} \} T_n .$$

$$\gamma_{++}^{(1),n} = \{ D_3^n (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_-^n) + D_4^n \gamma_{\psi G}^{(0),n} \} T_n .$$

$$D_{\left(\frac{1}{3}\right)}^n = \pm (\gamma_{\psi G}^{(0),n} \gamma_{\psi\psi}^{(1),n} + (\lambda_{\mp} - \gamma_{\psi\psi}^{(0),n}) \gamma_{\psi G}^{(1),n}) .$$

$$D_{\left(\frac{2}{4}\right)}^n = \pm (\gamma_{\psi G}^{(0),n} \gamma_{G\psi}^{(1),n} + (\lambda_{\mp} - \gamma_{\psi\psi}^{(0),n}) \gamma_{GG}^{(1),n}) , \quad /Б8/$$

$$T_n = (\lambda_-^n - \lambda_+^n)^{-1} \cdot (\gamma_{\psi G}^{(0),n})^{-1} .$$

По определению

$$\gamma_{ij}^n (g^2) = \gamma_{ij}^{(0),n} \frac{g^2}{16\pi^2} + \gamma_{ij}^{(1),n} \left( \frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 + \dots , \quad /Б9/$$

$\gamma_{ij}^n$  - матрица аномальных размерностей вильсоновских операторов. Здесь

$$\gamma_{NS}^{(0),n} = \gamma_{\psi\psi}^{(0),n} = \frac{8}{3} \left[ 1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right]; \quad \gamma_{\psi G}^{(0),n} = -4n_f \frac{n^2 + n + 2}{n(n+1)(n+2)} ,$$

/Б10/

$$\gamma_{GG}^{(0),n} = 6 \left[ \frac{1}{3} - \frac{4}{n(n+1)} - \frac{4}{(n+1)(n+2)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right] + \frac{4}{3} n_f; \quad \gamma_{G\psi}^{(0),n} = -\frac{16(n^2 + n + 2)}{3n(n^2 - 1)} .$$

Явные выражения для  $\gamma^{(1),n}$  чрезвычайно громоздки. Они могут быть найдены в работах <sup>2/</sup> и в более простом виде в <sup>3/</sup>. В табл. 2 мы приводим их численные значения, использовавшиеся в нашей работе.

Таблица 2

$n$	$\gamma_{us}^{(2),n}$	$\gamma_{44}^{(1),n}$	$\gamma_{45}^{(2),n}$	$\gamma_{64}^{(1),n}$	$\gamma_{66}^{(2),n}$
2	71,37	55,56	-60,34	-55,56	60,34
4	120,14	119,28	10,34	-27,40	151,61
6	147,00	146,82	22,08	-18,28	201,94
8	166,39	166,34	25,96	-14,08	238,16
10	181,70	181,74	27,25	-11,67	267,48
12	194,63	194,58	27,51	-10,11	297,44
14	205,7	205,7	27,29	-9,00	314,2
16	215,4	215,4	26,82	-8,17	333,7
18	224,1	224,1	26,25	-7,52	351,2
20	231,9	231,9	25,63	-7,00	367,3

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

Кинематические массовые эффекты, обусловленные ненулевой массой нуклона-мишени  $m$ , могут быть учтены на основе формализма  $\xi$ -скейлинга. В этом случае структурные функции рассчитываются по формулам:

$$F_2(x, Q^2) = \left(\frac{x}{\xi}\right)^2 K^3(x, Q^2) \bar{F}_2(\xi, Q^2) + 6 \frac{m^2}{Q^2} x^3 K^4(x, Q^2) \times$$

$$\times \int \frac{1}{\xi} \frac{d\xi'}{\xi'^2} \bar{F}_2(\xi', Q^2) + 12 \frac{m^4}{Q^4} x^4 K^5(x, Q^2) \times \quad /B1/$$

$$\times \int \frac{1}{\xi} d\xi' \int \frac{1}{\xi''} \frac{d\xi''}{\xi''^2} \bar{F}_2(\xi'', Q^2),$$

$$F_3(x, Q^2) = \frac{x}{\xi} K^2(x, Q^2) \bar{F}_3(\xi, Q^2) + \frac{2m^2 x^2}{Q^2} K^3(x, Q^2) \int \frac{1}{\xi} \frac{d\xi'}{\xi'} \bar{F}_3(\xi', Q^2), \quad /B2/$$

где

$$K(x, Q^2) = (1 + 4x^2 \frac{m^2}{Q^2})^{-1/2}, \quad /B3/$$

$$\xi = \frac{2x}{1 + \sqrt{1 + 4x^2 \frac{m^2}{Q^2}}}, \quad /B4/$$

$\bar{F}_i$  - структурные функции в случае  $m=0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Caswell W. Phys.Rev.Lett., 1974, 33, p.244; Jones D.R.T. Nucl.Phys., 1974, B75, p.531.
2. Floratos E.G., Ross D.A., Sachrajda C.T. Nucl.Phys., 1977, B129, p.66; Nucl.Phys., 1978, B139, p.545.
3. Gonzalez-Arroyo A., Lopez G., Yndurain F.T. Madrid prepr., FTUAM/79-3, Madrid, 1979.
4. Bardin W.A. et al. Phys.Rev., 1978, D18, p.3998; Floratos E.G., Ross D.A., Sachrajda C.T. Nucl.Phys., 1979, B152, p.493; Phys.Lett., 1979, 80B, p.269.
5. Tarasov O.V., Vladimirov A.A., Zharkov A.Yu. Phys.Lett., 1980, 93B, p.429.
6. Липатов Л.Н. ЯФ, 1974, 20, с.181; Altarelli G., Parisi G. Nucl.Phys., 1977, B126, p.298.
7. Ellis J. CERN, TH-2744, Geneva, 1979.
8. Buras A.J., Gaemers K. Nucl.Phys., 1978, B132, p.249; Owens J.F., Reya E. Phys.Rev., 1976, D17, p.3003; Glück M., Reya E. Nucl.Phys., 1977, B130, p.76; Parisi G., Sourlas N. Nucl.Phys., 1979, B151, p.421.
9. Bialas A., Buras A.J. Phys.Rev., 1980, D21, p.1825.
10. Златев И.С. и др. ОИЯИ, P2-81-45, Дубна, 1981.
11. Исаев П.С., Коваленко С.Г. ЯФ, 1980, 32, с.756; Исаев П.С., Коваленко С.Г. В кн.: Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. ОИЯИ, Д1,2-12036, Дубна, 1978, с.229; в кн.: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, III Международный семинар, Протвино, 1980, с.352; Коваленко С.Г., Малышкин В.Г. ЯФ, 1979, 30, с.1647; Isaev P.S., Kovalenko S.G. Hadronic Journal, 1980, 3, p.919.
12. Baulier L., Koupas C. Nucl.Phys., 1978, B141, p.423; Kodaira J., Uematsu T. Nucl.Phys., 1978, B141, p.497.
13. Altarelli G., Ellis R.K., Martinelli G. Nucl.Phys., 1978, B143, p.521; Nucl.Phys., 1979, B146, p.544.

14. Gross D.J. Phys.Rev.Lett., 1974, 32, p.1071.
15. Bodek A. et al. Phys.Rev., 1979, D20, p.1471.
16. Gordon B.A. et al. Phys.Rev., 1979, D20, p.2645.
17. Georgi H., Politzer H.D. Phys.Rev., 1976, D14, p.1829.
18. De Groot J.G.H. et al. Z.Phys. C., 1979, 1, p.143.

Рукопись поступила в издательский отдел  
14 августа 1981 года.