объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-384

А.А.Леонович, А.Б.Пестов

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КУЛОНОВСКОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ТЕНЗОРНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1

Направлено в "ДАН БССР"

1981

Частицу со спином 1 и неравной нулю массой покоя принято описывать уравнением Прока. Однако теория Прока встречается с рядом трудностей принципиального характера. К их числу относятся отсутствие устойчивых решений при движении в кулоновском поле, неперенормируемость и другие. По этой причине поиск новых формулировок теории массивных частиц спина 1 представляется не только обоснованным, но и необходимым.

Хорошо известно, что при построении теории слабых взаимодействий исключительную роль сыграло уравнение Фейнмана-Гелл-Манна /1/. Дираковский спинор преобразуется по представлению $(0,\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},0)$, где (0, 1/2), (1/2, 0) - неприводимые представления однородной группы Лоренца, соответствующие полуспинорам Картана /2/. При квадрировании уравнение Дирака распадается на два независимых уравнения для полуспиноров. Фейнман и Гелл-Манн предложили описывать частицы со спином 1/2 полуспинором, подчиняющимся уравнению

$$(\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}+m^{2})\phi=\frac{e}{2}\,\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,\phi. \qquad /1/$$

Уравнение /1/ оказалось пригодным и как основа для формулировки релятивистской квантовой механики в виде континуальных интегралов по траекториям.

Антисимметричный тензор второго ранга /бивектор/ преобразуется по представлению /0,1/ $\oplus$ /1,0/, где /0,1/ и /1,0/ - неприводимые представления однородной группы Лоренца, отвечающие самодуальному бивектору $\psi_{\mu\nu}$ и антисамодуальному бивектору $\phi_{\mu\nu}$ соответственно /3/. Самодуальный бивектор $\psi_{\mu\nu}$ имеет три независимые компоненты и преобразуется при вращениях как трехмерный вектор. Если применить к $\psi_{\mu\nu}$ оператор Казимира группы Пуанкаре $W^{2}=-\omega^{\sigma}\omega_{\sigma}$, где ω_{σ} - псевдовектор Паули-Любанского-Баргмана /4/, то нетрудно убедиться, что $\psi_{\mu\nu}$ соответствует спину 1.

Подобно тому, как в подходе Фейнмана-Гелл-Манна фермиевские частицы представляются при помощи двухкомпонентных спиноров, частицы со спином 1 представим самодуальным бивектором $\psi_{\mu\nu}$, который удовлетворяет уравнению второго порядка

$$(\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}+m^{2})\psi_{\mu\nu}=i\,e(F_{\mu a}\,\psi^{a}_{\cdot\nu}-F_{\nu a}\,\psi^{a}_{\cdot\mu}), \qquad /2/$$

где $\nabla_{\sigma}=\partial_{\sigma}-ieA_{\sigma}$, $F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$ - антисимметричный тензор электромагнитного поля. Индексы поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и ему взаимного тензора $g^{\mu\nu}$,

$g_{\mu\alpha}\, g^{\nu\alpha} = \delta^{\nu}_{\mu}$, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+---)$. Бивектор $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию самодуальности

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} = i\,\psi_{\mu\nu}, \qquad /3/$$

где $\tilde{\psi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\psi^{\alpha\beta}$ – бивектор дуальный $\psi_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – единичный антисимметричный псевдотензор с $\epsilon_{0123} = 1$. В том, что правая часть уравнения /2/ удовлетворяет условию самодуальности, можно убедиться непосредственно. Подчеркнем, что условие самодуальности /3/ такой же природы, что и известное ограничивающее условие $\gamma_5 \psi = i\psi$.

Поведение элементарных частиц во внешних полях представляет интерес со многих точек зрения[3]. Для уравнения /2/ нами получено точное решение трех задач:

1/ частица в кулоновском поле,

2/ частица в поле плоской электромагнитной волны,

3/ частица в однородном магнитном поле.

Здесь мы приведем решение первой задачи.

Запишем уравнение /2/ в трехмерной векторной форме

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} - ieA_0\right)^2 - (\nabla - ie\vec{A})^2 + m^2\right\}\vec{u} = -e(\vec{E} - i\vec{H}) \times \vec{u}. \qquad /4/$$

Компоненты u_k вектора $\vec{u}$ равны, $u_k = i\psi_{k0}$, $k = 1,2,3$. Для кулоновского поля $A_0 = \frac{Ze}{r}$, $\vec{A} = 0$. Зависимость от времени определяется как обычно: $i\nabla_0 \to \epsilon + eA_0$. Разложим волновую функцию $\vec{u}(\vec{r})$ по шаровым векторам[6]

$$\vec{u}(\vec{r}) = v_1(r)\,\vec{Y}^{(+1)}_{JM}(\theta,\phi) + i\,v_2(r)\,\vec{Y}^{(0)}_{JM}(\theta,\phi) + v_3(r)\,\vec{Y}^{(-1)}_{JM}(\theta,\phi). \qquad /5/$$

Подставим /5/ в /4/. Используя дифференциальные соотношения для шаровых векторов[6], а также алгебраические соотношения

$$\vec{r} \times \vec{Y}^{(+1)}_{JM}(\theta,\phi) = i\,r\,\vec{Y}^{(0)}_{JM}(\theta,\phi), \quad \vec{r} \times \vec{Y}^{(-1)}_{JM}(\theta,\phi) = 0, \quad \vec{r} \times \vec{Y}^{(0)}_{JM}(\theta,\phi) = i\,r\,\vec{Y}^{(+1)}_{JM}(\theta,\phi),$$

получим уравнение для радиальных функций

$$D\,v = \frac{1}{r^2}\,\Lambda\,v, \qquad /6/$$

где

$$D = \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{J(J+1)}{r^2}, \quad \alpha = Ze^2,$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -2\sqrt{J(J+1)} \\ \alpha & 0 & 0 \\ -2\sqrt{J(J+1)} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оператор D диагональный и коммутирует с оператором Λ. Следовательно, система уравнений для радиальных функций распадается на три независимых уравнения, если диагонализовать оператор Λ.

Это возможно, так как определитель $|\Lambda| = 2\alpha^2 \neq 0$. Собственные значения Λ суть корни характеристического уравнения

$$|\Lambda - \lambda I| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - [\alpha^2 + 1 - (j+1)^2]\lambda + 2\alpha^2 = 0, \qquad /7/$$

где $j = 2J$ $j = 0,2,4$ ... . Согласно[7] при $j \neq 0$ характеристическое уравнение /7/ имеет три различных положительных корня

$$\lambda_1 = 2\sqrt{-a}\cos\frac{\gamma}{3}, \quad \lambda_{2,3} = 2\sqrt{-a}\,\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} \pm \gamma\right), \quad \cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{-a^3}},$$

где

$$a + b = \alpha^2 - \frac{4}{27}, \quad b = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}(j+1)^2 - \frac{1}{27}.$$

В случае $j = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = \pm i\alpha$.

Таким образом, решение уравнений для радиальных функций свелось к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$DF = \frac{\lambda}{r^2}F, \qquad /8/$$

где λ – корни характеристического уравнения /7/. Подстановкой $rF = G$ приводим уравнение /8/ к виду

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \left[(\epsilon^2 - m^2) + \frac{2\epsilon\alpha}{r} - \frac{\lambda + J(J+1) - \alpha^2}{r^2}\right]G = 0. \qquad /9/$$

Введем в качестве новой независимой переменной величину $x = 2\sqrt{m^2 - \epsilon^2}\,r$ и сделаем подстановку $G = \sqrt{x}\,y$.

Функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \left[-\frac{x}{4} + \beta - \frac{s^2}{4x}\right]y = 0, \qquad /10/$$

где

$$\beta = \frac{\alpha\epsilon}{\sqrt{m^2 - \epsilon^2}}, \quad s^2 = (j+1)^2 + 4\lambda - 4\alpha^2. \qquad /11/$$

Уравнение /10/ подробно исследовано в [8]. Его решения выражаются через обобщенные полиномы Лагерра, а параметр β принимает значения

$$\beta = \frac{s+1}{2} + p \qquad (p = 0,1,2,\ldots).$$

На основании /11/ получаем отсюда формулу для уровней энергии

$$\epsilon = m\left(1 + \frac{\alpha^2}{\left(p + \frac{1}{2} + \sqrt{(J+\frac{1}{2})^2 + \lambda - \alpha^2}\right)^2}\right)^{-1/2}, \qquad /12/$$

где, напоминаем, λ – корни характеристического уравнения /7/.

Разлагая выражение /12/ для уровней энергии в ряд по степеням α^2, получаем с точностью до членов порядка α^6,

$$\epsilon = m - \frac{m\alpha^2}{2n^2} - \frac{m\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{\sigma(\sigma+j+4)-4(\sigma-j)(\sigma-j+\frac{1}{4})+4}{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}\, n - \frac{3}{4}\right),$$

где $n = p + \nu + 1,\ \nu = J,\ J \pm 1,\ \sigma = \nu + J$.

Уровни энергии, соответствующие одному и тому же квантовому числу p и одному и тому же J, но трем разным значениям λ /в приближенном выражении трем разным значениям ν /, будут образовывать триплет. Исключение представляет случай $J=0$, для которого остается только один уровень.

В заключение авторы выражают признательность Б.М.Барбашову, Я.А.Смородинскому за критические и стимулирующие замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R.P., Gell-Mann. Phys.Rev., 1958, 109, p. 193.
2. Картан Э. Теория спиноров. ИЛ, М., 1947.
3. Йост Р. Общая теория квантованных полей. "Мир", М., 1967.
4. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. "Наука", М., 1969.
5. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. "Атомиздат", М., 1980.
6. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", М., 1975.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. "Наука", М., 1968.
8. Фок В.А. Начала квантовой механики. "Наука", М., 1976, с. 194.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 июня 1981 года.