объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-303

А.С.Илчев, В.К.Митрюшкин

ВКЛАД ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА И СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Направлено в "Journal of Physics G"

1981

1. Хорошо известно, что ряды теории возмущений /ТВ/ в квантовой теории поля имеют, вообще говоря, нулевой радиус сходимости, что подразумевает наличие особенности в нуле по константе взаимодействия. На это обстоятельство было впервые указано Дайсоном [1] применительно к КЭД, связавшим неаналитичность по константе взаимодействия a ($a = e^2/4\pi$) с нестабильностью вакуума относительно образования достаточно большого числа электрон-позитронных пар при отрицательных значениях a /т.н. дайсоновская нестабильность/.

Асимптотический характер ТВ в различных моделях теории поля был доказан в работах [2-8].

Однако суммирование асимптотического ряда есть неоднозначная процедура. Действительно, к полученному тем или иным способом выражению, которое раскладывается в исходный асимптотический ряд $f(a) = \Sigma a^n \cdot f_n$, всегда можно добавить выражение типа $e^{-c/a}$, которое, в свою очередь, раскладывается в нулевой ряд Тейлора.

Для того, чтобы однозначно восстановить функцию по ее /асимптотическому/ ряду, необходимо иметь дополнительную информацию о сумме ряда, например, знать область аналитичности функции и т.п.

Вместе с тем в ряде моделей квантовой теории поля с фермионами /например, в КЭД/ регуляризованный, но неперенормированный ряд теории возмущений имеет конечный радиус сходимости [9]. Так как число графов растет быстро с ростом порядка теории возмущений /вообще говоря, как степень факториала/, то возможность сходимости ряда теории возмущений в какой-то области /не сводящейся к точке, как это имеет место в случае асимптотических рядов/ может основываться только на знакопеременности различных вкладов одного порядка в теориях с фермионами.

Удобное представление для членов ряда теории возмущений в конечном объеме, позволяющее учитывать в явном виде такие сокращения, было предложено в [9]. Доказательство сходимости регуляризованного ряда /в конечном объеме/ производится далее простым мажорированием членов ряда по абсолютной величине с использованием неравенства Адамара для определителей. Необходимо, однако, помнить, что проведение ренормировочной процедуры, т.е. введение контрчленов, может разрушить в некоторых случаях эту сходимость /например, в случае взаимодействия Юкавы $\bar{\psi}\psi\phi$ в 4-мерном пространстве-времени/.

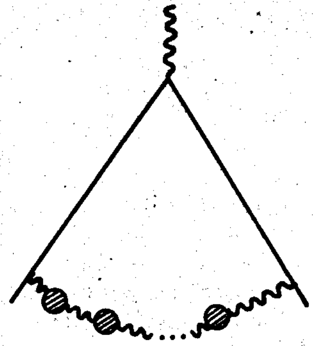

Рис.1

Однако по крайней мере в некоторых важных частных случаях /регуляризованный/ ряд теории возмущений остается сходящимся в конечной области /не сводящейся к точке/ и после проведения ренормировочной процедуры. К таким случаям относятся, например, вклады диаграмм "ренормалонного" типа /см. рис.1/ в аномальный магнитный момент электрона. В квантовой электродинамике вклад диаграмм, изображенных на рис.1, в аномальный магнитный момент электрона раскладывается в асимптотический знакопостоянный ряд с факториально растущими коэффициентами[10]. Однако ряд из регуляризованных диаграмм этого типа является сходящимся и после введения контрчленов. Это открывает возможность для следующего способа действий: будем суммировать регуляризованный ряд, имеющий конечный радиус сходимости. Полученное выражение может быть аналитически продолжено по константе взаимодействия за пределы круга сходимости, после чего уже следует снять регуляризацию.

В дальнейшем будет использоваться размерная регуляризация с $D=4-2\epsilon$, $\epsilon \neq 0$.

2. Рассмотрим более детально изложенную выше схему. Поляризационный оператор в КЭД $\pi(k^2)$ в однопетлевом приближении равняется

$$\pi_u(k^2;\epsilon) = -\frac{2\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\epsilon}\int_0^1 dx\cdot x(1-x)\left(\frac{\mu^2}{m^2-x(1-x)k^2-i0}\right)^{\epsilon}, \qquad /1/$$

$$\pi_R(k^2;\epsilon) = \pi_u(k^2;\epsilon) - \pi_u(k^2=0;\epsilon), \qquad /2/$$

$$\pi_R(k^2) = \lim_{\epsilon\to 0}\pi_R(k^2;\epsilon).$$

Вклад графов, изображенных на рис.1, в аномальный магнитный момент электрона при $\epsilon \neq 0$ равен

$$a^{\epsilon}(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi}\sum_{n\geq 0}\alpha^n\cdot a_n^{\epsilon},$$

$$a_n^{\epsilon} = \int_0^1 dy(1-y)\left[\pi_R^{\epsilon}\left(-\frac{y^2}{1-y}\cdot m^2\right)\right]^n, \qquad /3/$$

$$a_n^{\epsilon=0} \underset{n\to\infty}{\sim} n!$$

Очевидно, что ряд /2/ имеет конечный /ненулевой/ радиус сходимости $R_\epsilon \sim |\epsilon|$. Для простоты изложения будем использовать в дальнейшем вместо формулы /1/ для поляризационного оператора более простое выражение /4/

$$\pi_u(k^2;\epsilon) = -\frac{1}{3\pi}\cdot\frac{\alpha}{\epsilon}\left(\frac{\mu^2}{4m^2-k^2-i0}\right)^{\epsilon}, \qquad /4/$$

которое приводит к правильным основным аналитическим свойствам $\pi_R(k^2)$:

а/ $\pi_R(k^2=0)=0$,

б/ $\pi_R(k^2) \underset{k^2\to\infty}{\sim} \ln k^2$,

в/ $k^2=4m^2$ - точка ветвления.

Подобного рода замена не влияет существенно на полученные результаты.

Для аномального магнитного момента с помощью /3/, /4/ получаем

$$a^{\epsilon}(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \frac{dy\cdot y}{1+\frac{\alpha}{\epsilon}\cdot\frac{1}{3\pi}\left(\frac{\mu^2}{4m^2}\right)^{\epsilon}\cdot\left[\left(\frac{4y}{(1+y)^2}\right)^{\epsilon}-1\right]}. \qquad /5/$$

Разложение /5/ в ряд по степеням α приводит, как уже указывалось выше, к знакопостоянному ряду с факториально растущими коэффициентами /см. /3//, в то время как снятие регуляризации /т.е. $\epsilon\to 0$ / приводит, как и следовало ожидать, к расходимости.

Мы, однако, не будем снимать регуляризацию до самого последнего этапа.

Прежде чем снимать регуляризацию, продолжим /5/ по α за пределы круга сходимости.

Физическим условием, накладываемым на значения аномального магнитного момента $a(\alpha)$, является отсутствие разреза /и соответственно скачка/ на положительной полуоси в комплексной плоскости α.

Необходимо отметить, что выражение /5/ может быть аналитически продолжено во всю комплексную плоскость ϵ и снятие регуляризации /т.е. $|\epsilon|\to 0$ / может происходить вдоль произвольного направления в комплексной плоскости ϵ.

Оказывается, что результат существенно зависит от того, каким образом мы снимаем регуляризацию.

Воспользуемся имеющимся произволом для того, чтобы получить вещественную функцию $a(\alpha)$ при $\alpha > 0$.

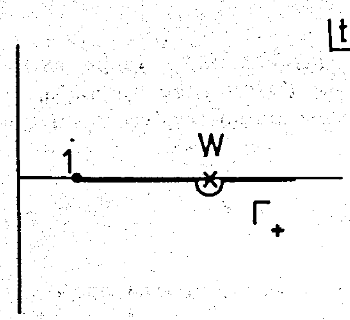

Рис.2а

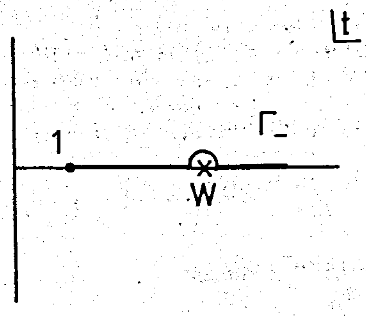

Рис.2б

Аналитическое продолжение /5/ в область $\mathrm{Re}\,\epsilon < 0$ можно представить в виде

$$a^{\epsilon}(\alpha) = 3\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\right)^{\epsilon} \int\limits_{\Gamma} \frac{dt\cdot t^{1/\epsilon-1}\cdot f(t^{1/\epsilon})}{t-w(\epsilon;\alpha)} \qquad /6/$$

где

$$f(x) = \frac{(2-x-2\sqrt{1-x})^2}{x^3\sqrt{1-x}},$$

$$w(\epsilon,\alpha) = 1-3\pi\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\right)^{\epsilon}\cdot\frac{\epsilon}{\alpha},$$

а два возможных выбора для контура Γ показаны на рис.2а,б.

Выберем в качестве контура Γ следующий контур:

$$\Gamma = \frac{1}{2}(\Gamma_+ + \Gamma_-).$$

В результате для $a^{\epsilon}(\alpha)$ получаем выражение

$$a^{\epsilon}(\alpha) = 3\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\right)^{\epsilon}\mathcal{P}\int\limits_1^{\infty}\frac{dt\, t^{1/\epsilon-1} f(t^{1/\epsilon})}{t-w}. \qquad /7/$$

В полученном выражении можно переходить к пределу $\epsilon\to 0-$. Несложные вычисления приводят к ответу

$$a(\alpha) = \lim_{\epsilon\to 0-} a^{\epsilon}(\alpha) = 3\mathcal{P}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt\, e^{-t} f(e^{-t})}{t-3\pi/\alpha}. \qquad /8/$$

Аналогичным образом может быть просуммирован вклад в аномальный магнитный момент электрона поляризации вакуума в двухпетлевом, трехпетлевом и т.д. приближении для поляризационного оператора.

Предложенный нами метод суммирования может найти себе применение и для вычисления более сложных вкладов для ряда моделей квантовой теории поля.

В заключение нам хотелось бы выразить признательность В.А.Матвееву и А.Н.Тавхелидзе, а также А.В.Кудинову, С.П.Кулешову, А.Н.Сисакяну, Н.Б.Скачкову, Д.В.Ширкову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyson F. Phys.Rev., 1952, 85, p.613.
2. Hurst C.A. Proc. Camb.Phil.Soc., 1952, 48, p.625; Thirring W. Helv.Phys.Acta, 1953, 26, p.33; Peterman A. Helv.Phys.Acta, 1953, 26, p.291; Jaffe A. Comm.Math.Phys., 1965, 1, p.127.
3. Schwinger J. Phys.Rev., 1951, 82, p.664; Иоффе Б.Л. ДАН СССР, 1954, 94, с.437.
4. Липатов Л.Н. ЖЭТФ, 1977, 72, с.411.
5. Itzykson C., Parisi G., Zuber J.B. Phys.Rev., 1977, D16, p.996; Bogomolny E.B., Fateev V.A. Phys.Lett., 1978, B76, p.210.
6. Itzykson C., Parisi G., Zuber J.B. Phys.Rev.Lett., 1977, 38, p.306; Buchvostov A.P., Lipatov L.N. Phys.Lett., 1977, B70, p.48.
7. Bogomolny E.B., Fateev V.A. Phys.Lett., 1977, B71, p.93; t'Hooft G. In:"Ettore Majorana" Int. School, Erice, Sicily, 1977.
8. Arbuzov B.A., Filippov A.T. Nuovo Cim., 1965, 38, p.796.
9. Caianiello E.R. Nuovo Cim., 1953, 10, p.1634; ibid, 1954, 11, p.493; ibid, 1956, 3, p.223.
10. Lautrup B. Phys.Lett., 1977, B69, p.109.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая 1981 года.