объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-81-435

В.П.Гердт, А.Ю.Жарков

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Направлено в ТМФ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В [2] было предложено искать общее решение уравнений Чу-Лоу для статического p-волнового πN-рассеяния в виде следующего ряда:

$$S_i(w) = \sum_{j=0}^{\infty} S_{ij}(w) C^j(w), \qquad /1/$$

где S_i $(i = 1 \div 3)$ - матричные элементы S - матрицы для p-волн; $w = \arcsin \nu/\pi$ / ν - энергия пиона в единицах его массы/ - униформизующая переменная, в терминах которой функции $S_i(w)$ являются мероморфными, причем $S_i^*(w) = S_i(w^*)$; $S_{i0}(w)$ - единственное /кроме тривиального - $S_i(w) = 1$ / частное решение уравнений Чу-Лоу, имеющее конечное число полюсов [3]:

$$S_{10}(w) = \frac{w^2(w-2)^2}{(w^2-1)^2}, \quad S_{20}(w) = \frac{w^2(w-2)}{(w-1)^2(w+1)}, \quad S_{30}(w) = \frac{w^2}{(w-1)^2}, \qquad /2/$$

$C(w)$ - одна из трех произвольных мероморфных функций, определяющих общее решение*, такая, что

$$C(w+1) = -C(w), \quad C(-w) = C(w), \quad C^*(w) = C(w^*). \qquad /3/$$

Представление /1/ является естественным обобщением локальной структуры общего решения в окрестности упругого порога πN-рассеяния, детально изученной в работах [4,5]. С другой стороны, нулевое приближение /2/ является точным решением уравнений Чу-Лоу. Это позволяет свести исходную нелинейную задачу к бесконечной цепочке линейных разностных уравнений, определяющих коэффициенты $S_{ij}(w)$ в разложении /1/. На этом пути в [2] были найдены коэффициенты $S_{i1}(w)$ линейного по $C(w)$ приближения, которые, как и нулевое приближение /2/, являются рациональными функциями и имеют вид

$$S_{11}(w) = \frac{4(w^2-w+1)^2}{(w^2-1)^4}, \quad S_{21}(w) = -\frac{2(w^2-w+1)}{(w-1)^4(w+1)}, \quad S_{31}(w) = \frac{1}{(w-1)^4}. \qquad /4/$$

---

* Зависимость от двух других произвольных функций $\beta(w)$ и $D(w)$ тривиальна и всегда может быть учтена /см. раздел 5/.

Целью настоящей работы является нахождение квадратичных по $C(w)$ вкладов в разложении /1/. Следуя программе действий, предложенной в [2] и кратко описанной в разделе 2 данной работы, мы сначала получим квадратичное приближение для инвариантной кривой /общего интеграла/ уравнений Чу-Лоу /раздел 3/. Здесь мы рассмотрим метод решения соответствующего линейного разностного уравнения, который используем для решения остальных уравнений, определяющих коэффициенты $S_{i2}(w)$ /раздел 4/. В разделе 5 мы обсудим полученные результаты. Отметим, и это уже подчеркивалось ранее [2,5], что построение общего решения уравнений Чу-Лоу в виде ряда /1/ требует проведения громоздких аналитических выкладок, объем которых быстро возрастает с ростом порядка приближения по $C(w)$. В настоящей работе мы использовали программную систему REDUCE-2 [6], имеющуюся в ОИЯИ на ЭВМ ЕС-1040 и CDC-6500 и являющуюся одной из наиболее развитых программных систем для аналитических вычислений на ЭВМ [7].

2. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

Уравнения Чу-Лоу, первоначально предложенные в интегральной форме [1], можно переформулировать в виде следующей системы нелинейных разностных уравнений [8]:

$$S_i(w+1) = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{3} A_{ij} S_j(w)}, \qquad A = \frac{1}{9}\left\|\begin{matrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{matrix}\right\| \qquad /5/$$

$$S_i(w) S_i(1-w) = 1, \quad i = 1 \div 3.$$

Подстановка разложения /1/ в уравнения /5/, приводя к их линеаризации, "перепутывает", однако, функции $S_{ij}(w)$ с разными i при фиксированном порядке j. Это усложняет анализ и решение получаемой цепочки линейных разностных уравнений. Ситуация значительно упрощается при переходе к новым зависимым переменным $x(w)$, $y(w)$ и $z(w)$, обладающим определенной четностью по w:

$$x(w) = -x(-w), \quad y(w) = y(-w), \quad z(w) = z(-w), \qquad /6/$$

и связанным с функциями $S_i(w)$ соотношениями

$$\begin{aligned} S_1 &= z(1+4y-4x), \\ S_2 &= z(1-2y-x), \\ S_3 &= z(1+y+2x). \end{aligned} \qquad /7/$$

Преобразование /7/ впервые было рассмотрено в работе [9] и оказалось исключительно плодотворным [2-5,9-11]. Уравнения Чу-Лоу

в новых переменных имеют вид

$$x(w+1) = F(x(w), y(w)), \qquad /8а/$$

$$F(x,y) = \frac{x+2x^2-xy-2y^2}{1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2},$$

$$y(w+1) = -F(y(w), x(w)), \qquad /8б/$$

$$z(w+1)\, z(w)[1-2y(w+1)+x(w+1)][1-2y(w)-x(w)] = 1, \qquad /8в/$$

где $x(w)$, $y(w)$ и $z(w)$ удовлетворяют /6/ и являются мероморфными действительными функциями.

Именно анализ уравнений /8/ позволил установить зависимость общего решения от произвольной функции $C(w)$ со свойствами /3/. Эта функция определяет структуру инвариантной кривой /общего интеграла/ уравнений /8а/-/8б/ [10,11]:

$$y(w) = f(x(w), C(w)), \quad f(x,C) = f(-x,C), \qquad /9/$$

причем $f(x,C)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$-F(f(x,C),x) = f(F(x, f(x,C)), -C), \qquad /10/$$

вытекающему из уравнений /8/ [10].

Формулам /1/, /2/, /4/ соответствуют следующие разложения:

$$y = f(x,C) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) C^i, \quad f_0(x) = x^2, \quad f_1(x) = x^4, \qquad /11/$$

и

$$x(w) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(w) C^i(w), \quad x_0(w) = \frac{1}{w}, \quad x_1(w) = \frac{2}{w^3(w^2-1)}, \qquad /12а/$$

$$y(w) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(w) C^i(w), \quad y_0(w) = \frac{1}{w^2}, \quad y_1(w) = \frac{w^2+3}{w^4(w^2-1)}, \qquad /12б/$$

$$z(w) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(w) C^i(w), \quad z_0(w) = \frac{w^4}{(w^2-1)^2}, \quad z_1(w) = \frac{4w^2}{(w^2-1)^4}. \qquad /12в/$$

Разложения /11/-/12/ были введены в работе [2]. Там же было показано, что их использование приводит к линеаризованной форме уравнений Чу-Лоу, представляющей собой бесконечную цепочку линейных разностных уравнений вида

$$t^4 f_n(t) + (-1)^n (t+1)^4 f_n(t+1) = F_n(t), \quad t = \frac{1}{x}, \qquad /13а/$$

$$w^2 x_n(w) - (-1)^n (w+1)^2 x_n(w+1) = X_n(w), \qquad /13б/$$

$$\frac{(w^2-1)^2}{w^4} z_n(w) + (-1)^n \frac{w^2(w+2)^2}{(w+1)^4} z_n(w+1) = Z_n(w). \qquad /13в/$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

Уравнения /13а/ не зависят от /13б/ и /13в/, причем их неоднородная часть $F_n(t)$ определяется из функционального уравнения /10/ и зависит от решений $f_i(t)$ $(i=1\div n-1)$ предшествующих уравнений цепочки /13а/. Неоднородная часть $X_n(w)$ уравнений /13б/ получается в результате подстановки /10/ и /12а/ в уравнение /8а/ и зависит поэтому как от функций $f_i(t)$ $(i=1\div n)$, так и от решений $x_i(w)$ $(i=1\div n-1)$ цепочки /13б/. Коэффициенты $y_i(w)$ разложения /12б/ находятся, очевидно, подстановкой /12а/ в /11/. Наконец, неоднородная часть $Z_n(w)$ уравнений /13в/ определяется из уравнений /8в/ и зависит от структуры функций $x_i(w)$, $y_i(w)$ $(i=1\div n)$, а также функций $z_i(w)$ $(i=1\div n-1)$.

Таким образом, преобразование /7/ позволяет "расцепить" уравнения линейной цепочки для коэффициентов $S_{ij}(w)$ в разложении /1/. Более того, уравнения /12/ тривиальным образом сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами. Следовательно, ключевую роль при их решении играет структура их неоднородных частей.

3. КВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ИНВАРИАНТНОЙ КРИВОЙ

Перейдем теперь к решению уравнений /13/ для квадратичных по функции $C(w)$ слагаемых в разложениях /11/-/12/. В соответствии со сказанным выше рассмотрим сначала уравнение /13а/ при $n=2$. Это уравнение имеет следующий явный вид[2]:

$$t^4 f_2(t) + (t+1)^4 f_2(t+1) = \frac{-15t^4 - 30t^3 - 7t^2 + 8t + 8}{(t^2-1)^2\, t^2 (t+2)^2}. \qquad /14/$$

Обозначая, как и в /13а/, правую часть /14/ через $F_2(t)$, разложим эту функцию на элементарные дроби:

$$F_2(t) = \frac{2}{t^2} + \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{(t+2)^2} - \frac{2}{3(t-1)} + \frac{2}{3(t+2)}.$$

Отсюда легко видеть, что решением уравнения /14/ является выражение

$$f_2(t) = -\frac{2}{3t^4}\xi(t) - \frac{t^4 + 20t^2 - 9}{3t^6(t^2-1)^2}, \qquad /15/$$

в котором функция $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi(t) + \xi(t+1) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}. \qquad /16/$$

Решение этого уравнения, четное по $t=1/x$ в силу /9/, есть

$$\xi(t) = \frac{G(1+t) + G(1-t)}{2}, \qquad /17/$$

где $G(t)$ - известная функция[12], обладающая свойством

$$G(z) + G(z+1) = \frac{2}{z}$$

и связанная с логарифмической производной Γ-функции

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \qquad /18/$$

соотношением

$$G(z) = \Psi\left(\frac{1+z}{2}\right) - \Psi\left(\frac{z}{2}\right).$$

Из /11/ и /15/ получаем вид инвариантной кривой в квадратичном приближении:

$$y = x^2 + Cx^4 + C^2 x^4\left[-\frac{2}{3}\xi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{9x^6 - 20x^4 - x^2}{3(x^2-1)^2}\right]. \qquad /19/$$

Из выражения /19/ видно, что квадратичное приближение, в отличие от линейного, содержит мероморфную функцию /17/, имеющую бесконечное число полюсов. Отсюда с необходимостью следует наличие таких функций в квадратичных членах разложения /1/, рассмотренных в следующем разделе.

4. КВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ S-МАТРИЦЫ

Последовательная подстановка разложений /19/ и /12а/ в уравнение /8а/ и выделение в полученном выражении вкладов $\sim C^2(w)$ приводит к следующей структуре уравнения /13б/ при $n=2$:

$$(w+1)^2 x_2(w+1) - w^2 x_2(w) = \frac{4(2w+1)}{3w(w^2-1)(w+2)}\xi(w) + \frac{2(2w^5+4w^4-2w^3-37w^2-33w-24)}{3w^3(w+1)^3(w-1)^2(w+2)^2}. \qquad /20/$$

Решение уравнения /20/ естественно искать в виде

$$w^2 x_2(w) = A(w)\,\xi(w) + B(w). \qquad /21/$$

Подстановка /21/ в /20/ и учет свойства /16/ функции $\xi(w)$ показывает, что уравнение /21/ удовлетворяется, если функции $A(w)$

и $B(w)$ являются решениями уравнений

$$A(w+1)+A(w)=-\frac{4(2w+1)}{3w(w^2-1)(w+2)},$$

$$B(w+1)-B(w)=\frac{2(2w^4+4w^3-35w^2-37w-24)}{3w^3(w+1)^3(w-1)^2(w+2)^2}. \qquad /22/$$

Неоднородные части уравнений /22/ являются рациональными функциями. Поэтому к уравнениям /22/ применим метод решения, основанный на разложении их неоднородных частей на элементарные дроби и использованный выше при решении уравнения /14/. Решая уравнения /22/ указанным методом и подставляя результат в формулу /21/, получим

$$x_2(w)=-\frac{4}{3w^3(w^2-1)}\xi(w)-\frac{\eta(w)}{w^2}+\frac{6w^6-11w^4+3w^2+12}{3w^5(w^2-1)^2}. \qquad /23/$$

Нечетная функция $\eta(w)$, входящая в равенство /23/, удовлетворяет разностному уравнению

$$\eta(w)-\eta(w+1)=\frac{1}{w^2}+\frac{1}{(w+1)^2} \qquad /24/$$

и связана с производной Ψ-функции /18/ соотношением

$$\eta(w)=\Psi'(w)-\Psi'(-w). \qquad /25/$$

Подставляя разложение /12а/ в выражение /19/ и используя вид /23/ функции $x_2(w)$, находим коэффициент $y_2(w)$ разложения /12б/:

$$y_2(w)=-\frac{2(w^2+3)}{3w^4(w^2-1)}\xi(w)-\frac{2}{w^3}\eta(w)+\frac{12w^6-23w^4+10w^2+21}{3w^6(w^2-1)^2}. \qquad /26/$$

Перейдем теперь к уравнению /13в/ линейной цепочки /13/ при $n=2$. Функция $Z_2(w)$ определяется подстановкой разложений /12/ с учетом равенств /23/ и /26/ в уравнение /8в/ и отделением в результирующем выражении квадратичных по $C(w)$ вкладов. Это приводит к следующей форме уравнения /13в/:

$$\frac{(w^2-1)^2}{w^4}z_2(w)+\frac{w^2(w+2)^2}{(w+1)^4}z_2(w+1)=-\frac{8(2w+1)}{w^2(w^2-1)^2(w+2)^2}\xi(w)-\frac{4(2w+1)}{w(w^2-1)(w+2)}\eta(w)+ \qquad /27/$$

$$+\frac{4(12w^{12}+78w^{11}+146w^{10}-53w^9-427w^8-268w^7+322w^6+425w^5+230w^4+160w^3+167w^2+108w+72)}{3w^4(w^2-1)^4(w+2)^4}.$$

Уравнение /27/ решается методом, использованным выше при решении уравнения /20/, а именно: заменой

$$\frac{(w^2-1)^2}{w^4}z_2(w)=P(w)\xi(w)+Q(w)\eta(w)+R(w),$$

сводящей уравнение /27/ к линейным разностным уравнениям на функции $P(w)$, $Q(w)$, $R(w)$, неоднородные части которых являются рациональными функциями. Эти новые уравнения решаются разложением из неоднородных частей на элементарные дроби. Решение уравнения /27/ указанным методом дает

$$z_2(w)=\frac{8w^2}{3(w^2-1)^4}[2w^2(w^2-1)^2-1]\xi(w)+\frac{w^4}{2(w^2-1)^2}\xi''(w)-\frac{4w^3}{(w^2-1)^3}\eta(w)+ \qquad /28/$$

$$+\frac{16w^{10}-15w^8-43w^6+65w^4+43w^2+30}{6(w^2-1)^6},$$

где через $\xi''(w)$ обозначена вторая производная функции $\xi(w)$.

Используя формулы /7/, /12/, /23/, /26/ и /28/, выпишем теперь явный вид коэффициентов $S_{i2}(w)$ в разложении /1/:

$$S_{12}(w)=\frac{8}{3(w^2-1)^4}[2w^2(w^2-1)^2(w-2)^2-(w^2-w+1)^2]\xi(w)+\frac{w^2(w-2)^2}{2(w^2-1)^2}\xi''(w)+$$

$$+\frac{4w(w-2)(w^2-w+1)}{(w^2-1)^3}\eta(w)+$$

$$+\frac{16w^{11}-112w^{10}+145w^9+244w^8-479w^7-76w^6+475w^5-220w^4+223w^3-196w^2+138w-24}{6w(w^2-1)^6},$$

$$S_{22}(w)=\frac{4}{3(w-1)^4(w+1)^2}[4w^2(w-1)^2(w+1)(w-2)+w^2-w+1]\xi(w)+\frac{w^2(w-2)}{2(w-1)^2(w+1)}\xi''(w)+$$

$$+\frac{w(w^2-w+4)}{(w-1)^3(w+1)^2}\eta(w)+\frac{16w^8-76w^7+85w^6+18w^5-58w^4+16w^3-13w^2-6w-6}{6w(w-1)^6(w+1)^3}, \qquad /29/$$

$$S_{32}(w)=\frac{2}{3(w-1)^4}[8w^2(w-1)^2-1]\xi(w)+\frac{w^2}{2(w-1)^2}\xi''(w)-\frac{2w}{(w-1)^3}\eta(w)+$$

$$+\frac{16w^5-40w^4+25w^3+8w^2-15w+12}{6w(w-1)^6}.$$

Соответственно выражение

$$S_i(w)=\sum_{j=0}^{2}S_{ij}(w)C^j(w), \qquad /30/$$

коэффициенты которого определены в /2/, /4/ и /29/, дает общее решение уравнений Чу-Лоу /5/ в квадратичном по произвольной функции /3/ приближении.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Найденное выше квадратичное приближение для общего решения уравнений Чу-Лоу существенно отличается по своим свойствам от линейного. Формулы /29/ ясно показывают, что коэффициенты $S_{i2}(w)$ в /1/ не являются простыми рациональными функциями, как /2/ и /4/. Присутствие функций $\xi(w)$ и $\eta(w)$ в выражениях /29/ приводит к бесконечному числу полюсов у коэффициентов $S_{i2}(w)$. Все эти полюса расположены в целых точках на вещественной оси комплексной w-плоскости

$$w = \pm n \quad (n=0,1,2,\ldots). \qquad /31/$$

Такое заключение вытекает из формул /29/ и представления функций $\xi(w)$ и $\eta(w)$ рядами

$$\xi(w) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{w^2-n^2}, \qquad \eta(w) = -4w\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(w^2-n^2)^2}. \qquad /32/$$

В справедливости /32/ легко убедиться либо из формул /17/, /25/ и известных разложений для G- и Ψ-функций [12], либо непосредственно из разностных уравнений /16/ и /21/.

Процедура получения линейной цепочки /13/ из уравнений /8/, описанная в [2], показывает, что правые части уравнений /13/ для $n \geq 1$ полиномиально зависят от решений предшествующих уравнений цепочки и их производных. Поэтому можно ожидать, что коэффициенты $S_{ij}(w)$ для степенных вкладов высших порядков в разложении /1/ также будут иметь полюса в точках /31/. Конечно, говоря о структуре полюсов общего решения, необходимо в дополнение к функции /3/ учесть еще две произвольные мероморфные функции $\beta(w)$ и $D(w)$, от которых зависит общее решение. Эти функции обладают свойствами [2-4]

$$\beta(w)=\beta(w+1), \quad \beta(w)=-\beta(-w), \quad \beta^*(w)=\beta(w^*),$$
$$D(w)D(w+1)=1, \quad D(w)=D(-w), \quad D^*(w)=D(w^*). \qquad /33/$$

Их легко ввести в разложение /1/ посредством замены

$$S_i(w) \to D(w)S_i(w+\beta(w)),$$

вытекающей из структуры уравнений /5/ и приводящей к соответствующему преобразованию коэффициентов разложения /1/.

Если функция $\beta(w)$ несингулярна в нуле, то из соотношений /33/ немедленно следует обращение ее в нуль на множестве точек /31/. В этом случае учет произвола /33/ приводит, вообще говоря, к расширению множества /31/ за счет включения в него полюсов функции $D(w)$ и нецелых корней уравнения

$$w+\beta(w)=0.$$

Особого внимания заслуживает полюс в точке $w=0$. Важность этого полюса обусловлена дополнительным требованием, которому обязаны удовлетворять физически интересные решения уравнений /5/, а именно [2-4]: функции $S_i(w)$ должны иметь в нуле полюс первого порядка с вычетом

$$\mathrm{Res}\, S_i(0) = \frac{4}{3\pi} f^2\lambda_i, \quad \lambda = (-4,-1,2). \qquad /34/$$

Примечательно, что выражения /29/ ведут себя в нуле нужным образом:

$$S_{i2}(w) \underset{w\to 0}{\sim} \frac{\lambda_i}{w},$$

в отличие от функций /2/ и /4/, не имеющих полюса в нуле. Следовательно, в рамках квадратичного приближения /30/ и с учетом произвола /33/ легко удовлетворить требованию /34/, если наложить на произвольные функции /3/ и /33/ следующие локальные ограничения:

$$\beta(0)=0, \qquad /35а/$$

$$D(0)C^2(0)=\frac{4}{3\pi}f^2. \qquad /35б/$$

Первое условие /35а/ эквивалентно, как отмечалось выше, требованию несингулярности функции $\beta(w)$ в нуле. Второе локальное условие /35б/ показывает, что малость константы связи f^2 ($f^2 \approx 0{,}08$) может сыграть ключевую роль при исследовании вопроса о сходимости разложения /1/ для физически интересных решений, который пока остается открытым.

Допустим, например, что $D(0) \sim 1$, как в случае s-волнового πN-рассеяния, где $D(0) \approx 1{,}2$ [13]. Тогда из условия /35б/ получаем оценку

$$C(0) \sim \frac{2f}{\sqrt{3\pi}} \approx 0{,}18,$$

которая дает надежду, что функциональный ряд /1/ является разложением по степеням малого параметра, по крайней мере в окрестности борновского полюса.

В настоящей работе мы интенсивно использовали программную систему REDUCE-2 [6], имеющуюся в ОИЯИ на ЭВМ ЕС-1040 и CDC-6500.

Система REDUCE-2 имеет встроенный аппарат манипуляций со степенными рядами и рациональными функциями. По этой причине данная система позволяет выполнить на ЭВМ наиболее громоздкую часть аналитических вычислений, связанных с построением общего решения уравнений Чу-Лоу в форме /1/. Сюда включаются, во-первых, аналитические выкладки, связанные с нахождением правых частей уравнений /13/ и, во-вторых, разложение входящих в них рациональных функций на элементарные дроби.

Вычисление неоднородных частей уравнений /14/, /20/ и /27/ было полностью автоматизировано в рамках системы REDUCE-2 и потребовало суммарно около часа машинного времени на ЕС-1040.

Операция разложения рациональных функций на элементарные дроби отсутствует в системе REDUCE-2. С целью ее выполнения мы разработали и реализовали на языке системы специальный алгоритм, требующий, например, менее минуты машинного времени для разложения рациональной дроби, входящей в правую часть уравнения /27/.

В заключение авторы выражают благодарность В.А.Мещерякову, В.И.Журавлеву, К.В.Рериху и Б.Н.Хоромскому за полезные обсуждения и признательны также В.В.Полянскому за помощь в проведении вычислений с помощью системы REDUCE-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, v.101, No.5, pp.1570-1579.
2. Гердт В.П. ОИЯИ, Р2-80-436, Дубна, 1980.
3. Журавлев В.И., Мещеряков В.А. ЭЧАЯ, 1974, т.5, вып.1, с.172-222.
4. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, т.24, №2, с.155-163.
5. Гердт В.П. ОИЯИ, Д11-80-13, Дубна, 1980, с.159-169.
6. Hearn A.S. REDUCE User's Manual. Second Edition. Univ. of Utah, 1973.
7. Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. УФН, 1980, т.130, вып.1, с.113-147.
8. Мещеряков В.А., Рерих К.В. ТМФ, 1970, т.3, №1, с.78-93.
9. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971.
10. Гердт В.П. ЖВМ и МФ, 1979, т.19, №6, с.1601-1608.
11. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-80-728, Дубна, 1980.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.1. "Наука", М., 1973.
13. Гердт В.П., Журавлев В.И., Мещеряков В.А. ЯФ, 1974, т.20, вып.4, с.756-761.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 июня 1981 года.