объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



P2-81-493

Р.П. Зайков

# О НЕТЕРОВСКОМ ХАРАКТЕРЕ ВЫСШИХ ЛОКАЛЬНЫХ СОХРАНЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН В НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ

*Направлено в "Letters in Mathematical Physics"*

1981

1. Некоторые двумерные классические теоретико-полевые модели допускают бесконечное число как локальных[1-3], так и нелокальных[4] сохраняющихся величин. Наличие таких величин и в квантовом случае[3,5,6] приводит к факторизации $S$-матрицы и отсутствию рождения частиц[6,7]. Последние два свойства показывают, что $S$-матрица может быть точно вычислена в рамках этих моделей.

Двумерные конформно-инвариантные теоретико-полевые модели являются теориями этого класса. Для таких теорий тензор энергии-импульса симметричный /улучшенный/ и бесследовый, т.е.

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad \text{и} \quad T^{\mu}{}_{\mu} = 0. \qquad /1/$$

В переменных светового конуса $x_{\pm} = (x_0 \mp x_1)/2$ /1/ и уравнение непрерывности $\partial^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$ записываются в виде

$$T_{+-} = T_{-+} = 0, \qquad /2/$$

$$\partial_+ T_{--} = \partial_- T_{++} = 0 \qquad /3/$$

соответственно.

В этом случае очевидно, что выполняются также и уравнения непрерывности

$$\partial_- T^{(k,m)}_{++} = 0, \quad \partial_+ T^{(k,m)}_{--} = 0, \qquad /4/$$

где

$$T^{(k,m)}_{++} = \partial_+^k (T_{++})^m, \quad T^{(k,m)}_{--} = \partial_-^k (T_{--})^m \quad (k, m = 0,1, \dots). \qquad /5/$$

Для некоторых калибровочно-инвариантных моделей, таких, как модель безмассового спинорного поля и модель $|\bar{\psi}\psi|^2$, где $\psi$ - майорановский спинор[8], уравнение непрерывности $\partial^{\mu} j_{\mu}(x) = 0$ также приводится в виде

$$\partial_+ j_-(x) = 0 \quad \text{и} \quad \partial_- j_+(x) = 0, \qquad /6/$$

где

$$j_+ = \bar{\psi}\gamma_+\psi = \psi_1^*\psi_1, \quad j_- = \bar{\psi}\gamma_-\psi = \psi_2^*\psi_2, \qquad /7/$$

здесь * обозначает комплексное сопряжение. Очевидно, что любые степени от $j_+$ и $j_-$ удовлетворяют уравнениям /6/, т.е.

$$\partial_+(\partial_-^k j_-^m) = 0, \quad \partial_-(\partial_+^k j_+^m) = 0. \qquad /8/$$

2. Отметим, что как тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, так и ток $j_\mu(x)$ получаются из теоремы Нетер. В работах [9-11] было показано, что все нелокальные сохраняющиеся токи имеют нетеровский характер и что эти токи являются следствием инвариантности действия относительно нелокальных и нелинейных калибровочных преобразований. Тогда естественно попытаться получить и высшие локальные сохраняющиеся величины также из теоремы Нетер. Для этой цели необходимо найти преобразования скрытой симметрии, порождающие такие высшие локальные сохраняющиеся величины.

В работе [11] было показано, что условие инвариантности действия относительно преобразования калибровочного типа имеет вид

$$j^\mu(x)\,\partial_\mu\,\eta(x) = 0, \qquad /9/$$

где $j_\mu(x)$ есть первый сохраняющийся ток $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$.

Рассмотрим спинорную модель, чей ток удовлетворяет уравнению непрерывности /6/. Введем "калибровочные" преобразования

$$\begin{aligned} U_1\psi_1 &= e^{i\eta_1(x)}\,\psi_1(x), \\ U_2\psi_2 &= e^{i\eta_2(x)}\,\psi_2(x), \end{aligned} \qquad /10/$$

/компоненты спинора $\psi$ преобразуются независимо относительно калибровочных преобразований/. Отметим, что эти преобразования /10/ не нарушают релятивистской инвариантности, потому что при преобразованиях Лоренца имеем

$$\psi_1 \to e^{\Lambda/2}\psi_1, \quad \psi_2 \to e^{-\Lambda/2}\psi_2, \quad \Lambda \in SO(1,1).$$

Условие инвариантности действия /9/ относительно преобразований /10/ принимает вид:

$$\begin{aligned} j_+(x)\,\partial_-\,\eta_1(x) &= 0, \\ j_-(x)\,\partial_+\,\eta_2(x) &= 0. \end{aligned} \qquad /11/$$

Общее решение уравнений /11/ задается в виде

$$\eta_1(x) = F_1(x_+)\,\omega^F_- \,, \qquad\qquad /12/$$
$$\eta_2(x) = F_2(x_-)\,\omega^F_+ \,,$$

где $F_1$ и $F_2$ - произвольные скалярные функции переменных $x_+$ и $x_-$ соответственно, а $\omega^F_\pm$ - инфинитезимальные параметры. Потребуем выполнения следующих граничных условий:

$$F_{1,2} \xrightarrow[x_\pm = \pm\infty]{} M < \infty\,. \qquad\qquad /13/$$

Функции $F_{1,2}$ могут быть рассмотрены как генераторы преобразований /10/, т.е.

$$F_{1(2)} = \frac{\partial U_{1(2)}}{\partial \omega^F_{1(2)}}\Bigg|_{\omega^F = 0}\,. \qquad\qquad /14/$$

Класс решений уравнений /11/ имеем, если выберем $F_1$ и $F_2$ в виде

$$F_1 = f_+(j_+, \partial_+ j_+, \dots)\,, \qquad\qquad /15/$$
$$F_2 = f_-(j_-, \partial_- j_-, \dots)\,,$$

где $f_\pm$ - произвольные скалярные функции*). Полиномиальные сохраняющиеся величины задаются выражениями

$$\eta_1^{(m,n)}(x) = \partial_+^m (j_+)^n\, \omega_{\underbrace{-,\dots,-}_{m+n}}\,, \qquad\qquad /16/$$
$$\eta_2^{(m,n)}(x) = \partial_-^m (j_-)^n\, \omega_{\underbrace{+,\dots,+}_{m+n}}\,,$$

где $\omega_{+,\dots,+}$ и $\omega_{-,\dots,-}$, "+" и "-" - компоненты инфинитезимального параметра, имеющего структуру лоренцевского тензора ранга $m+n$. Функции $\eta_{1,2}$, заданные формулой /16/, действительно, являются скалярными, потому что относительно преобразований Лоренца тензор $T_{\underbrace{+,\dots,+}_{m},\underbrace{-,\dots,-}_{n}}$ преобразуется как

$$T_{+,\dots,+,-,\dots,-} \Rightarrow e^{(m-n)\Lambda}\, T_{+,\dots,+,-,\dots,-}\,.$$

*) Чтобы функции $F_{1,2}$ являлись скалярными, необходимо включить в них постоянные лоренцевские тензоры.

Тогда теорема Нетер указывает, что

$$J_{+}^{(F)} = j_{+}(x)\,F_1(x_{+}),$$
$$J_{-}^{(F)} = j_{-}(x)\,F_2(x_{-}), \qquad /17/$$

где $F_{1,2}$ ,заданные посредством /14/,/15/ или /16/, сохраняются, если выполнены уравнения движения и число этих токов /17/ равно числу независимых параметров преобразований /11/, число которых бесконечно.

Соответствующие сохраняющиеся заряды имеют вид

$$Q_{\pm}^{(k,m)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, j_{\pm}\, \partial_{\pm}^{k} (j_{\pm})^{m} . \qquad /18/$$

Можно проверить, что /18/ являются интегралами движения вследствие сохранения токов /16/ и аннулирования полей на пространственной бесконечности.

3. Как известно, сохраняющийся тензор энергии-импульса является следствием симметрии действия относительно трансляций в пространстве-времени, т.е.

$$\delta S = \int d^2 x\, \partial_{\mu} (T^{\mu\nu}\, \delta x_{\nu}) = 0, \qquad /19/$$

где

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^{\mu} \phi_j} \partial_{\nu} \phi_j - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \qquad /20/$$

$\delta x_{\mu} = \epsilon_{\mu}$ - постоянный параметр и

$$\delta\phi_j (x) = \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \phi_j (x) . \qquad /21/$$

Предположим, что

$$\delta x_{\mu} = X_{\mu}^{(k)} (x)\, \delta\omega_k , \qquad /22/$$

где $\delta\omega_k$ - инфинитезимальные параметры, т.е. рассматриваются некоторые обобщенные "трансляции". Закон преобразований полей относительно преобразований /22/ выражается также формулой /21/, где $\delta x_{\mu}$ задается /22/. Подставляя /22/ в /19/,получаем следующие уравнения для генераторных функций $X_{\mu}^{(k)}$:

$$\partial^{\mu} (T_{\mu\nu}\, X_{(k)}^{\nu}) = 0. \qquad /23/$$

Чтобы найти соответствующие сохраняющиеся величины, достаточно вычислить генераторные функции $X_{\mu}^{(k)}$ только для подпространства решений уравнения движения. Тогда /23/ записывается как

$$T^{\mu\nu}\,\partial_\mu X^{(k)}_\nu(x) = 0. \qquad /24/$$

В случае, когда тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ является симметричным со следом нуль, /24/ в переменных светового конуса принимают вид:

$$T_{++}\,\partial_-X^{(k)}_- = 0, \quad T_{--}\,\partial_+X^{(k)}_+ = 0. \qquad /25/$$

Очевидно, что

$$X_\pm = \mathrm{const}$$

является тривиальным решением /25/. Общее решение /25/ имеет вид

$$X^{(k)}_+ = X^{(k)}_+(x_+), \quad X^{(k)}_- = X^{(k)}_-(x_-), \qquad /26/$$

где $X^{(k)}_{+(-)}$ - произвольные функции от $x_{+(-)}$ соответственно, удовлетворяющие граничным условиям /13/.

В частном случае /26/ могут быть выбраны в виде:

$$X^{(k,m)}_+ = \partial^k_+(T_{++})^m, \quad X^{(k,m)}_- = \partial^k_-(T_{--})^m \qquad (k,m = 0,1,\ldots). \quad /27/$$

Из /22/ и /27/ следует, что $\omega^{(k,m)}_{+(-)}$ преобразуются как "$-(+)$"-компоненты лоренцевского тензора ранга $k+2m+1$.

Теорема Нетер дает бесконечное число сохраняющихся величин:

$$T^{(k,m)}_{++} = T_{++}\,X^{(k,m)}_{+},$$
$$T^{(k,m)}_{--} = T_{--}\,X^{(k,m)}_{-} \qquad (k,m = 0,1,\ldots), \qquad /28/$$

где $X^{(k,m)}_{+(-)}$ заданы формулами /26/ или /27/. Соответствующие интегралы движения имеют вид:

$$P^{(k,m)}_{+(-)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, T_{++(--)}\,X^{(k,m)}_{+(-)}. \qquad /29/$$

Таким образом, мы показали, что и высшие сохраняющиеся тензоры энергии-импульса также могут быть получены из теоремы Нетер. Они порождаются координатными преобразованиями /22/, где генераторы $X^{(k)}_\mu$ задаются посредством /26/ или /27/. Относительно этих преобразований поля $\phi_j(x)$ преобразуются по закону /21/.

Необходимо отметить, что интегралы движения $P^{(k,m)}_\pm$ коммутируют относительно канонических скобок Пуассона

$$\{P_{\pm}^{(k,m)}, P_{\pm}^{(k',m')}\} = 0, \qquad /30/$$

т.е. находятся в инволюции. Однако генераторы преобразований полей /21/

$$\mathcal{P}_{\pm}^{(k,m)} = X_{\pm}^{(k,m)} \partial_{\pm}$$

вообще не коммутируют относительно обычного коммутатора

$$[\mathcal{P}_{\pm}^{(k,m)}, \mathcal{P}_{\pm}^{(k',m')}] \neq 0.$$

Следовательно, здесь $\mathcal{P}_{\pm}^{(k,m)}$ не являются представлением алгебры интегралов движения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Pohlmeyer K. Comm.Math.Phys., 1976, 46, p.207.
2. Kulish P.P. Theor.Math.Phys., 1976, 26, p.132.
3. Goldschmidt Y.Y., Witten E. Phys.Lett., 1980, 91B, p.392.
4. Luscher M., Pohlmeyer K. Nucl.Phys., 1978, B137, p.46.
5. Aref'eva I.Ya. et al. LOMI preprint E-I-1978, Leningrad, 1978.
6. Luscher M. Nucl.Phys., 1978, B135, p.1.
7. Karowski M. et al. Phys.Lett., 1978, 67B, p.321.
8. Witten E. Nucl.Phys., 1978, B142, p.285.
9. Dolan L., Roos A. Phys.Rev., 1980, D22, p.2018.
10. Markowsky B.L., Zaikov R.P. JINR, E2-80-654, Dubna, 1980.
11. Zaikov R.P. JINR, E2-81-116, Dubna, 1981.



Рукопись поступила в издательский отдел
17 июля 1981 года.