объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-36

М.В.Чижов

К ВОПРОСУ ОБ АНОМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

Направлено в ТМФ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно была опубликована серия работ /1/, в которых квантовополевые модели рассматривались в приближении самосогласованного поля. Интерес к этой довольно старой идее /2/ возник благодаря обнаружению новых свойств данного приближения.

Известно, что четырехфермионные теории в разложении по константе связи являются неперенормируемыми. Однако в разложении по среднему полю для некоторых четырехфермионных теорий доказана перенормируемость и их эквивалентность теориям со взаимодействием типа Юкавы /1/.

Ряд обычной теории возмущений по константе связи формально совпадает с разложением по среднему полю. Тем не менее перенормируемые ряды этих разложений различны. Отсюда можно предположить, что мы имеем два разных решения нелинейных уравнений поля.

Кроме того, приближение самосогласованного поля позволяет получать аномальные средние для билинейных комбинаций полевых переменных, или, другими словами, динамическое спонтанное нарушение симметрии.

В данной работе на примере теории со взаимодействием типа "ток $\times$ ток" мы обсудим одно из свойств приближения самосогласованного поля, касающееся динамического спонтанного нарушения симметрии.

2. СИММЕТРИЗОВАННАЯ ФОРМА ЛАГРАНЖИАНА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И АНОМАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ

Пусть Ψ-мультиплет полей, реализующий фундаментальное представление группы $U(N_+, N_-, c)$. Любая матрица Q размерности $N \times N$, где $N = N_+ + N_-$, может быть представлена в виде линейной комбинации N^2 генераторов этой группы

$$Q = c_a T^a , \qquad /2.1/$$

где матрицы T^a нормированы условием

$$Sp(T^a T_b) = N \delta^a_b , \qquad /2.2/$$

а соотношение ортогональности имеет вид

$$\frac{1}{N} T^{a}_{ij} (T_a)_{k\ell} = \delta_{i\ell}\delta_{jk} * . \qquad /2.3/$$

Билинейная комбинация $\bar{\Psi} Q \Psi$ является вектором в N^2-мерном пространстве. Обычная форма записи взаимодействия "ток × ток" представляется в виде

$$\mathcal{L}_{int}(x) = \lambda_0 \bar{\Psi}(x) Q \Psi(x) \cdot \bar{\Psi}(x) R \Psi(x), \qquad /2.4/$$

где λ_0- константа связи, Q и R- матрицы размерности $N \times N$.

Производящие функционалы S-матрицы и функций Грина определяются через классический функционал взаимодействия, представляющий симметризованную форму ** квантового взаимодействия /3/. Поэтому, чтобы однозначно определить классический функционал, симметризуем операторную форму квантового взаимодействия /2.4/:

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{L}_{int}) = \frac{\lambda_0}{4!} \{ \Sigma^{ab}_{ij}(Q) \Sigma^{cd}_{k\ell}(R) + \kappa\, \Sigma^{ac}_{ik}(Q) \Sigma^{bd}_{j\ell}(R) + \qquad /2.5/$$

$$+ \Sigma^{ad}_{i\ell}(Q) \Sigma^{bc}_{jk}(R) + (Q \leftrightarrow R) \} \Phi^{a}_{i} \Phi^{b}_{j} \Phi^{c}_{k} \Phi^{d}_{\ell} ,$$

где

$$\Sigma^{ab}_{ij}(Q) = \sigma^{ab}_{1} (\mathrm{Sym}\, Q)_{ij} - i \sigma^{ab}_{2} (\mathrm{Asym}\, Q)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \tilde{Q} \\ Q & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Sym}\, Q = \frac{1}{2}(Q + \kappa \tilde{Q}), \qquad /2.6/$$

$$\mathrm{Asym}\, Q = \frac{1}{2}(Q - \kappa \tilde{Q}) \quad ***$$

и

$$\Phi \equiv \left(\frac{\Psi}{\bar{\Psi}}\right). \qquad /2.7/$$

Используя соотношение /2.3/, выражение /2.5/ перепишем в виде

---

* Матрицы T^a выбраны эрмитовыми.

** Имеется в виду симметрия, согласованная со статистикой.

*** $\tilde{Q}$ -транспонированная матрица Q, а $\kappa = 1$ для бозонов и $\kappa = -1$ для фермионов.

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{L}_{int}) = \frac{\lambda_0}{2N^2}\{\mathrm{Sp}(\ddot{Q}\,\mathrm{Sym}\,T^a R\,\mathrm{Sym}\,T^b)\cdot[\bar{\Psi}T_a\bar{\Psi}, \Psi T_b \Psi]_+ + $$
$$+ [\mathrm{Sp}(QT^a)\mathrm{Sp}(RT^b) + \kappa\,\mathrm{Sp}(QT^a RT^b) + \qquad /2.8/$$
$$+ (Q \leftrightarrow R)]\cdot\frac{1}{2}[\bar{\Psi}, T_a\Psi]_\kappa \cdot \frac{1}{2}[\bar{\Psi}, T_b\Psi]_\kappa\}^*.$$

Взаимодействие "ток×ток" линеаризуется с помощью формулы

$$\exp\{-\frac{i}{2}JKJ\} = C\int DB\exp\{i[\frac{1}{2}BK^{-1}B + JB]\}. \qquad /2.9/$$

Выполнив затем функциональное интегрирование по полю Φ, мы придем к следующему выражению для производящего функционала Z:

$$Z = C'\int DBe^{iS[B]}. \qquad /2.10/$$

Уравнение движения для поля B

$$\frac{\delta S[B]}{\delta B} = 0 \qquad /2.11/$$

играет роль уравнения компенсации [4], а его нетривиальные решения суть аномальные средние.

Правая часть выражения /2.8/, помимо обычных билинейных комбинаций вида $\bar{\Psi}T\Psi$, содержит комбинации $\bar{\Psi}T\bar{\Psi}$ и $\Psi T\Psi$, которые при спонтанном нарушении симметрии будут играть роль аномальных средних. Заметим, что путем симметризации лагранжиана можно получить в явном виде операторную структуру всех членов, неинвариантных относительно группы симметрии начального лагранжиана и имеющих нетривиальные решения уравнения компенсации. Однако в работах [1,5] для нахождения аномальных решений использовалась несимметризованная форма лагранжиана взаимодействия и поэтому часть решений была потеряна.

3. ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Спинорное поле Ψ реализует фундаментальное представление группы $U(2,2)$. Поэтому в этом частном случае, в согласии со статистикой, формула /2.8/ принимает вид

---

*Здесь, как обычно, $[A,B]_\kappa = AB + \kappa BA$.

$$\mathrm{Asym}\,(\mathcal{L}_{int}) = \frac{\lambda_0}{32}\{-\mathrm{Sp}(C\tilde{Q}C\Gamma_i\,R\Gamma_j)\{\bar{\Psi}\Gamma^i\Psi^c,\bar{\Psi}^c\Gamma^j\Psi\}+$$

$$+[\mathrm{Sp}(Q\Gamma_a)\mathrm{Sp}(R\Gamma_b)-\mathrm{Sp}(Q\Gamma_a R\Gamma_b)+ \qquad /3.1/$$

$$+(Q\leftrightarrow R)]\cdot\frac{1}{2}[\bar{\Psi},\Gamma^a\Psi]\cdot\frac{1}{2}[\bar{\Psi},\Gamma^b\Psi]\},\ *$$

где индексы i и j обозначают суммирование только по матрицам Γ_S, Γ_A^μ, Γ_P; C - оператор зарядового сопряжения. Формула /2.8/, где генераторы T являются прямым произведением генераторов группы внутренней симметрии $U(N)$ и спинорной группы, приведена в Приложении.

Антисимметризованное действие для теории со взаимодействием /2.4/ в данном частном случае запишем в виде

$$S = \int dx\,[\frac{1}{2}(\Psi\bar{\Psi})\begin{pmatrix}0 & i\partial\!\!\!/ \\ i\partial\!\!\!/ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi\\ \bar{\Psi}\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{\lambda_0}{4}K_{ab}(Q,R)\cdot\frac{1}{2}[\bar{\Psi},\Gamma^a\Psi]\cdot\frac{1}{2}[\bar{\Psi},\Gamma^b\Psi]- \qquad /3.2/$$

$$-\frac{\lambda_0}{4}\bar{K}_{ij}(Q,R)\cdot\frac{1}{2}\{\bar{\Psi}\Gamma^i\Psi^c,\bar{\Psi}^c\Gamma^j\Psi\}],$$

где

$$K_{ab}(Q,R) = \frac{1}{8}[\mathrm{Sp}(Q\Gamma_a)\mathrm{Sp}(R\Gamma_b)-\mathrm{Sp}(Q\Gamma_a R\Gamma_b)+(Q\leftrightarrow R)], \qquad /3.3а/$$

$$\bar{K}_{ij}(Q,R) = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}(C\tilde{Q}C\Gamma_i\,R\Gamma_j). \qquad /3.3б/$$

Заметим, что, когда $Q=R=\Gamma_a$, $a=S,V,T,A,P$, у матриц K и $\bar{K}$ в /3.3/ лишь диагональные элементы отличны от нуля. Введем обозначения:

$$K_{ab} = K_{aa}(\Gamma_b,\Gamma_b), \qquad /3.4а/$$

$$\bar{K}_{ib} = K_{ii}(\Gamma_b,\Gamma_b). \qquad /3.4б/$$

---

* Роль генераторов T^a здесь играют матрицы Дирака Γ^a.

В явном виде

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & -1 \\ -1 & 4 & -6 & -4 & 3 \end{pmatrix} . \qquad /3.5а/$$

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -6 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \qquad /3.5б/$$

Ранг объединенной матрицы $\begin{pmatrix} K \\ \bar{K} \end{pmatrix}$ равен трем. Поэтому подсистема из трех независимых однородных линейных уравнений эквивалентна системе

$$\begin{pmatrix} K \\ \bar{K} \end{pmatrix} X = 0. \qquad /3.6/$$

Ее решение выражается через две независимые переменные, α и β:

$$X = (3\alpha - 2\beta, -\beta, \alpha, \beta, 3\alpha + 2\beta), \qquad /3.7/$$

отсюда следует, что $\mathcal{L}_{int}$ вида

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda_0 X_a (\bar{\Psi}\Gamma^a \Psi)^2 \qquad /3.8/$$

полностью симметричен по компонентам спинорного поля и описывает заведомо невырожденную систему.

Выпишем теперь два типа взаимодействий, которые при антисимметризации допускают ясное физическое толкование.

$$\begin{aligned} \mathrm{Asym}\Big(\bar{\Psi}\frac{1\pm\gamma^5}{2}\Psi\Big)^2 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}[\bar{\Psi}, \frac{1\pm\gamma^5}{2}\Psi]\Big)^2 + \\ &+ \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}[\bar{\Psi}, \frac{1\pm\gamma^5}{2}\sigma_{\mu\nu}\Psi]\Big)^2 - \\ &- \frac{1}{4}\{\bar{\Psi}\frac{1\pm\gamma^5}{2}\Psi^c, \bar{\Psi}^c\frac{1\pm\gamma^5}{2}\Psi\}. \end{aligned} \qquad /3.9/$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Asym}\Big(\bar{\Psi}\frac{1\pm\gamma^5}{2}\gamma_\mu\Psi\Big)^2 &= 2\Big(\frac{1}{2}[\bar{\Psi}, \frac{1\pm\gamma^5}{2}\gamma_\mu\Psi]\Big)^2 + \\ &+ \{\bar{\Psi}\frac{1\pm\gamma^5}{2}\Psi^c, \bar{\Psi}^c\frac{1\mp\gamma^5}{2}\Psi\}. \end{aligned} \qquad /3.10/$$

Первое взаимодействие генерирует скалярное поле ϕ и тензорное поле $F_{\mu\nu}$, взаимодействующее с электрическим и магнитным аномальными дипольными моментами. Второе, при обобщении на группу внутренней симметрии $U(2)$, может иметь непосредственное отношение к теории слабых взаимодействий. Заметим, что появление скалярных полей в обоих случаях при нарушении симметрии приводит к появлению массы у спинорного поля.

В заключение коснемся вопроса об эквивалентности квантовой электродинамики и теории с четырехфермионным векторным взаимодействием /6/. Как следует из предыдущего рассмотрения, четырехфермионное взаимодействие наряду с векторным полем A_μ генерирует скалярное, псевдоскалярное и псевдовекторное поля. Таким образом, мы здесь имеем дело с более богатой теорией, чем обычная квантовая электродинамика.

Автор глубоко признателен В.Г.Кадышевскому и М.Д.Матееву за многочисленные и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы получим обобщение формулы /2.8/ на случай группы, являющейся прямым произведением группы внутренней симметрии $U(N)$ и спинорной группы. Пользуясь условием полноты /2.3/, получаем для взаимодействия вида $\lambda_0 \bar\Psi \theta Q \Psi \cdot \bar\Psi \eta R \Psi$

$$\mathrm{Asym}(\lambda_0 \bar\Psi \theta Q \Psi \cdot \bar\Psi \eta R \Psi) = \frac{\lambda_0}{4N} \bar K^{ab}_{nm}(\theta Q, \eta R) \cdot \frac{1}{2}[\bar\Psi T_a \Gamma^n \bar\Psi, \Psi T_b \Gamma^m \Psi \qquad /П.1/$$

$$+ \frac{\lambda_0}{4N} K^{ab}_{nm}(\theta Q, \eta R) \frac{1}{2}[\bar\Psi, T_a \Gamma^n \Psi] \cdot \frac{1}{2}[\bar\Psi, T_b \Gamma^m \Psi],$$

где

$$\bar K^{ab}_{nm}(\theta Q, \eta R) = \frac{1}{4N} [\mathrm{Sp}(\tilde\theta\, \mathrm{Sym}\, T^a \eta\, \mathrm{Sym}\, T^b)\, \mathrm{Sp}(\tilde Q\, \mathrm{Asym}\, \Gamma_n\, R\, \mathrm{Asym}\, \Gamma_m) +$$

$$+ \mathrm{Sp}(\tilde\theta\, \mathrm{Sym}\, T^a \eta\, \mathrm{Asym}\, T^b)\, \mathrm{Sp}(\tilde Q\, \mathrm{Asym}\, \Gamma_n\, R\, \mathrm{Sym}\, \Gamma_m) + \qquad /П.2/$$

$$+ \mathrm{Sp}(\tilde\theta\, \mathrm{Asym}\, T^a \eta\, \mathrm{Sym}\, T^b)\, \mathrm{Sp}(\tilde Q\, \mathrm{Sym}\, \Gamma_n\, R\, \mathrm{Asym}\, \Gamma_m) +$$

$$+ \mathrm{Sp}(\tilde\theta\, \mathrm{Asym}\, T^a \eta\, \mathrm{Asym}\, T^b)\, \mathrm{Sp}(\tilde Q\, \mathrm{Sym}\, \Gamma_n\, R\, \mathrm{Sym}\, \Gamma_m)],$$

$$K_{nm}^{ab}(\theta Q, \eta R) = \frac{1}{4N} [Sp(\theta T^a) Sp(\eta T^b) Sp(Q\Gamma_n) Sp(R\Gamma_m) - $$
$$- Sp(\theta T^a \eta T^b) Sp(Q\Gamma_n R\Gamma_m) + (\theta \leftrightarrow \eta, \; Q \leftrightarrow R)] \qquad /П.3/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bender C.M., Cooper F., Guralnik G.S. Ann.Phys.,1977,vol.109, No.1, p.165-209; Tamvakis K., Guralnik G.S. Phys.Rev., 1978, vol.D18, No.12, p.4551-4570; Cooper F., Guralnik G.S., Snyderman N. Phys.Rev.Lett., 1978, vol.40, No.25, p.1620-1625.
2. Jona-Lasisnio G. Nuovo Cim., 1964, vol.34, No.6, p.1790-1795; Dahmen H.D., Jona-Lasinio G. Nuovo Cim., 1967, vol.52A, No.3, p.807-838.
3. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Изд-во ЛГУ, Л., 1976.
4. Боголюбов Н.Н. ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.58-65.
5. Первушин В.Н., Райнхард Х., Эберт Д. ЭЧАЯ, 1979, т.10, вып.5, с.1114-1155.
6. Bjorken J.D. Ann.Phys., 1963, vol.24,oktober,p.174-187; Bialynicki-Birula I.Phys.Rev., 1963,vol.130, No.1, p.465-468; Guralnik G.S. Phys.Rev., 1964, vol.136, No.5B, p.1404-1416.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1981 года.