объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-31

В.В.Нестеренко

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛАКСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в "Letters in Mathematical Physics"

1981

Исследование нелинейного уравнения методом обратной задачи рассеяния [1,2] предполагает прежде всего возможность представить его как условие совместности двух линейных уравнений /так называемое представление Лакса/. Предпринимались различные попытки разработать алгоритм построения представления Лакса по заданному нелинейному уравнению [3-6]. В данной заметке предлагается использовать для этой цели методы классической дифференциальной геометрии [7]. В качестве операторов Лакса можно взять линейные уравнения, описывающие изменение подвижного репера при движении его начала по интегральной поверхности исходного нелинейного уравнения.

Мы будем рассматривать нелинейные уравнения следующего вида:

$$\phi_{11} = F(x_1, x_2, \phi, \phi_1, \phi_2, \phi_{12}, \phi_{22}), \qquad /1/$$

где $\phi=\phi(x_1,x_2)$, $\phi_i \equiv \partial\phi/\partial x_i$, $\phi_{ij} = \partial^2\phi/\partial x_i \partial x_j$, $i,j=1,2$.

Искомая функция $\phi(x_1,x_2)$ определяет в трехмерном евклидовом пространстве с координатами $\vec{r}=\{x_1, x_2, \phi\}$ двумерную поверхность $\vec{r}(x_1,x_2)=\{x_1, x_2, \phi(x_1,x_2)\}$. Внутренняя геометрия на этой поверхности задается метрическим тензором

$$g_{ij} = \left\| \begin{matrix} 1+\phi_1^2 & \phi_1\phi_2 \\ \phi_1\phi_2 & 1+\phi_2^2 \end{matrix} \right\|, \quad i,j=1,2. \qquad /2/$$

В каждой точке интегральной поверхности $\phi(x_1,x_2)$ можно построить подвижный базис, образованный двумя касательными векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ $(\vec{r}_i \equiv \partial\vec{r}/\partial x_i)$ и единичной нормалью $\vec{n}$. Движение этого базиса по поверхности описывается известными деривационными формулами Гаусса-Вейнгартена [7]

$$\nabla_j \vec{r}_i = b_{ij}\vec{n}, \qquad /3/$$

$$\frac{\partial\vec{n}}{\partial x_i} = -\sum_{k,\ell=1}^{2} b_{ik} g^{k\ell} \vec{r}_\ell, \quad i,j=1,2,$$

где ∇_j означает ковариантное дифференцирование по отношению к метрическому тензору g_{ij}; $g^{k\ell}$ - тензор, обратный к g_{ij}: $g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$. Тензор b_{ij} в уравнениях /3/ - это тензор второй квадратичной формы поверхности. В том случае, когда поверхность задана в виде $\phi=\phi(x_1,x_2)$, этот тензор определяется формулами

$$b_{11}=\frac{\phi_{11}}{\sqrt{g}},\quad b_{12}=b_{21}=\frac{\phi_{12}}{\sqrt{g}},\quad b_{22}=\frac{\phi_{22}}{\sqrt{g}}, \tag{/4/}$$

где

$$g=\det\|g_{ik}\|=1+\phi_1^2+\phi_2^2.$$

Если расписать в явном виде ковариантные производные, входящие в /3/, то эти уравнения можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix}\vec r_1\\ \vec r_2\\ \vec n\end{pmatrix}=\Omega^j\begin{pmatrix}\vec r_1\\ \vec r_2\\ \vec n\end{pmatrix},\qquad j=1,2, \tag{/5/}$$

где матрицы Ω^j имеют вид

$$\Omega^j=\begin{Vmatrix}\Gamma^1_{1j} & \Gamma^2_{1j} & b_{1j}\\ \Gamma^1_{2j} & \Gamma^2_{2j} & b_{2j}\\ -b^1_j & -b^2_j & 0\end{Vmatrix}. \tag{/6/}$$

В этих формулах Γ^k_{ij} - символы Кристоффеля для метрического тензора /2/

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{k\ell}\left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right), \tag{/7/}$$

а $b^k_j=\sum_{i=1}^{2}b_{ji}g^{ik}$.

Теперь необходимо учесть, что нас интересует не произвольная поверхность $\phi(x_1,x_2)$, а та, которая определяется уравнением /1/. Для этого необходимо заменить в матрицах Ω^j, $j=1,2$ вторую производную ϕ_{11} на $F(x_1,x_2,\phi,\phi_1,\phi_2,\phi_{12},\phi_{22})$. Подставляя /2/ и /7/ в /6/ и учитывая /1/, получаем довольно сложные формулы для матриц Ω^j:

$$\Omega^1=g^{-1}\begin{Vmatrix}\phi_1F & \phi_2F & Fg^{1/2}\\ \phi_1\phi_{12} & \phi_2\phi_{12} & \phi_{12}g^{1/2}\\ -[(1+\phi_2^2)F-\phi_1\phi_2\phi_{12}]g^{-1/2} & -[(1+\phi_1^2)\phi_{12}-\phi_1\phi_2F]g^{-1/2} & 0\end{Vmatrix}, \tag{/8/}$$

$$\Omega^2=g^{-1}\begin{Vmatrix}\phi_1\phi_{12} & \phi_2\phi_{12} & \phi_{12}g^{1/2}\\ \phi_1\phi_{22} & \phi_2\phi_{22} & \phi_{22}g^{1/2}\\ -[(1+\phi_1^2)\phi_{12}-\phi_1\phi_2\phi_{22}]g^{-1/2} & -[(1+\phi_1^2)\phi_{22}-\phi_1\phi_2\phi_{12}]g^{-1/2} & 0\end{Vmatrix}, \tag{/9/}$$

$$g=1+\phi_1^2+\phi_2^2,\quad F=F(x_1,x_2,\phi,\phi_1,\phi_2,\phi_{12},\phi_{22}).$$

Таким образом, нелинейному уравнению /1/ мы можем поставить в соответствие следующую пару линейных матричных уравнений

$$\frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_j}=\Omega^j\,\psi(x_1,x_2),\qquad j=1,2, \tag{/10/}$$

где $\psi(x_1,x_2)$ - функция-столбец с тремя компонентами, а матрицы Ω^j определяются формулами /8/ и /9/. Условие совместности этих уравнений

$$\frac{\partial\Omega^1}{\partial x_2}-\frac{\partial\Omega^2}{\partial x_1}=[\Omega^2,\ \Omega^1] \tag{/11/}$$

до замены в Ω^j ϕ_{11} на F выполнялось тождественно для любой функции $\phi(x_1,x_2)$. После этой замены условие /11/ выполняется только в силу /1/. Чтобы равенство /11/ имело смысл, необходимо, очевидно, потребовать существования третьих производных у искомой функции $\phi(x_1,x_2)$.

Метод обратной задачи рассеяния требует, чтобы в линейные уравнения /10/, точнее, в матрицы Ω^j, $j=1,2$ /формулы /8/,/9//, входил некоторый параметр λ, который можно было бы трактовать как спектральный параметр в линейной задаче

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=\Omega^2\psi, \tag{/12/}$$

дополненной соответствующими граничными условиями на функцию $\psi(x_1,x_2)$ по переменной x_2. /Мы считаем, что эволюционной переменной является x_1/. Геометрический подход, к сожалению, не дает никаких указаний, как ввести этот параметр.

Здесь следует, вероятно, учитывать симметрию исходного нелинейного уравнения /1/. Например, в том случае, когда /1/ имеет релятивистски инвариантный вид

$$\phi_{11}-\phi_{22}=F(\phi), \tag{/13/}$$

замена

$$x_1+x_2\to\lambda(x_1+x_2),\quad x_1-x_2\to\lambda^{-1}(x_1-x_2),\quad \phi(x_1,x_2)\to\phi(x_1,x_2),$$

сохраняющая уравнение /13/, позволяет ввести спектральный параметр λ в соответствующие операторы Лакса [8,9].

В заключение необходимо отметить следующее. Линейное уравнение /12/, которое в методе обратной задачи рассеяния рассматривается как спектральная задача, не зависит от конкретного вида исходного нелинейного уравнения /1/, так как матрица Ω^2 в /9/ не зависит от F.

Операторы Лакса, получаемые предложенным здесь способом, оказываются чрезвычайно сложными и громоздкими. Причиной этого является, очевидно, слишком большая универсальность рассматриваемого подхода, который совершенно не учитывает конкретных особенностей заданного нелинейного уравнения, то есть конкретных свойств функции $F(x_1, x_2, \phi, \phi_1, \phi_2, \phi_{12}, \phi_{22})$.

Рассмотренный выше метод можно применить, очевидно, и к системе из m уравнений на m функций, зависящих от n переменных:

$$\phi^r_{11} = F^r(x_i, \phi^r, \phi^r_i, \phi^r_{k\ell}),$$

$$i,k,\ell = 1,2,\ldots,n, \quad k \neq \ell = 1, \quad r = 1,2,\ldots,m, \quad \phi^r = \phi^r(x_1, \ldots, x_n).$$

В этом случае вместо одного условия совместности /11/ имеют место $n(n-1)/2$ таких условий с матрицами Ω^j, $j = 1,2,\ldots,n$ размерности $(n+m)\times(n+m)$. Эти условия легко выписать в полной аналогии с тем, как было получено /11/, учитывая тот факт, что система функций $\phi^r(x_1,\ldots,x_n)$, $r = 1,2,\ldots,m$ задает в непараметрическом виде n-мерную поверхность в $(n+m)$-мерном евклидовом пространстве с координатами $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \phi^1, \ldots, \phi^m\}$.

Автор благодарит В.К.Мельникова за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.В. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. "Наука", М., 1980; Мельников В.К. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.5, с.1224-1272.
2. Scott A.C., Chu F.Y.F., McLaughlin D.W. Proc. IEEE, 1973, 61, p.1443.
3. Wahlquist H.D., Estabrook F.B. J.Math.Phys., 1975, 16,p.1.
4. Lund F. Phys.Rev., 1977, D15, p.1540.
5. Sasaki R. Nucl.Phys., 1979, B154, p.343.
6. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. Fort.der Phys., 1980, 28, p.409.
7. Eisenhart L.P. An Introduction to Differential Geometry with Use of the Tensor Calculus. Pronceton University Press, Princeton, 1940.
8. Pohlmeyer K. Commun.Math.Phys., 1976, 46, p.209.
9. Neveu A., Paranicolaou N. Comm.Math.Phys., 1976, 58,p.31.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 января 1981 года.