сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-81-434

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1981

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В РИМАНОВОМ МИРЕ

Нелинейная электродинамика в n-мерном мире, аналогичная электродинамике Борна-Инфельда [1], сформулирована в работе [2]. Приведем основные положения этой теории.

Антисимметричный тензор электромагнитного поля удовлетворяет условию

$$\partial_\mu \phi_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \phi_{\beta\mu} + \partial_\beta \phi_{\mu\alpha} = 0, \qquad /1/$$

а потому полагаем

$$\phi_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi_\beta - \partial_\beta \phi_\alpha , \qquad /2/$$

где ϕ_α - ковекторное поле.

Симметричный тензор метрического поля $h_{\alpha\beta}$ имеет сигнатуру $1,\ldots,1,-k^2$. Число элементов в этой строке равно n-размерности мира. Пространство скоростей материальной точки является $(n-1)$-мерным пространством Лобачевского с кривизной $K=-1/k^2$. Константу k считаем равной скорости света c. Определитель h матрицы $h_{\alpha\beta}$ отрицателен.

Обозначаем $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta}$. Определители g и J матриц $g_{\alpha\beta}$ и $\delta_\alpha^\beta - \phi_\alpha^\beta$, где δ_α^β - символ Кронекера и

$$\phi_\alpha^\beta = \phi_{\alpha\sigma} h^{\sigma\beta}, \qquad /3/$$

связаны соотношением $g = hJ$. Электромагнитное поле считаем настолько слабым, что

$$J = \det(\delta_\alpha^\beta - \phi_\alpha^\beta) > 0. \qquad /4/$$

Обозначаем $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ тензор, взаимный тензору $g_{\alpha\beta}$, так что

$$g_{\sigma\alpha} \tilde{g}^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta = g_{\alpha\sigma} \tilde{g}^{\beta\sigma}, \qquad /5/$$

и пишем $\tilde{g}^{\alpha\beta} = \tilde{h}^{\alpha\beta} + \tilde{\phi}^{\alpha\beta}$, где $\tilde{h}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{\phi}^{\alpha\beta}$ - тензоры, первый из которых симметричен, а второй - антисимметричен.

В соответствии с принципом Лагранжа-Гильберта [3] рассматриваем функционал S от ковекторного поля ϕ_α и тензорного поля $h_{\alpha\beta}$, называемый действием. Вариацию δS действия представляем в виде

$$\delta S = \int \ldots \int [T^\alpha \delta \phi_\alpha - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta}] \sqrt{-h}\, dx^1 \ldots dx^n$$

где $x^1, \dots, x^n$ - мировые координаты, определяющие некоторую карту /4/ пространственно-временного многообразия.

В качестве уравнений электромагнитного поля наряду с /2/ принимаем $T^{\alpha} = 0$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля принимаем равным $T^{\alpha\beta}$.

В качестве действия выбираем интеграл

$$S = \int \dots \int [\sqrt{-g} - \sqrt{-h}]\, dx^1 \dots dx^n. \qquad /6/$$

Отсюда находим полевые уравнения

$$\partial_\mu (\tilde{\phi}^{\mu\alpha} \sqrt{-g}) = 0 \qquad /7/$$

и тензор энергии-импульса

$$T^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \sqrt{J}\, \tilde{h}^{\alpha\beta}. \qquad /8/$$

Чтобы перейти к линейной электродинамике в n-мерном мире, аналогичной электродинамике Максвелла, надо заменить ϕ_α на $b^{-1}\phi_\alpha$, S на $b^2 S$ и устремить константу b к бесконечности. Поскольку для любого тензора ϕ^β_α

$$\det(\delta^\beta_\alpha - \frac{1}{b}\phi^\beta_\alpha) = 1 - \frac{1}{b}\phi^\alpha_\alpha + \frac{1}{2b^2}(\phi^\alpha_\alpha \phi^\beta_\beta - \phi^\alpha_\beta \phi^\beta_\alpha) + \dots,$$

то вследствие антисимметричности тензора $\phi_{\alpha\beta}$

$$\det(\delta^\beta_\alpha - \frac{1}{b}\phi^\beta_\alpha) = 1 + \frac{1}{2b^2}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} + \dots,$$

где

$$\phi^{\alpha\beta} = h^{\alpha\mu}\phi^\beta_\mu. \qquad /9/$$

Обозначая

$$F = \frac{1}{2}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta}, \qquad /10/$$

находим

$$\lim_{b\to\infty} b^2 S(b) = \int \dots \int \frac{1}{2} F \sqrt{-h}\, dx^1 \dots dx^n. \qquad /11/$$

Затем находим полевые уравнения

$$\partial_\mu (\phi^{\mu\alpha} \sqrt{-h}) = 0 \qquad /12/$$

и тензор энергии-импульса

$$T^{\alpha\beta} = \phi^\alpha_\mu \phi^{\mu\beta} - \frac{1}{2} F h^{\alpha\beta}. \qquad /13/$$

С помощью связности Кристоффеля

$$\left\{ {\mu \atop \alpha\ \beta} \right\} = \frac{1}{2} h^{\mu\sigma}(\partial_\beta h_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha h_{\sigma\beta} - \partial_\sigma h_{\alpha\beta})$$

составляем ковариантную производную от любого тензора и обозначаем ее D_α в отличие от частной производной ∂_α. Уравнения /1/, /2/, /7/ и /12/ можно записать в виде

$$D_\mu \phi_{\alpha\beta} + D_\alpha \phi_{\beta\mu} + D_\beta \phi_{\mu\alpha} = 0, \qquad /2'/$$

$$\phi_{\alpha\beta} = D_\alpha \phi_\beta - D_\beta \phi_\alpha, \qquad /7'/$$

$$D_\mu (\tilde{\phi}^{\mu\alpha} \sqrt{J}) = 0,$$

$$D_\mu \phi^{\mu\alpha} = 0. \qquad /12'/$$

Умножая /5/ на $\sqrt{J}$ и дифференцируя, получаем два тождества:

$$g_{\sigma\alpha} D_\beta (\sqrt{J}\, \tilde{g}^{\sigma\beta}) + \sqrt{J}\, \tilde{g}^{\sigma\beta} D_\beta \phi_{\sigma\alpha} = D_\alpha \sqrt{J},$$

$$g_{\alpha\sigma} D_\beta (\sqrt{J}\, \tilde{g}^{\beta\sigma}) + \sqrt{J}\, \tilde{g}^{\beta\sigma} D_\beta \phi_{\alpha\sigma} = D_\alpha \sqrt{J}.$$

Вычитая второе из первого, находим

$$h_{\sigma\alpha} D_\beta (\sqrt{J}\, \tilde{\phi}^{\sigma\beta}) + \phi_{\sigma\alpha} D_\beta (\sqrt{J}\, \tilde{h}^{\sigma\beta}) + \sqrt{J}\, \tilde{h}^{\sigma\beta} D_\beta \phi_{\sigma\alpha} = 0. \qquad /14/$$

Складывая одно с другим, получаем

$$h_{\sigma\alpha} D_\beta (\sqrt{J}\, \tilde{h}^{\sigma\beta}) + \phi_{\sigma\alpha} D_\beta (\sqrt{J}\, \tilde{\phi}^{\sigma\beta}) + \sqrt{J}\, \tilde{\phi}^{\sigma\beta} D_\beta \phi_{\sigma\alpha} = D_\alpha \sqrt{J}.$$

Так как

$$D_\alpha \sqrt{J} = \frac{1}{2} \sqrt{J}\, \tilde{g}^{\mu\nu} D_\alpha \phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{J}\, \tilde{\phi}^{\mu\nu} D_\alpha \phi_{\mu\nu}, \qquad /15/$$

то последнее тождество можно представить в виде

$$h_{\sigma\alpha} D_\beta (\sqrt{J}\, \tilde{h}^{\sigma\beta}) = \phi_{\sigma\alpha} D_\beta (\sqrt{J}\, \tilde{\phi}^{\sigma\beta}) =$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{J}\, \tilde{\phi}^{\mu\nu} (D_\alpha \phi_{\mu\nu} + D_\mu \phi_{\nu\alpha} + D_\nu \phi_{\alpha\mu}). \qquad /16/$$

На основании тождеств /14/ и /16/ заключаем, что в силу уравнений /1/ и /7/ ковариантная дивергенция тензора /8/ равна нулю и что уравнения /7/ можно преобразовать к виду

$$\tilde{h}^{\mu\nu} D_\mu \phi_{\nu\alpha} = 0. \qquad /17/$$

Аналогично в линейной электродинамике уравнения /12/ представляются в виде

$$h^{\mu\nu} D_\mu \phi_{\nu\alpha} = 0. \qquad /18/$$

В силу уравнений /1/ и /12/ ковариантная дивергенция тензора /13/ равна нулю.

В частном случае риманова мира, а именно в мире Пуанкаре-Минковского, существуют аффинные карты, покрывающие весь мир, в которых коэффициенты $h_{\alpha\beta}$ не зависят от координат, а потому $D_\alpha = \partial_\alpha$. Аффинную карту в мире Пуанкаре-Минковского называем нормальной, если
$$ds^2 = h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = dx^1dx^1 + \ldots + dx^{n-1}dx^{n-1} - k^2 dx^n dx^n .$$
В этом случае координата x^n играет роль глобального времени t в заданной инерциальной системе: $x^n = t$, а координаты $x^1,\ldots,x^{n-1}$ составляют нормальную декартову карту $(n-1)$-мерного евклидова пространства, покоящегося в заданной инерциальной системе. Аффинную карту в мире Пуанкаре-Минковского называем изотропной, если
$$ds^2 = h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = dx^1dx^1 + \ldots + dx^{n-2}dx^{n-2} + dx^{n-1}dx^n .$$
Изотропные координаты $u = x^{n-1}$, $v = x^n$ связаны с нормальными координатами $z = x^{n-1}$, $t = x^n$ следующим образом: $u = z - kt$, $v = z + kt$.

ПЛОСКАЯ БЕГУЩАЯ ВОЛНА

Пусть $x^1,\ldots, x^n$ – любая аффинная карта в мире Пуанкаре-Минковского. Будем искать решение уравнений электродинамики в виде $\phi_\alpha = \phi_\alpha(\xi)$, где $\xi = h_{\alpha\beta}k^\alpha x^\beta$, k^α – постоянный вектор. Имеем
$$\phi_{\alpha\beta} = k_\alpha\dot\phi_\beta - k_\beta\dot\phi_\alpha ,$$
где $k_\alpha = h_{\alpha\beta}k^\beta$, $\dot\phi_\alpha = \frac{d}{d\xi}\phi_\alpha$. Затем
$$D_\mu\phi_{\nu\alpha} = k_\mu(k_\nu\ddot\phi_\alpha - k_\alpha\ddot\phi_\nu).$$
Уравнения линейной электродинамики удовлетворятся, если принять условия
$$k^\nu k_\nu = 0, \quad k^\nu\phi_\nu = 0.$$
Докажем, что при этих условиях удовлетворятся и уравнения нелинейной электродинамики, а тензоры /8/ и /13/ примут одинаковый вид.

С этой целью найдем скаляр J и тензор $\tilde g^{\alpha\beta}$. Легко видеть, что в силу условия $k^\nu k_\nu = 0$
$$\delta^\mu_\alpha - \phi^\mu_\alpha = \delta^\mu_\alpha - k_\alpha\dot\phi^\mu + \dot\phi_\alpha k^\mu = (\delta^\mu_\nu - k_\nu\dot\phi^\mu)(\delta^\nu_\alpha + \dot\phi_\alpha k^\nu),$$
где $\dot\phi^\mu = h^{\mu\sigma}\dot\phi_\sigma$. Так как все миноры второго и более высоких порядков матрицы $k_\nu\dot\phi^\mu$ равны нулю, то ее характеристический многочлен равен $\det(\lambda\delta^\mu_\nu - k_\nu\dot\phi^\mu) = \lambda^n - \lambda^{n-1}k_\nu\dot\phi^\nu = \lambda^n$. Точно так и $\det(\delta^\nu_\alpha + \dot\phi_\alpha k^\nu) = \lambda^n$. Следовательно, $J = 1^n 1^n = 1$. Далее, так как
$$g_{\sigma\alpha} = h_{\sigma\alpha} + k_\sigma\dot\phi_\alpha - k_\alpha\dot\phi_\sigma = (h_{\nu\sigma} - k_\nu\dot\phi_\sigma)(\delta^\nu_\alpha + \dot\phi_\alpha k^\nu),$$

то в силу /5/
$$\tilde g^{\sigma\beta} = (h^{\sigma\mu} + k^\sigma\dot\phi^\mu)(\delta^\beta_\mu - \dot\phi_\mu k^\beta) =$$
$$= h^{\sigma\beta} - (\dot\phi_\mu\dot\phi^\mu)k^\sigma k^\beta + k^\sigma\dot\phi^\beta - k^\beta\dot\phi^\sigma .$$
Следовательно,
$$\tilde h^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - (\dot\phi_\mu\dot\phi^\mu)k^\alpha k^\beta ,$$
$$\tilde\phi^{\alpha\beta} = k^\alpha\dot\phi^\beta - k^\beta\dot\phi^\alpha = \phi^{\alpha\beta}.$$
Отсюда находим, что выражения для тензора /8/ и /13/ совпадают и равны
$$T^{\alpha\beta} = (\dot\phi_\mu\dot\phi^\mu)k^\alpha k^\beta . \qquad /19/$$
Уравнения /7/ совпадают с уравнениями /12/, а уравнения /17/ – с уравнениями /18/, поскольку $k^\mu D_\mu\phi_{\nu\alpha} = 0$.

РЕШЕНИЕ, ИЗОБРАЖАЕМОЕ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В МИРЕ ПУАНКАРЕ-МИНКОВСКОГО

Будем искать решение уравнений электродинамики в мире Пуанкаре-Минковского в виде $\phi_\alpha = \phi_\alpha(\xi,\eta)$, где $\xi = k_\alpha x^\alpha$, $\eta = \ell_\alpha x^\alpha$, а векторы k^α и ℓ^α постоянны и не пропорциональны друг другу, и примем следующие условия:
$$k_\nu k^\nu = 0, \quad \ell_\nu\ell^\nu = 0, \quad k^\nu\phi_\nu = 0, \quad \ell^\nu\phi_\nu = 0. \qquad /20/$$
С парой изотропных векторов k^α и ℓ^α можно связать изотропную карту и без ограничения общности положить $u = \xi$, $v = \eta$, что мы и сделаем немедленно. В силу условий /20/ в изотропной карте $\phi_{n-1} = 0$, $\phi_n = 0$. Искомое решение изображается двумерной поверхностью $x^p = \phi_p(u,v)$, $p = 1,\ldots, n-2$, в мире Пуанкаре-Минковского.

Введем векторные обозначения $\vec x = \{x^1,\ldots, x^{n-2}\}$, $\vec\phi = \{\phi^1,\ldots, \phi^{n-2}\}$, где $\phi^p = h^{p\mu}\phi_\mu$ и т.п. Частичное скалярное произведение $x^1\phi^1 + \ldots + x^{n-2}\phi^{n-2}$ обозначим $(\vec x\vec\phi)$. В этих обозначениях искомое решение записывается в виде
$$\vec x = \vec\phi(u, v). \qquad /21/$$
В данном случае при $p < n-1$ имеем
$$\phi_{n-1\,p} = -\phi_{p\,n-1} = \frac{\partial\phi_p}{\partial u}, \quad \phi_{np} = -\phi_{pn} = \frac{\partial\phi_p}{\partial v},$$
а остальные компоненты тензора /2/ равны нулю.

Рассмотрим сначала уравнения /18/. Ввиду того, что искомые функции не зависят от переменных $x^1, \ldots, x^{n-2}$, уравнения /18/ принимают вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(h^{n-1\,\nu}\frac{\partial}{\partial u}\phi_{\nu\alpha} + h^{n\nu}\frac{\partial}{\partial v}\phi_{\nu\alpha}\right) = 0,$$

а так как среди компонент $h^{n-1\,\nu}$ и $h^{n\nu}$ отличны от нуля только $h^{n-1\,n} = h^{n\,n-1} = 2$, то уравнения /18/ принимают совсем простой вид, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi_{n\alpha} + \frac{\partial}{\partial v}\phi_{n-1\,\alpha} = 0.$$

Последнее же означает, что в линейной электродинамике функция /21/ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\vec{\phi}}{\partial u\,\partial v} = 0. \qquad /22/$$

Переходя к нелинейной электродинамике, найдем сначала определитель g, а затем и тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta}$.

Обозначим $g_\alpha = \{g_{\alpha 1}, \ldots, g_{\alpha n}\}$ строку матрицы $g_{\alpha\beta}$. Заменив g_{n-1} на $g_{n-1} - \sum_{p=1}^{n-2}\frac{\partial\phi_p}{\partial u}g_p$ и g_n на $g_n - \sum_{p=1}^{n-2}\frac{\partial\phi_p}{\partial v}g_p$, нетрудно найти, что

$$g = \left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right) - \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right)\right]^2. \qquad /23/$$

Так как $h = -\frac{1}{4}$, то $J = -4g$.

Заметим, что интеграл

$$\Sigma = \iint\sqrt{-g}\,du\,dv \qquad /24/$$

равен площади поверхности /21/ в мире Пуанкаре-Минковского.

Возьмем теперь два ряда чисел y и s. Если $y^\alpha g_{\alpha\sigma} = s_\sigma$, то согласно /5/ $\tilde{g}^{\beta\sigma}s_\sigma = y^\beta$. Таким образом, чтобы найти $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, надо решить систему уравнений $y^\alpha g_{\alpha\sigma} = s_\sigma$. Обозначая $\vec{a} = \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}$, $\vec{b} = \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}$, запишем ее в следующем виде:

$$\vec{y} + \vec{a}y^{n-1} + \vec{b}y^n = \vec{s},$$

$$-(\vec{a}\vec{y}) + \frac{1}{2}y^n = s_{n-1}, \quad -(\vec{b}\vec{y}) + \frac{1}{2}y^{n-1} = s_n. \qquad /25/$$

Исключая отсюда $\vec{y}$, приходим к системе двух уравнений

$$(\vec{a}\vec{a})y^{n-1} + \left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right]y^n = s_{n-1} + (\vec{a}\vec{s}),$$

$$\left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right]y^{n-1} + (\vec{b}\vec{b})y^n = s_n + (\vec{b}\vec{s}),$$

а значит,

$$gy^{n-1} = (\vec{b}\vec{b})[s_{n-1} + (\vec{a}\vec{s})] - \left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right][s_n + (\vec{b}\vec{s})],$$

$$gy^n = (\vec{a}\vec{a})[s_n + (\vec{b}\vec{s})] - \left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right][s_{n-1} + (\vec{a}\vec{s})].$$

Сразу получаем следующие компоненты:

$$g\tilde{g}^{n-1\,n-1} = (\vec{b}\vec{b}), \qquad g\tilde{g}^{n-1\,n} = -\left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right],$$

$$g\tilde{g}^{n\,n-1} = -\left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right], \quad g\tilde{g}^{nn} = (\vec{a}\vec{a}),$$

$$g\tilde{g}^{n-1\,p} = (\vec{b}\vec{b})a^p - \left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right]b^p = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a^p}g,$$

$$g\tilde{g}^{np} = (\vec{a}\vec{a})b^p - \left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right]a^p = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b^p}g.$$

Затем из выражения /25/ получаем остальные:

$$g\tilde{g}^{pq} = g\delta^{pq} - (\vec{b}\vec{b})a^pa^q - (\vec{a}\vec{a})b^pb^q + \left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right](a^pb^q + a^qb^p);$$

$$\tilde{g}^{p\,n-1} = -\tilde{g}^{n-1\,p}, \quad \tilde{g}^{pn} = -\tilde{g}^{np}.$$

Следовательно,

$$g\tilde{h}^{n-1\,n-1} = (\vec{b}\vec{b}), \qquad g\tilde{h}^{nn} = (\vec{a}\vec{a}),$$

$$g\tilde{h}^{n\,n-1} = -\left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right], \quad \tilde{h}^{n-1\,p} = 0, \quad \tilde{h}^{np} = 0, \qquad /26/$$

$$g\tilde{h}^{pq} = g\delta^{pq} - (\vec{b}\vec{b})a^pa^q - (\vec{a}\vec{a})b^pb^q + \left[\frac{1}{2} + (\vec{a}\vec{b})\right](a^pb^q + a^qb^p), \qquad /27/$$

а что касается тензора $\tilde{\phi}^{\alpha\beta}$, то

$$\tilde{\phi}^{n-1\,p} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial a^p}\sqrt{-g}, \quad \tilde{\phi}^{np} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial b^p}\sqrt{-g}; \qquad /28/$$

остальные же его компоненты равны нулю.

Согласно /26/ уравнения /17/ означают, что в нелинейной электродинамике вместо /22/ выступает уравнение

$$\frac{\partial^2\vec{\phi}}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right)\frac{\partial^2\vec{\phi}}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right)\frac{\partial^2\vec{\phi}}{\partial u\,\partial v} + \left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\right)\frac{\partial^2\vec{\phi}}{\partial v^2}. \qquad /29/$$

Согласно /28/ уравнения /7/ записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{a}}\sqrt{-g}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{b}}\sqrt{-g}\right) = 0, \qquad /30/$$

т.е. в виде уравнений Лагранжа для функционала /24/. Следовательно, уравнения /30/ определяют минимальную поверхность /21/ в мире Пуанкаре-Минковского.

Надо заметить, что уравнения /29/ и /30/ эквивалентны, так как эквивалентны более общие уравнения /17/ и /7/, хотя в эквивалентности уравнений /29/ и /30/ можно убедиться и непосредственно.

СТОЛКНОВЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКИХ БЕГУЩИХ ВОЛН

Решим следующую задачу о столкновении двух плоских бегущих волн $\vec{\phi}=\vec{A}(u)$ и $\vec{\phi}=\vec{B}(v)$. Пусть функция /21/ при $v\to-\infty$ стремится к $\vec{A}(u)$, а при $u\to\infty$ – к $\vec{B}(v)$:

$$\lim_{v\to-\infty}\vec{\phi}(u,v)=\vec{\phi}(u,-\infty)=\vec{A}(u),\qquad \lim_{u\to\infty}\vec{\phi}(u,v)=\vec{\phi}(\infty,v)=\vec{B}(v). \qquad /31/$$

Пусть следующие пределы также существуют и равны друг другу:

$$\lim_{u\to\infty}\vec{A}(u)=\vec{A}(\infty)=\vec{\phi}(\infty,-\infty),\qquad \lim_{v\to-\infty}\vec{B}(v)=\vec{B}(-\infty)=\vec{\phi}(\infty,-\infty). \qquad /32/$$

Требуется найти решение уравнений электродинамики, удовлетворяющее этим условиям.

В линейной электродинамике искомое решение /уравнения /22// имеет вид

$$\vec{\phi}(u,v)=\vec{A}(u)+\vec{B}(v)-\vec{\phi}(\infty,-\infty). \qquad /33/$$

Предположим теперь, что существуют следующие пределы:

$$\lim_{u\to-\infty}\vec{A}(u)=\vec{A}(-\infty)=\vec{\phi}(-\infty,-\infty),\qquad \lim_{v\to\infty}\vec{B}(v)=\vec{B}(\infty)=\vec{\phi}(\infty,\infty). \qquad /34/$$

В таком случае согласно /33/ и /32/ существуют также и такие пределы:

$$\lim_{v\to\infty}\vec{\phi}(u,v)=\vec{\phi}(u,\infty)=\vec{A}(u)+\vec{B}(\infty)-\vec{B}(-\infty),\qquad \lim_{u\to-\infty}\vec{\phi}(u,v)=\vec{\phi}(-\infty,v)=\vec{B}(v)+\vec{A}(-\infty)-\vec{A}(\infty). \qquad /35/$$

Кроме того, имеется общий предел

$$\lim_{u\to-\infty}[\lim_{v\to\infty}\vec{\phi}(u,v)]=\lim_{v\to\infty}[\lim_{u\to-\infty}\vec{\phi}(u,v)]=\vec{\phi}(-\infty,\infty), \qquad /36/$$

равный

$$\vec{\phi}(-\infty,\infty)=\vec{A}(-\infty)+\vec{B}(\infty)-\vec{\phi}(\infty,-\infty). \qquad /37/$$

Согласно /34/ и /37/

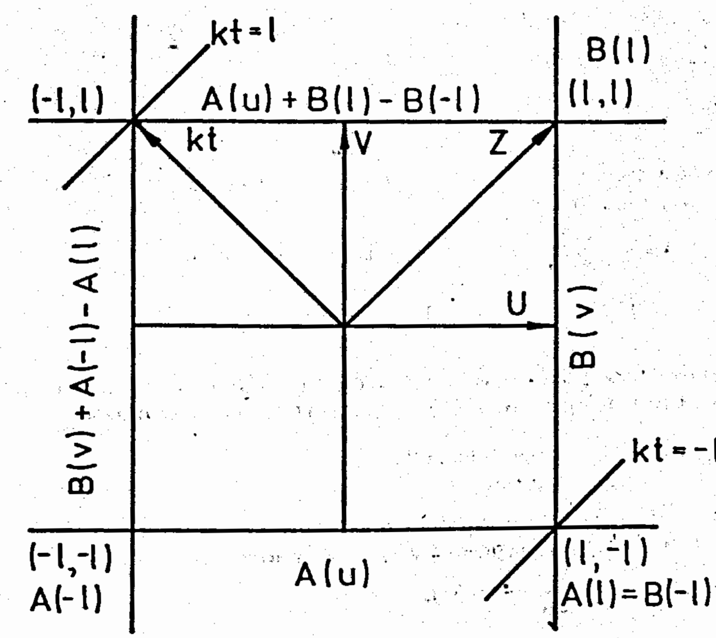
$$\vec{\phi}(-\infty,\infty)+\vec{\phi}(\infty,-\infty)=\vec{\phi}(-\infty,-\infty)+\vec{\phi}(\infty,\infty). \qquad /38/$$

Как видно, в линейной электродинамике бегущие волны /31/ с общей константой /32/ до столкновения превращаются в бегущие волны /35/ с общей константой /37/ после столкновения.

Чтобы лучше уяснить процесс столкновения, полезно, следуя[/5/], рассмотреть случай, когда функции

$$\dot{\vec{A}}(u)=\frac{d}{du}\vec{A}(u),\qquad \dot{\vec{B}}(v)=\frac{d}{dv}\vec{B}(v) \qquad /39/$$

равны нулю вне интервалов $-\ell<u<\ell$, $-\ell<v<\ell$ /см. рисунок/.



В этом случае в области, где $u>\ell$, и в области, где $v<-\ell$, функция /33/ удовлетворяет не только уравнению линейной электродинамики /22/, но и уравнению нелинейной электродинамики /29/.

Переходя к нелинейной электродинамике, потребуем, чтобы существовали интегралы

$$U(\alpha)=\int_{\alpha}^{\infty}(\dot{\vec{A}}(\sigma)\dot{\vec{A}}(\sigma))\,d\sigma, \qquad V(\beta)=\int_{-\infty}^{\beta}(\dot{\vec{B}}(\sigma)\dot{\vec{B}}(\sigma))\,d\sigma, \quad /40/$$

$$P=U(-\infty), \quad Q=V(\infty). \quad /41/$$

Как это следует из /19/, импульсы, переносимые волнами /31/, равны P и Q.

Общее решение уравнения /29/ можно получить, выбрав на поверхности /21/ изотропную сеть, которая в силу уравнения /29/ оказывается сетью переноса. Таким образом получаются известные формулы Монжа[6]:

$$\vec{\phi}=\vec{\phi}_1(\alpha)+\vec{\phi}_2(\beta), \quad u=u_1(\alpha)+u_2(\beta), \quad v=v_1(\alpha)+v_2(\beta), \quad /42/$$

причем в силу того, что сеть изотропна,

$$(\dot{\vec{\phi}}_1\dot{\vec{\phi}}_1)+\dot{u}_1\dot{v}_1=0, \quad (\dot{\vec{\phi}}_2\dot{\vec{\phi}}_2)+\dot{u}_2\dot{v}_2=0, \quad /43/$$

где точками отмечены обыкновенные производные по α и β.

Очевидно, положив

$$\vec{\phi}_1(\alpha)=\vec{A}(\alpha)-\frac{1}{2}\vec{A}(\infty), \quad \vec{\phi}_2(\beta)=\vec{B}(\beta)-\frac{1}{2}\vec{B}(-\infty), \quad u=\alpha+u_2(\beta), \quad v=\beta+v_1(\alpha), \quad /44/$$

мы удовлетворим условиям поставленной задачи, если потребуем, чтобы функции $u_2(\beta)$ и $v_1(\alpha)$ удовлетворяли условиям

$$\lim_{\beta\to-\infty}u_2(\beta)=0, \quad \lim_{\alpha\to\infty}v_1(\alpha)=0. \quad /45/$$

Остается найти функции $u_2(\beta)$ и $v_1(\alpha)$.

Согласно /44/ из условий /43/ получаем

$$\frac{du_2}{d\beta}=-(\dot{\vec{B}}\dot{\vec{B}}), \quad \frac{dv_1}{d\alpha}=-(\dot{\vec{A}}\dot{\vec{A}}). \quad /46/$$

Из /45/ и /46/ находим, что искомые функции связаны с заданными функциями /40/ следующим образом:

$$u_2(\beta)=-V(\beta), \quad v_1(\alpha)=U(\alpha).$$

Итак, решение задачи в нелинейной электродинамике в отличие от /33/ представляется в виде:

$$\vec{\phi}=\vec{A}(\alpha)+\vec{B}(\beta)-\vec{\phi}(\infty,-\infty), \quad u=\alpha-V(\beta), \quad v=\beta+U(\alpha). \quad /47/$$

Считая по-прежнему, что существуют пределы /34/, из формул /47/, /40/ и /41/ находим

$$\lim_{v\to\infty}\vec{\phi}=\lim_{\beta\to\infty}\vec{\phi}=\vec{A}(u+Q)+\vec{B}(\infty)-\vec{B}(-\infty), \quad \lim_{u\to-\infty}\vec{\phi}=\lim_{\alpha\to-\infty}\vec{\phi}=\vec{B}(v-P)+\vec{A}(-\infty)-\vec{A}(\infty). \quad /48/$$

Снова находим общий предел /36/, равный /37/, и снова приходим к равенству /38/.

Таким образом, в нелинейной электродинамике бегущие волны /31/ с общей константой /32/ до столкновения превращаются в бегущие волны /48/ с общей константой /37/ после столкновения.

Рассмотрим случай, когда функции /39/ равны нулю вне интервалов $-\ell<u<\ell$, $-\ell<v<\ell$. Если $v<-\ell$, то $\beta<-\ell$, а значит, $\vec{\phi}=\vec{A}(u)$. Если $u>\ell$, то $\alpha>\ell$, а значит, $\vec{\phi}=\vec{B}(v)$. Если $v>\ell+P$, то $\beta>\ell$, а значит, $\vec{\phi}=\vec{A}(u+a)+\vec{B}(\ell)-\vec{B}(-\ell)$. Если $u<-\ell-Q$, то $\alpha<-\ell$, а значит, $\vec{\phi}=\vec{B}(v-P)+\vec{A}(-\ell)-\vec{A}(\ell)$. Отсюда следует: если $kt<-\ell$, то функция $\vec{\phi}$ равна /33/, а если $kt>\ell+\frac{1}{2}(P+Q)$, то

$$\vec{\phi}=\vec{A}(u+Q)+\vec{B}(v-P)-\vec{\phi}(\infty,-\infty). \quad /49/$$

Функция $\vec{\phi}(u,v)$ задается формулами /47/ однозначно, если якобиан

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)}=1+\dot{U}(\alpha)\dot{V}(\beta)=1-(\dot{\vec{A}}\dot{\vec{A}})(\dot{\vec{B}}\dot{\vec{B}}) \quad /50/$$

не обращается в нуль. Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$(\dot{\vec{A}}\dot{\vec{A}})<1, \quad (\dot{\vec{B}}\dot{\vec{B}})<1.$$

В случае $n=4$ задача о столкновении двух волн решена в[7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Born M., Infeld L. Proc.Roy.Soc., 1934, A144, p.425.
2. Черников Н.А. Изв. вузов, математика, 1978, №5, с.114.
3. Гильбкрт Д. В кн.: Вариационные принципы механики. ГИ ФМЛ, М., 1959, с.589.
4. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. ИЛ, М., 1960, с.11.
5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. ГИТТЛ, М., 1954, с.54.
6. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. ГИТТЛ, М., 1957.
7. Барбашов Б.М., Черников Н.А. В кн.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. "Наукова думка", Киев, 1967, с.733.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 июня 1981 года.

Черников Н.А., Шавохина Н.С. Р2-81-434
Минимальные поверхности в нелинейной электродинамике

Формулируется нелинейная электродинамика в многомерном мире. Доказывается, что плоская бегущая волна в нелинейной электродинамике такая же, как и в линейной. Дается точное решение задачи о столкновении двух плоских волн. Решение представляется в виде минимальной поверхности, задаваемой формулами Монжа.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1981

Chernikov N.A., Shavokhina N.S. P2-81-434
Minimal Surfaces in Nonlinear Electrodynamics

A nonlinear electrodynamics is formulated in a multidimensional world. The plane running wave is shown to be in the nonlinear electrodynamics the same as in the linear one. An exact solution is given to the problem of collision of two plane running waves. The solution is represented by a minimal surface defined by the Monge formulae.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1981

Перевод аннотации О.С.Виноградовой.