объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-81-466

С.Н.Калицин, В.И.Огиевецкий

РАСШИРЕНИЕ КЛАССИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА НА N = 1 СУПЕРГРАВИТАЦИЮ

Направлено в "Letters in Mathematical Physics"

1981

В последние годы возрастает интерес к супергравитации и уже начали появляться работы о решениях ее уравнений /1,2/. В этой связи в настоящей работе строится суперсимметричный аналог классификации Петрова пространства Эйнштейна. Отметим, что в супергравитации имеется "материальное" поле, гравитино. Соответственно у уравнений Эйнштейна появляется источник, и поэтому тензор Вейля уже не совпадает с тензором Римана. Однако его можно классифицировать по Петрову /8/, и в настоящей работе мы будем использовать канонические типы тензора Вейля C_{abcd}. В супергравитации он входит в одно суперполе $W_{\alpha\beta\gamma}$ с напряженностью поля гравитино $S_{\alpha\beta\gamma}$. Поэтому алгебраические условия, определяющие канонический тип C_{abcd}, сопровождаются соответственными уравнениями, содержащими $S_{\alpha\beta\gamma}$. В данной работе исследуются возможные суперсимметрические связи, совместные с классификацией Петрова.

Полученные формулы приобретают простой вид для вырожденных канонических типов. Обсуждается также линеаризованное приближение. Как и следовало ожидать из плоской суперсимметрии, в этом приближении решения для гравитино в случае канонических типов [4] и [3-1] суть волны со спиральностью 3/2, распространяющиеся вдоль вырожденного главного изотопного направления тензора Вейля.

Работа строится следующим образом. Сначала даются общие понятия, связанные с классификацией пространств Эйнштейна. В разделе 2 обсуждается суперсимметризация последней. В разделе 3 получены соответствующие уравнения для компонент суперполя $W_{\alpha\beta\gamma}$, минимальным образом ограничивающие напряженности $S_{\alpha\beta\gamma}$, для максимально вырожденного типа. Для некоторых из остальных типов формулы приведены в линеаризованном приближении. В приложении рассматриваются решения некоторых связей из раздела 3.

1. Напомним основные положения классификации Петрова для пространств Эйнштейна. Тензор Римана для этих пространств совпадает с тензором Вейля C_{abcd}, который можно записать в двухкомпонентном виде /3,4/ как

$$C_{abcd} = 1/4\,\sigma_a^{\alpha\dot\alpha}\,\sigma_b^{\beta\dot\beta}\,\sigma_c^{\gamma\dot\gamma}\,\sigma_d^{\delta\dot\delta}\,(C_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\epsilon_{\dot\gamma\dot\delta} + \bar C_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon_{\gamma\delta}), \qquad /1.1/$$

$a, b, c, d = 1,2,3,4, \quad \alpha, \beta = 1,2,$

где $\sigma_a = \{1, \vec{\sigma}_i\}$; σ^i – $i=1,2,3$ - матрицы Паули; $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ - полностью симметрический по индексам спинор. Он допускает каноническое разложение

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta^1_{(\alpha}\eta^2_{\beta}\eta^3_{\gamma}\eta^4_{\delta)} , \qquad /1.2/$$

η^i_α - четыре, вообще говоря, различных коммутирующих спинора; скобки означают симметризацию.

Векторы

$$k^i_a = 1/2\,\sigma_a^{\alpha\dot{\alpha}}\,\eta^i_\alpha\,\eta^i_{\dot{\alpha}}, \qquad i = 1,2,3,4 , \qquad /1.3/$$

определяют главные изотропные направления тензора Вейля. Разложение /1.2/ спинора $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяет канонический тип тензора C_{abcd} по числу совпадающих главных изотропных направлений. Каждый канонический тип может быть задан также минимальным уравнением для спинора $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ [5]. Приведем все канонические типы вместе с соответствующими им минимальными уравнениями [4]:

$$[4] \quad \eta^1_\alpha = \eta^2_\alpha = \eta^3_\alpha = \eta^4_\alpha , \qquad C_{\alpha\beta\mu\nu}\, C^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} = 0, \qquad /1.4а/$$

$$[3.1] \quad \eta^1_\alpha = \eta^2_\alpha = \eta^3_\alpha , \qquad C_{\alpha\beta\mu\nu}\, C^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta}\, C^{\gamma\delta}{}_{\rho\gamma} = 0, \qquad /1.4б/$$

$$[2.2] \quad \eta^1_\alpha = \eta^2_\alpha , \; \eta^3_\alpha = \eta^4_\alpha , \quad (C_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} - r\, e_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu})(C_{\mu\nu\gamma\delta} + 2r\, e_{\mu\nu\gamma\delta}) = 0, \qquad /1.4в/$$

$$[2.1.1] \quad \eta^1_\alpha = \eta^2_\alpha , \qquad (C_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} - r\, e_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu})^2 (C_{\mu\nu\gamma\delta} + 2r\, e_{\mu\nu\gamma\delta}) = 0, \qquad /1.4г/$$

$$[1.1.1.1] \quad \eta^i_\alpha \neq \eta^j_\alpha \quad i \neq j \quad (C_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} - \lambda_1 e_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}) \times$$

$$\times (C_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} - \lambda_2 e_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma})(C_{\rho\sigma\gamma\delta} - \lambda_3 e_{\rho\sigma\gamma\delta}) = 0, \qquad /1.4д/$$

где

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1/2\,(\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} + \epsilon_{\alpha\delta}\epsilon_{\beta\gamma}), \qquad /1.5/$$

$$r^2 = 1,6\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\, C^{\alpha\beta\mu\nu} , \qquad /1.6/$$

а числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ определяются из уравнений

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \qquad /1.7а/$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = C_{\alpha\beta\mu\nu} \; C^{\alpha\beta\mu\nu} \; , \qquad /1.7б/$$

$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = C_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \, C_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \, C_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \; . \qquad /1.7в/$$

2. В теории $N=1$ супергравитации поле $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ входит в суперполе $W_{\alpha\beta\gamma}$ вместе с напряженностью поля Рарита Швингера $S_{\alpha\beta\gamma}$ /6,7/.

Более подробно:

$$S_{\alpha\beta\gamma} = W_{\alpha\beta\gamma} \,|_{\theta=0} \; , \qquad /2.1а/$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_\alpha W_{\beta\gamma\delta} \,|_{\theta=0} \; . \qquad /2.1б/$$

Суперполе $W_{\alpha\beta\gamma}$ кирально:

$$\bar{D}_{\dot{a}} W_{\alpha\beta\gamma} = 0 \, , \qquad /2.2а/$$

и на уравнениях движения подчиняется также условию /6,7/

$$D^{\alpha} W_{\alpha\beta\gamma} = 0 \, . \qquad /2.2б/$$

Поэтому /в случае без космологического члена, то есть при $R=0$/ /7/

$$D_\mu D_\alpha W_{\beta\gamma\delta} = 0 \, . \qquad /2.2в/$$

Минимальное суперсимметрическое обобщение уравнений /1.4а/-/1.4д/ состоит в замене в них $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ на суперсимметрично-ковариантный объект $D_\alpha W_{\beta\gamma\delta}$. Ниже мы будем обозначать полученные таким образом уравнения как /1.4/$'$. Соответствующие уравнения для функций $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $S_{\alpha\beta\gamma}$ рассматриваются в следующем разделе.

Приведем теперь другие возможные уравнения для суперполя $W_{\alpha\beta\gamma}$, дающие с помощью дифференцирований D_κ или $D^\kappa D_\kappa$ /1.4/$'$, и тем самым более сильные, чем последние. В формулах ниже справа указан соответствующий приводимому уравнению канонический тип по Петрову.

Уравнение для $W_{\alpha\beta\gamma}$	Канонический тип
1. $W_{\alpha\beta\gamma} W^{\gamma\mu\nu} = 0.$	[4]
2. $D_\alpha W_{\beta\gamma\delta} W^{\gamma\delta\mu} = 0.$	[4]

3. $D_\alpha W_{\beta\gamma\delta} W^{\mu\alpha\beta} W_{\mu\rho\sigma} = 0.$ [3.1]

4. $D_\alpha W_{\beta\gamma\delta} D^\alpha W^{\beta\mu\nu} W_{\mu\nu\sigma} = 0.$ [3.1]

5. $W_{\alpha\beta}{}^{\mu} W_{\mu\gamma\delta} + L D_\alpha W_{\beta\gamma\delta} - L r e_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$ [2.2]

6. $D_\alpha W_{\beta\mu\kappa} W^{\mu}{}_{\delta\gamma} + (W^{\rho\sigma\tau} D_\kappa W_{\rho\sigma\tau}) D_\alpha W_{\beta\gamma\delta} -$

$- (W^{\rho\sigma\tau} D_\kappa W_{\rho\sigma\tau}) r e_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$ [2.2]

Аналогично несколько более громоздки уравнения остальных канонических типов.

Здесь r определено формулой /1.6/ с заменой $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ на $D_\alpha W_{\beta\gamma\delta}$, а $L = (D_\mu W_{\kappa\sigma\tau})(D^\rho W^{\kappa\sigma\tau})$.

Нетрудно видеть, что уравнения 1, 2, 3, 4, 5, 6 после дифференцирования дают уравнения /1.4/.

3. В этом разделе будут получены уравнения, которые следуют из /1.4/′для напряженностей /2.1а, б/. Отметим, что все суперсимметрические связи являются однородными уравнениями степени n:

$$P^n(W_{\alpha\beta\gamma}, D_\mu W_{\kappa\sigma\phi}) = 0,$$

$$P^n(aW_{\alpha\beta\gamma}, aD_\rho W_{\kappa\sigma\phi}) = a^n P^n(W_{\alpha\beta\gamma}, D_\rho W_{\kappa\sigma\phi}) \qquad /3.1/$$

для любой константы a.

В частности, уравнения /1.4/′ допускают более простое, чем /3.1/, представление:

$$P^n(D_\alpha W_{\beta\gamma\delta}) = 0, \qquad /3.2/$$

отсюда в силу /2.2б/

$$D_\mu P^n(D_\alpha W_{\beta\gamma\delta}) = 0. \qquad /3.3/$$

Уравнения /3.2/ приводят к следующим независимым уравнениям для напряженностей полей:

$$P^{n}(D_{\alpha} W_{\beta\gamma\delta})|_{\theta=0} = 0, \qquad /3.4а/$$

$$\bar{D}_{\dot{\kappa}} P^{n}(D_{\alpha} W_{\beta\gamma\delta})|_{\theta=0} = 0, \qquad /3.4б/$$

$$\bar{D}^{\dot{\kappa}} \bar{D}_{\dot{\kappa}} P^{n}(D_{\alpha} W_{\beta\gamma\delta})|_{\theta=0} = 0. \qquad /3.4в/$$

Все остальные уравнения, следующие из /3.2/, будут следствием /3.4а, б, в/. /Они будут получаться из последних с помощью ковариантного дифференцирования по x, так как имеют место /3.3//.

Выпишем связи /3.4а,б,в/ для уравнений /1.4а/. Ясно, что /3.4а/ дает как раз /1.4а/ с учетом /2.1б/. Остальные уравнения /3.4б,в/ связывают напряженности $S_{\alpha\beta\gamma}$ и $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, причем эти связи для соответствующих канонических типов выглядят следующим образом:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\gamma\delta}{}_{\mu\nu} = 0, \qquad /3.5а/$$

$$D_{\dot{\kappa}\alpha} S_{\beta\gamma\delta} C^{\gamma\delta\mu\nu} + C_{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\dot{\kappa}}{}^{\gamma} S^{\delta\mu\nu} = 0, \qquad /3.5б/$$

$$D_{\dot{\kappa}\gamma} S_{\alpha\beta\delta} D^{\dot{\kappa}\gamma} S^{\delta\mu\nu} + 4i(S_{\gamma\beta}{}^{\lambda} S_{\lambda\alpha\delta} + S_{\gamma\alpha}{}^{\lambda} S_{\lambda\beta\delta} + S_{\gamma\delta}{}^{\lambda} S_{\lambda\alpha\beta})C^{\gamma\delta\mu\nu} +$$

$$+ 4i C_{\alpha\beta\gamma\delta}(S^{\gamma\delta\lambda} S_{\lambda}{}^{\mu\nu} + S^{\gamma\mu\lambda} S_{\lambda}{}^{\delta\nu} + S^{\gamma\nu\lambda} S_{\lambda}{}^{\delta\mu}) = 0. \qquad /3.5в/$$

Для некоторых из остальных канонических типов мы ограничимся линеаризованным приближением. Так как суперполе $W_{\alpha\beta\gamma}$ пропорционально гравитационной постоянной κ в пределе $\kappa \to 0$, то в линеаризованном случае, по определению, вместо /3.1/ мы рассматриваем

$$\lim_{\kappa \to 0} \frac{1}{\kappa^{n}} P^{n}(W_{\alpha\rho\gamma} D_{\phi} W_{\rho\sigma\tau}) = 0. \qquad /3.6/$$

Из уравнения вида /3.6/ можно получить другие уравнения для $W_{\alpha\beta\gamma}$ и его производных с помощью дифференцирования. Отметим, что при этом коммутационные соотношения для некоторых ковариантных производных отличаются от соответствующих плоских на члены, пропорциональные по $W_{\alpha\beta\gamma}$ и $D_\alpha W_{\beta\gamma\delta}$, исчезающие при $\kappa \to 0$.

В рассматриваемом приближении формулы, естественно, укорачиваются и для типов /4/ и /3.1/ имеют вид

$$[4] \quad \partial_{\dot{\kappa}\mu} S_{\alpha\beta\nu} C^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} + C_{\alpha\beta\mu\nu} \partial_{\dot{\kappa}}{}^{\mu} S^{\nu}{}_{\gamma\delta} = 0, \qquad /3.7а/$$

$$\partial_{\dot{\kappa}\mu} S_{\alpha\beta\nu} \partial^{\dot{\kappa}\mu} S^{\nu}{}_{\gamma\delta} = 0, \qquad /3.7б/$$

$$[3.1] \quad \partial_{\dot{\kappa}\alpha} S_{\beta\gamma\delta} C^{\gamma\delta\mu\nu} C_{\mu\nu\rho\sigma} + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\dot{\kappa}}{}^{\gamma} S^{\delta\mu\nu} C_{\mu\nu\rho\sigma} +$$

$$+ C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\gamma\delta\mu\nu} \partial_{\dot{\kappa}\mu} S_{\nu\rho\sigma} = 0, \qquad /3.8а/$$

$$\partial_{\dot{\kappa}\gamma} S_{\alpha\beta\delta} \partial^{\dot{\kappa}\gamma} S^{\delta\mu\nu} C_{\mu\nu\rho\sigma} - C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\dot{\kappa}\nu} S^{\delta\gamma\nu} \partial^{\dot{\kappa}\mu} S_{\nu\rho\sigma} -$$

$$-\partial_{\dot{\kappa}\alpha} S_{\beta\gamma\delta} C^{\gamma\delta\mu\nu} \partial_{\mu}{}^{\dot{\kappa}} S_{\nu\rho\sigma} = 0. \qquad /3.8б/$$

Остальные уравнения для типов [2.2], [2.1.1] и [1.1.1.1] довольно громоздки, и мы не будем их выписывать.

Итак, уравнения /3.7/, /3.8/ /или /3.5/ в нелинеаризованном случае/ вместе с /1.4/ придают суперсимметрически инвариантный вид канонической классификации тензора Вейля. При этом эти уравнения являются наиболее слабыми условиями на напряженности $S_{\alpha\beta\gamma}$ и $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, гарантирующими суперсимметрию этой классификации.

Авторам приятно поблагодарить А.Гальперина, Е.Иванова и Э.Сокачева за конструктивное обсуждение и замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Дадим решение линеаризованных уравнений /3.7/ и /3.8/, в которых $S_{\alpha\beta\gamma}$ выражено через потенциал:

$$S_{\alpha\beta\gamma} = 4\kappa\, \partial_{\alpha}{}^{\dot{\alpha}} \psi_{\beta\gamma\dot{\alpha}} \quad . \qquad /П.1/$$

Спин-векторный потенциал удовлетворяет свободному уравнению Рарита-Швингера. Иными словами, имеет место представление

$$\psi_{\alpha\beta\dot\beta} = \int \frac{d^3k}{k^0} e^{ik^a x_a} \psi_{\alpha\beta\dot\beta}(k), \qquad /П.2/$$

где вектор k^a изотропен, а величины $\psi_{\alpha\beta\dot\beta}(k)$ должны удовлетворять некоторым алгебраическим соотношениям с k^a, явный вид которых нам не понадобится.

Подставим напряженность /П.1/ в связи /3.7а,б/:

$$\partial_{\dot\kappa\mu} \partial_\nu{}^{\dot a} \psi_{\beta a a} C^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} + C_{\alpha\beta\mu\nu} \partial_{\dot\kappa}{}^{\mu} \partial^{\nu\dot a} \psi_{\gamma\delta\dot\nu} = 0, \qquad /П.3а/$$

$$\partial_{\dot\kappa\mu} \partial_{\nu\dot a} \psi_{\alpha\beta\dot a} \partial^{\dot\kappa\mu} \partial^{\nu\dot a} \psi_{\gamma\delta\dot\iota} = 0. \qquad /П.3б/$$

Здесь $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ принадлежит каноническому типу [4]. Согласно /1.2/, /1.4а/

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_\alpha \eta_\beta \eta_\gamma \eta_\delta, \quad [\eta_\alpha \eta_\beta] = 0. \qquad /П.4/$$

Обозначим его главный изотропный вектор /1.3/ через p^a. В силу /П.4/

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\dot a} = 0, \qquad /П.5а/$$

$$p^{\alpha\dot a} p_{\alpha\dot\beta} = p^{\alpha\dot a} p_{\beta\dot a} = 0. \qquad /П.5б/$$

Отсюда ясно, что /П.3а,б/ имеет решение типа /П.2/ со специальным ограничением:

$$\psi_{\alpha\beta\dot\beta}(k) = \delta^4(\vec k - a\vec p)\, \phi_{\alpha\beta\dot\beta}(p, a), \qquad /П.6/$$

где a - произвольное вещественное число. Уравнение /П.6/ означает, что спин-векторное поле задается суперпозицией волн, распространяющихся вдоль направления 3-вектора $\vec p$. Отметим, что этот результат заранее очевиден, поскольку канонический тип [4] описывает гравитационные волны вдоль направления вектора $\vec p$, а суперсимметрия связывает гравитационное и спин-векторное поля.

Аналогичный анализ показывает, что это решение имеет место и для канонического типа [3.1]. Тогда

$$C_{\alpha\beta\gamma\dot\delta} = \eta^1_{(\alpha} \eta^1_\beta \eta^1_\gamma \eta^2_{\delta)}. \qquad /П.7/$$

В данном случае имеются два главных вектора. Один из них трехкратно вырожден. Именно для него, как можно убедиться, имеет место решение /П.6/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Finkelstein R.J., Kim J. Preprint UCLA/81/TEP2.
2. Aichelburg P.C., Dereli T. Phys.Rev., 1978, D18, v. 6, p. 1754.
3. Penrose R. Ann. of Phys., 1960, 10, p. 171.
4. Pirani F.A.E. Brandeis Summer Institute in Theor.Phys., 1964, v. 1, p. 249, Englewood Cliff, Prentice-Hall, 1965.
5. Sachs R. Lectures at les Houches Summer School, 1963. New York-London, Gordon and Breach, 1964.
6. Grimm R.,Wess J., Zumino B. Nucl.Phys., 1979, B152, p. 255.
7. Огиевецкий В.И., Сокачев Э.С. ЯФ, 1980, т. 32, с.с. 870, 1142.
8. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. Физматгиз, М., 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 июля 1981 года.