объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

4620/2-81

14/9-81

Р2-81-403

А.А.Леонович, А.Б.Пестов

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ФЕЙНМАНА-ГЕЛЛ-МАННА ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1

Направлено в ЯФ

1981

Частица со спином I и не равной нулю массой покоя описывается уравнением Прока [1]

$$(\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}+m^{2})\phi_{\mu}=ieF_{\mu\nu}\phi^{\nu}-\frac{ie}{m^{2}}\nabla_{\mu}(F^{\alpha\beta}\ \nabla_{\alpha}\phi_{\beta}). \qquad /1/$$

Как хорошо известно, теория Прока встречается с рядом трудностей принципиального характера. К их числу относятся отсутствие устойчивых решений в задаче Кулона, неперенормируемость и другие. То, что заряженная частица со спином I "падает" на кулоновский центр, было показано И.Е.Таммом [2]. Все это говорит о том, что поиск других, отличных от теории Прока формулировок теории массивных частиц со спином I вполне обоснован. При построении теории слабых взаимодействий исключительную роль сыграло уравнение Фейнмана-Гелл-Манна [3]. Спинор Дирака преобразуется по представлению $(0,\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},0)$ группы Лоренца, где представления $(0,\frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},0)$ соответствуют 2-компонентным спинорам. Фейнман и Гелл-Манн предложили описывать частицы со спином $\frac{1}{2}$ 2-компонентным спинором, подчиняющимся уравнению второго порядка

$$(\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}+m^{2})\phi=\frac{e}{2}\sigma_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\phi. \qquad /2/$$

Уравнение /2/ оказалось пригодно и как основа для формулировки релятивистской квантовой механики в виде континуальных интегралов по траекториям.

Антисимметричный тензор второго ранга /бивектор/ преобразуется по представлению $(0,1)\oplus(1,0)$ группы Лоренца, где представления $(0,1)$ и $(1,0)$ отвечают самодуальному бивектору $\psi_{\mu\nu}$ и антисамодуальному бивектору $\phi_{\mu\nu}$ [4]. Самодуальный бивектор $\psi_{\mu\nu}$ имеет три независимые компоненты и преобразуется при вращениях как трехмерный вектор. Если применить к $\psi_{\mu\nu}$ оператор Казимира группы Пуанкаре $W=-w_{\sigma}w^{\sigma}$, где w_{σ} - псевдовектор Паули-Любанского-Баргмана [5], то нетрудно убедиться, что $\psi_{\mu\nu}$ соответствует спину I.

Подобно тому как в подходе Фейнмана-Гелл-Манна фермиевские частицы представляются при помощи 2-компонентных спиноров, частицы со спином I представим самодуальным бивектором $\psi_{\mu\nu}$, который удовлетворяет уравнению второго порядка

$$(\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}+m^{2})\psi_{\mu\nu}=ie(F_{\mu\alpha}\,\psi^{\alpha}_{\cdot\nu}-F_{\nu\alpha}\,\psi^{\alpha}_{\cdot\mu}). \qquad /3/$$

Объединенный институт ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

где $\nabla_\sigma = \partial_\sigma - ieA_\sigma$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ - тензор электромагнитного поля. Индексы поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора пространства Минковского $g_{\mu\nu}$ и взаимного по отношению к нему тензора $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+---)$. Бивектор $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию самодуальности

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} = i\psi_{\mu\nu}, \qquad /4/$$

где $\tilde{\psi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\psi^{\alpha\beta}$ - бивектор дуальный $\psi_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - единичный антисимметричный псевдотензор, $\epsilon_{0123} = 1$. В том, что правая часть уравнения /3/ удовлетворяет условию самодуальности /4/, можно убедиться непосредственно. Подчеркнем, что условие самодуальности /4/ такой же природы, что и известное условие $\gamma_5\psi = i\psi$ для спиноров Дирака. На основе уравнения /3/ может быть построена электродинамика бозонов со спином I, возможно также обобщение на случай взаимодействия с гравитационным полем.

Поведение элементарных частиц во внешних полях представляет интерес со многих точек зрения/1/. Для уравнения /3/ нами решены точно три задачи:

1/ частица в кулоновском поле,
2/ частица в поле плоской электромагнитной волны,
3/ частица в однородном магнитном поле.

Приведем последовательно решение перечисленных задач.

Запишем уравнение /3/ в трехмерной векторной форме:

$$\{(\frac{\partial}{\partial t} - ieA_0)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2\}\vec{u} = -e(\vec{E} - i\vec{H})\times\vec{u} \ . \qquad /5/$$

Декартовы компоненты u_k вектора $\vec{u}$ равны $u_k = i\psi_{k0}$, $k=1,2,3$. Для кулоновского поля $A_0 = \frac{Ze}{r}$, $\vec{A} = 0$. Волновая функция $\vec{u}$, представляющая состояние с энергией ϵ, изменяется со временем по закону $\vec{u} = e^{-i\epsilon t}\vec{u}(\vec{r})$. Разложим $\vec{u}(\vec{r})$ по шаровым векторам/6/

$$\vec{u}(\vec{r}) = v_1(r)\vec{Y}^{(+1)}_{JM}(\theta,\phi) + i\,v_2(r)\vec{Y}^{(0)}_{JM}(\theta,\phi) + v_3(r)\vec{Y}^{(-1)}_{JM}(\theta,\phi) \qquad /6/$$

и подставим в /5/. Используя дифференциальные и функциональные соотношения для шаровых векторов/6/, получим уравнение для радиальных функций в виде

$$Dv = \frac{1}{r^2}\Lambda v, \quad \text{где} \quad D = (\epsilon + \frac{\alpha}{r})^2 - m^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{J(J+1)}{r^2}, \qquad /7/$$

$$\alpha = Ze^2, \ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \ \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -2\sqrt{J(J+1)} \\ \alpha & 0 & 0 \\ -2\sqrt{J(J+1)} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оператор D-диагональный и коммутирует с оператором Λ. Следовательно, система уравнений для радиальных функций распадется на три независимых уравнения, если диагонализовать оператор Λ. Это возможно сделать, так как определитель $|\Lambda| = 2\alpha^2 \neq 0$. Собственные значения Λ суть корни характеристического уравнения

$$|\Lambda - \lambda I| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - [\alpha^2 - 4J(J+1)]\lambda + 2\alpha^2 = 0. \qquad /8/$$

Согласно/7/ при $J \neq 0$ характеристическое уравнение /8/ имеет три различных положительных корня:

$$\lambda = 2\sqrt{-a}\cos\frac{\gamma}{3}, \ \lambda_{2,3} = 2\sqrt{-a}\sin\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} \pm \gamma), \quad \cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{-a^3}}, \qquad /9/$$

где

$$b = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}(2J+1)^2 - \frac{1}{27}, \quad a + b = \alpha^2 - \frac{4}{27}.$$

В случае $J = 0$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = \pm i\alpha$. Таким образом, решение системы уравнений для радиальных функций удается свести к решению одного уравнения

$$DF = \frac{\lambda}{r^2}F, \qquad /10/$$

где λ - корни характеристического уравнения /8/. Введем в качестве новой независимой переменной величину $x = 2\sqrt{m^2 - \epsilon^2}\,r$ и сделаем подстановку $F = 2\sqrt{\frac{m^2 - \epsilon^2}{x}}\,y$. Функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + (-\frac{x}{4} + \beta - \frac{s^2}{4x})y = 0, \qquad /11/$$

где

$$\beta = \frac{\alpha\epsilon}{\sqrt{m^2 - \epsilon^2}}, \quad s^2 = (2J+1)^2 + 4\lambda - 4\alpha^2 \ . \qquad /12/$$

Уравнение /11/ подробно исследовано в/8/. Его решения выражаются через обобщенные полиномы Лагерра, а параметр β принимает значения $\beta = \frac{s+1}{2} + n'$, $n' = 0,1,2,\ldots$ На основании /12/ получаем формулу для уровней энергии

$$\epsilon = m[1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \frac{1}{2} + \sqrt{(J + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2 + \lambda})^2}]^{-1/2}, \qquad /13/$$

где, напоминаем, λ - корни кубичного уравнения /8/.

Разлагая выражение /13/ для уровней энергии в ряд по степеням α^2, получаем с точностью до α^4

$$\epsilon = m\{1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}[\frac{2}{2\nu+1} \frac{3\kappa^2 - 4\nu(\nu+1) + \kappa - 2}{3\kappa^2 - 4\nu(\nu+1)} n - \frac{3}{4}]\}, \qquad /14/$$

где

$$n = n' + \nu + 1, \quad \nu = J, J \pm 1, \quad \kappa = (\nu + J + 1)(\nu - J).$$

Уровни энергии, соответствующие одному и тому же квантовому числу n' и одному и тому же J, но трем разным значениям λ /в приближенном выражении трем разным значениям ν /, будут образовывать триплет. Исключение составляет случай $J=0$, для которого остается только один уровень. Представляет несомненный интерес тщательное исследование спектра /14/ и сравнение со спектрами уравнений Клейна-Гордона и Дирака [/9/].

Векторный потенциал поля плоской волны с волновым 4-вектором $k_\mu (k^2=0)$ имеет вид $A_\mu = A_\mu(\phi)$, где $\phi = k_\mu x^\mu$, и удовлетворяет условию Лоренца $k^\mu A'_\mu = 0$ [/10/]. Подставляя такой потенциал в уравнение /3/, получим

$$(\partial^\sigma \partial_\sigma - 2ieA^\sigma \partial_\sigma - e^2 A^\sigma A_\sigma + m^2)\psi_{\mu\nu} = ie(F_{\mu\alpha}\psi^{\alpha}_{\cdot\nu} - F_{\nu\alpha}\psi^{\alpha}_{\cdot\mu}), \qquad /15/$$

где $F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu$. Решение уравнения /15/ ищем в виде

$$\psi_{\mu\nu}(x) = e^{-ipx}\psi_{\mu\nu}(\phi) \qquad (p^2 = m^2). \qquad /16/$$

Подставляя /16/ в /15/, получаем

$$\psi'_{\mu\nu} = i[\frac{e}{kp}pA + \frac{e^2}{2kp}A^2]\psi_{\mu\nu} - \frac{e}{2kp}(F_{\mu\alpha}\psi^{\alpha}_{\cdot\nu} - F_{\nu\alpha}\psi^{\alpha}_{\cdot\mu}). \qquad /17/$$

Интеграл этого уравнения легко находится. В результате получаем

$$\psi_{\mu\nu}(x) = e^{iS}\{u_{\mu\nu} - \frac{e}{2(kp)}(f_{\mu\alpha}u^{\alpha}_{\cdot\nu} - f_{\nu\alpha}u^{\alpha}_{\cdot\mu}) + \qquad /18/$$

$$+ \frac{e^2}{8(kp)^2}[f_{\mu\alpha}(f^{\alpha\sigma}u_{\sigma\nu} - f_{\nu\sigma}u^{\sigma\alpha}) - f_{\nu\alpha}(f^{\alpha\sigma}u_{\sigma\mu} - f_{\mu\sigma}u^{\sigma\alpha})]\},$$

где $S = -px - \int_0^{kx}[\frac{e}{kp}pA + \frac{e^2}{kp}A^2]d\phi$ - классическое действие для частицы, движущейся в поле плоской волны, $f_{\mu\nu} = k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu$, $u_{\mu\nu}$ - решение свободного уравнения, в которое переходит /3/ при $A_\mu = 0$. Принципиальное отличие найденного решения /18/ от известного решения Волкова [/11/] для уравнения Дирака проявляется в наличии члена с e^2.

Рассмотрим, наконец, постоянное однородное магнитное поле. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - тройка взаимно ортогональных векторов. Эти векторы определяют операторы s_1, s_2, s_3, которые каждому вектору $\vec{u}$ ставят в соответствие вектор $s_k\vec{u} = i[\vec{e}_k \times \vec{u}]$. Нетрудно убедиться, что $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2$, $s_k s_j - s_j s_k = i e_{kj\ell} s_\ell$.

Следовательно, s_1, s_2, s_3 есть операторы спина I. Очевидно, что $i\vec{H} \times \vec{u} = (\vec{H}\vec{s}) \cdot \vec{u}$. Уравнение /5/ принимает вид

$$[\epsilon^2 + (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 - m^2]\vec{u} + (\vec{H}\vec{s})\vec{u} = 0. \qquad /19/$$

Если магнитное поле однородно и направлено вдоль оси z, то $\vec{A}$ можно выбрать в виде $A_1 = 0$, $A_2 = Hx$, $A_3 = 0$, $H = |\vec{H}|$. Разложим вектор $\vec{u}$ по циклическому базису [/6/] $\vec{u} = u^\mu \vec{e}_\mu$, $\mu = \pm 1, 0$. Так как $s_3 \vec{e}_\mu = \mu \vec{e}_\mu$, то согласно /19/ для u^μ получаем уравнение

$$(\epsilon^2 - m^2 + \vec{\nabla}^2)u^\mu = [e^2 H^2 x^2 - eH(\mu - 2ix\frac{\partial}{\partial y})]u^\mu, \qquad /20/$$

решения которого получить нетрудно [/12/]. Энергетический спектр

$$\epsilon^2 = m^2 + p_z^2 + eH(2n + 1 - \mu), \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

имеет триплетную структуру. В этом его принципиальное отличие от дираковского спектра.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность Я.А.Смородинскому и Б.М.Барбашову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. Атомиздат, М., 1980.
2. Тамм И.Е. ДАН СССР, 1940, 29, с.551.
3. Feynman R.P., Gell-Mann M. Phys.Rev., 1958, 109, p.193.
4. Йост Р. Общая теория квантованных полей. "Мир", М., 1967.
5. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. "Наука", М., 1969.
6. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. "Наука", М., 1968.
8. Фок В.А. Начала квантовой механики. "Наука", М., 1976.
9. Шифф Л. Квантовая механика. ИЛ, М., 1959.
10. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория, ч.1. "Наука", М., 1968.
11. Volkov D.M. Zs.Phys., 1935, 94, p.250.
12. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. "Наука", М., 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1981 года.